

KINEMATYKA WARSTWY OŚRODKA TRESKI

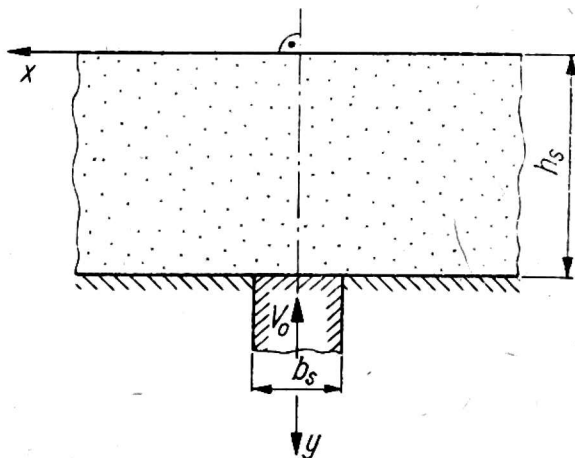
Benedykt Ponder, Gustaw Tyro

Politechnika Warszawska — Instytut Maszyn Roboczych Ciężkich
Dyr. Instytutu: doc. dr hab. Gustaw Tyro

1. ZAŁOŻENIA WYJSCIOWE

Do analizy teoretycznej przyjęto początkową fazę ruchu ośrodka, wywołanego wciskaniem od dołu płaskiego stempla (ze stałą prędkością) w warstwę gruntu o stałej grubości (rys. 1). Analizę statyki i kinematyki w początkowej fazie ruchu stempla przeprowadzono, przyjmując następujące podstawowe założenia:

- 1) płaski stan odkształcenia w urabianym ośrodku,
- 2) ośrodek traktowano jako materiał izotropowy idealnie plastyczny — zgodnie z założeniami mechaniki ośrodków sypkich,
- 3) założono, że zarówno spójność ośrodka K , kąt tarcia wewnętrznego ϱ , jak i ciężar objętościowy γ zachowują stałe wartości w każdym punkcie obszaru odkształcanego podczas trwania procesu,
- 4) analizę przeprowadzono dla ośrodków wazkich ($\gamma \neq 0$).



Rys. 1. Schemat wciskania stempla w warstwę gruntu

Fig. 1. Fircing in of the punch into the soil layer

Rozpatrzono tylko przypadek ruchu stempla do góry (jego początkową fazę). Powstają wówczas maksymalne reakcje ośrodka, będącego w stanie parcia biernego.

2. STAN NAPRĘŻENIA

Wywołanie ruchu ośrodka nad stemplem wymaga pokonania oporu, wynikającego ze stanu równowagi granicznej. Stan równowagi granicznej ośrodka idealnie spoiwego w przypadku płaskiego płynięcia opisują równania równowagi (1) oraz warunek stanu granicznego Treski (2).

$$\frac{\delta\sigma_x}{\delta x} + \frac{\delta\tau_{xy}}{\delta y} = 0, \quad \frac{\delta\tau_{xy}}{\delta x} + \frac{\delta\sigma_y}{\delta y} = \gamma \quad (1)$$

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = 4K^2 \quad (2)$$

Znaczenie poszczególnych wielkości przedstawia rysunek 2. W wyniku rozwiązania układu równań (1) — (2) otrzymuje się równania charakterystyk w postaci:

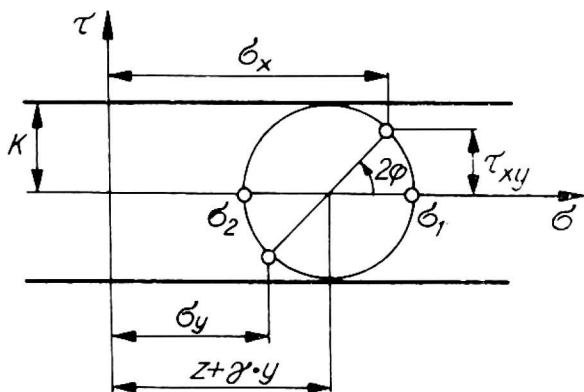
$$\frac{d_y}{d_x} = \operatorname{tg}\left(\varphi \pm \frac{\pi}{4}\right), \quad Z \pm 2K\varphi = \operatorname{const}, \quad (3)$$

gdzie:

Z — naprężenie zastępcze (rys. 2),

φ — kąt, jaki tworzy kierunek większego naprężenia głównego z osią x ,

K — kohezja.



Rys. 2. Koło Mohra dla płaskiego stanu odkształcenia, reprezentujące graniczny stan naprężenia dla warunku Treski

Fig. 2. Mohr's cycle for plane strain presenting critical stress state derived from the Tresca's condition

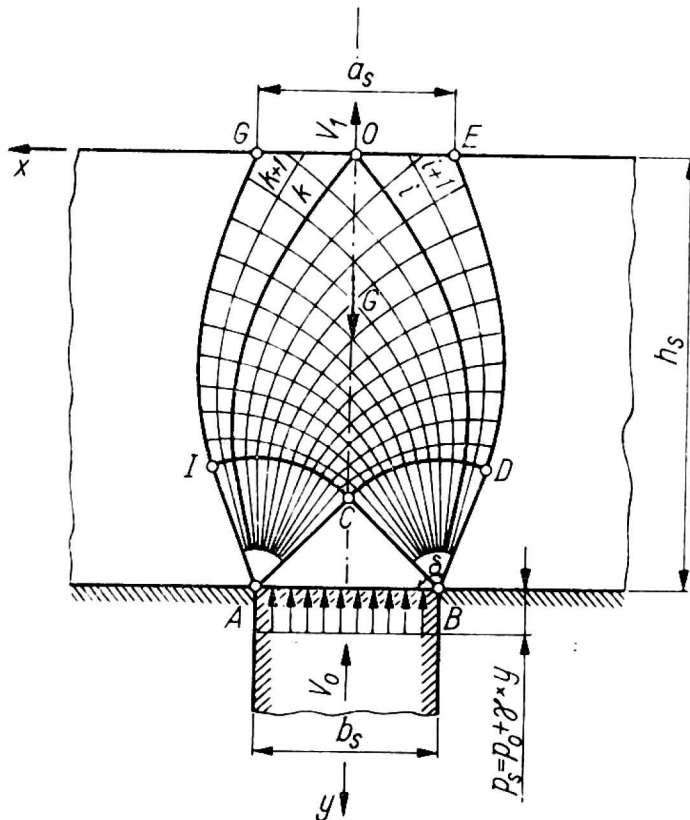
Metoda rozwiązania układu równań stanu granicznego została podana w pracy Sokołowskiego [1]. Stan naprężenia w odkształcanym obszarze ośrodka w początkowej fazie ruchu stempla określono, rozwiązując numerycznie następujące zagadnienia brzegowe (rys. 3) dla równań (4):

a) w trójkącie ABC — zagadnienie Cauchy'ego,

b) w obszarze ACI — zagadnienie charakterystyczne z punktem osobliwym,

c) w obszarze $CIGO$ — zagadnienie mieszane.

Schemat omawianego rozwiązania przedstawia rysunek 3. Po wyznaczeniu siatki charakterystyk dla naprężeń oraz wartości naprężenia zastępczego



Rys. 3. Schemat rozwiązania statyki

Fig. 3. Solution of statics

czego w jej węzłach określono składowe naprężenia σ_y i τ_{xy} na podstawie następujących zależności:

$$\begin{aligned}\sigma_y &= Z - K \cos 2\varphi + \gamma \cdot y, \\ \tau_{xy} &= K \sin 2\varphi.\end{aligned}\quad (4)$$

W ten sposób został określony stan naprężenia w całym obszarze odkształcanym, przedstawionym schematycznie na rysunku 3, w funkcji wartości nacisków obliczeniowych p_0 .

3. KOMPLETNE ROZWIĄZANIE STATYKI I KINEMATYKI OŚRODKA — — OKREŚLENIE RZECZYWISTEJ WARTOŚCI NACISKÓW p_s

Wyznaczenie rzeczywistej wartości nacisków p_s na powierzchni czołowej stempla wymagało znalezienia takiego statycznie dopuszczalnego pola naprężeń, dla którego wszystkie kinematyczne warunki są spełnione. Wystąpił tu nowy typ zagadnienia brzegowego dla pola prędkości. Należało znaleźć kinematycznie dopuszczalny schemat odkształcenia ośrodka dla początkowo nieokreślonych warunków dla prędkości na swobodnym brzegu GE (rys. 3), przy czym odpowiadające mu pole naprężeń musiało spełniać wszystkie warunki statyczne. Pole prędkości ruchu ośrodka określono, przyjmując prawo płynięcia stowarzyszone z warunkiem stanu granicznego Treski [2]. Wówczas charakterystyki dla prędk-

kości i naprężeń pokrywają się. Statykę ośrodka określono numerycznie na maszynie cyfrowej, natomiast kinematykę metodą wykreślną [2]. Na podstawie siatki charakterystyk dla naprężeń (prędkości), otrzymanej z rozwiązania statyki, budowano plany prędkości dla określonego stosunku h_s/b_s (rys. 1) dla obszarów plastycznego płynięcia ograniczonych kolejnymi charakterystykami położonymi na lewo od linii AO (rys. 3). Każdej charakterystyce położonej na lewo od AO dla danego stosunku h_s/b_s odpowiada ściśle określona wartość „szczeliny wypływu” ośrodka a_s . Mając określone prędkości w całym polu odkształcenia objętym charakterystyką k (w wyniku zbudowania hodografu) sprawdzano warunek ciągłości w postaci:

$$V_o \cdot b_s = V_1 \cdot a_s \quad (5)$$

W przypadku niespełnienia warunku (5) budowano nowy plan prędkości dla obszaru ograniczonego charakterystyką $k + 1$. Procedurę powyższą powtarzano dotąd, aż uzyskane wartości brzegowe dla prędkości spełniały warunek ciągłości ruchu ośrodka. Dla tak wyznaczonego kinematycznie dopuszczalnego pola odkształcenia sprawdzono czy odpowiadające mu pole naprężeń jest statycznie dopuszczalne, a następnie — w całym obszarze objętym plastycznym płynięciem sprawdzano podstawowy warunek termodynamiczny nieujemności mocy dysypowanej energii. Z powodu znacznej pracochłonności metody wykreślnej określania kinematyki zbudowano kompletne rozwiązanie tylko dla stosunku $h_s/b_s = 3$. Zastosowanie metody numerycznej (różnic skończonych) do określenia pola prędkości dla kolejno zakładanych obszarów plastycznego płynięcia i opracowanie algorytmu na maszynę cyfrową stworzy możliwość bardzo efektywnego stosowania przedstawionej powyżej metody rozwiązywania tego typu zagadnień brzegowych, co znacznie ułatwi poszukiwanie kompletnych rozwiązań dla innych wartości stosunku h_s/b_s .

Wartość nacisków obliczeniowych p_o wyznacza się z warunku równowagi w postaci:

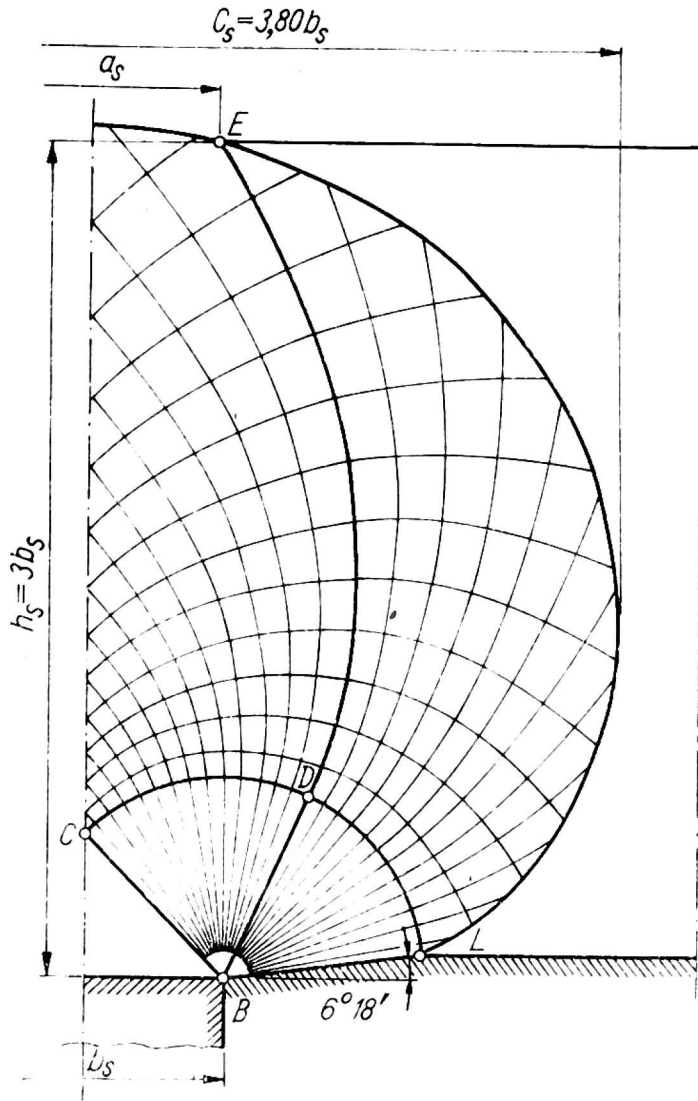
$$(p_o + \gamma h_s) \frac{b_s}{2} = \int_{AG} \sigma_y dx + \int_{AG} \tau_{xy} dy + \frac{G}{2} \quad (6)$$

gdzie: G — ciężar ośrodka zawartego między charakterystykami AG i BE (rys. 3), natomiast naciski p_s na podstawie związku

$$p_s = p_o + \gamma h_s \quad (7)$$

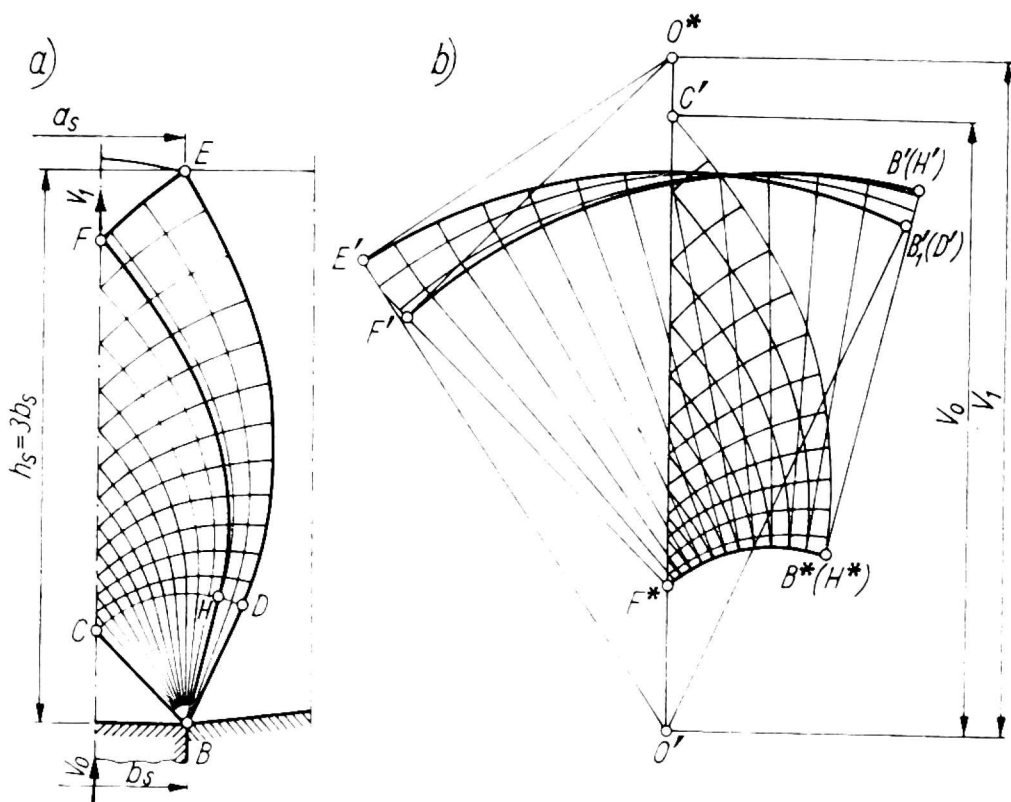
Po wyznaczeniu nacisków p_o sprawdza się na swobodnym brzegu GE warunki brzegowe dla naprężeń w postaci:

$$\sigma_1 = 0.$$

Rys. 4. Statycznie dopuszczalne pole naprężeń dla $h_s/b_s = 3$ Fig. 4. Statically possible stress field for $h_s/b_s = 3$

Uzyskane statycznie dopuszczalne pole naprężeń, wynikające z kompletnego rozwiązania dla $h_s/b_s = 3$, przedstawia rysunek 4. W wyniku zbudowania przedłużenia linii poślizgu uzyskano linię nieciągłości naprężeń EL typu statycznie dopuszczalnego. Wyznacza ona brzeg, na którym po jego prawej stronie (rys. 4) występuje stan naprężenia określany tensorem kulistym, natomiast po jego lewej stronie — stan naprężenia wynikający z równań równowagi granicznej. Linia EL określa zasięg oddziaływania pola naprężeń (wynikającego z kinematycznych warunków rozwiązania) na obszary sztywne. Należy tu zaznaczyć, że przy szerokościach warstwy mniejszej od c_s (rys. 4) mogą powstać inne schematy odkształcenia plastycznego.

Rozwiązanie dla prędkości dla $h_s/b_s = 3$ przedstawia rysunek 5. Z uzyskanego rozwiązania kinematyki wynika, że w każdym punkcie obszaru plastycznego płynięcia prędkość, z wyjątkiem obszarów ABC i GEF , które poruszają się jako sztywne z prędkościami V_0 i V_1 , jest inna. Z hodografu wynika, że cząsteczki ośrodka należące do obszaru $BDEFH$ mają bardzo



Rys. 5. Rozwiązanie dla prędkości $h_s/b_s = 3$: a — siatka charakterystyk, b — hodograf

Fig. 5. Velocity solution for $h_s/b_s = 3$: a — net of characteristics, b — hodograph

znaczne prędkości względem przyległych partii materiału. Dlatego też przez szczelinę a_s w początkowej fazie ruchu stempla najpierw będzie wypływał materiał pochodzący z tego obszaru.

UWAGI KOŃCOWE

Omawiane w niniejszej pracy zagadnienia mają istotne znaczenie dla analizy procesów urabiania gruntów sposobami mechanicznymi. Jak wiadomo, zjawisko ruchu strugi gruntowej obserwuje się prawie we wszystkich procesach urabiania podłoża maszynami do robót ziemnych. Rozpatrywany przypadek ruchu strugi gruntowej ma, między innymi, miejsce w procesie napełniania skrzyni zgarniarki w jego końcowej fazie (w fazie dopełniania pojemnika zgarniarki). Zagadnienia te szerzej zostały omówione w pracy Pondera [3].

LITERATURA

1. Sokołowski W. W.: Statyka ośrodków sypkich, PWN, Warszawa 1958.
2. Szczepiński W.: Wstęp do analizy procesów obróbki plastycznej, PWN, Warszawa 1967.
3. Ponder B.: Analiza procesu napełniania skrzyń zgarniarek, Rozprawa doktorska, Politechnika Warszawska, 1975.

Бенедыкт Пондер, Густав Тыро

КИНЕМАТИКА СЛОЯ СРЕДЫ ТРЕСКИ

Резюме

В работе говорится о кинематике среды Трески в начальной фазе вдавливания плоского штамма снизу в слой грунта. Анализ проведен на основе математической теории сыпучих сред а также экстремальных принципов теории пластичности.

В работе представлено поле скорости, вытекающее из комплектного решения статики и кинематики среды.

Benedykt Ponder, Gustaw Tyro

KINEMATICS OF TRESKA'S MEDIUM LAYER

Summary

The kinematic of Tresca's medium during the initial phase of forcing in a flat punch from beton into soil layer has been described in the paper. An analysis has been done on the basis on the mathematical theory of loose medium extreme principles of plasticity theory. The velocity field resulting from complete solution of statics and kinematics of the medium has been presented, too.