О ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ В ПЕРИОДИЧЕСКИХ ОДНОМЕРНЫХ ВОЛНОВОДАХ

Анастасия Куценко, Вадим Яременко, Олег Черныш, Мария Бондар
Национальный университет биоресурсов и природопользования Украины
Украина, г. Киев, ул. Героев Обороны, 15
Anastasiya Kutsenko, Vadym Yaremenko, Oleg Chernysh, Mariya Bondar
National University of Life and Environmental Sciences of Ukraine
Str. Heroiv Oborony, 15, Kiev, Ukraine

Аннотация. Рассмотрено распространение волн изгиба в одномерных механических системах, которые закреплены шарнирно периодическим образом. В первом случае находятся периодические решения задачи о колебании бесконечной периодической шарнирно закрепленной балки, нагруженной в среднем сечении периода сосредоточенной силой, которая изменяется по гармоническому закону во времени. Затем исследования распространены на случай, когда аналогичная балка нагружена в произвольном пролете силой, с постоянной амплитудой. Для каждой задачи были получены решения, которые носят квазипериодический характер, что подтверждает правомочность использования теории Флоке для одномерных периодических структур.

Ключевые слова: периодическая структура, балка, волна, мультипликатор, „окна прозрачности", теория Флоке.

ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ

Для реализации многих механических устройств иногда необходимо уметь передать энергию вдоль упругой периодической структуры с помощью волн определенной частоты. Достаточно часто возникает и обратная проблема – обеспечить быстрое уменьшение в определенном пространственном направлении амплитуды колебаний, возмущенных внешней нагрузкой. Так, например, подобные задачи возникают при разработке частотных фильтров, методов виброзащиты элементов конструкций сельскохозяйственной техники и т.д. [1].

Изучение явления распространения волн в периодических структурах неразрывно связано с развитием механики твердого деформированного тела. Впервые дискретную периодическую механическую систему, которая состояла из точечных масс, расположенных вдоль прямой линии и соединенных упругими элементами рассмотрел еще Ньютон при вычислении скорости звука [Бриллюэн Л., Пароди М., 1959]. В дальнейшем одномерная цепь Ньютона стала ключевым объектом исследований в теории колебаний и волн на протяжении двух столетий.

Бернулли было установлено несколько важных свойств колебаний конечной цепи. Он показал, предложив тем самым принцип суперпозиции, что в такой системе произвольное колебание может быть представлено в виде суммы независимых колебаний числом, равным числу масс в цепи. Это дало возможность Лагранжу, используя результаты Эйлера, полученными им для однородной струны, построить мост между дискретным и непрерывным, фактически, положив начало спектральному анализу.

В 1830 году Коши, пытаясь объяснить явление дисперсии света, исследовал волновые свойства цепи Ньютона и установил, что для волн значительно длиннее от периода цепи скорость практически не зависит от длинны волны. Для коротких же волн скорость существенно зависит от данного параметра.

В дальнейшем в работах [3 – 11] впервые предложено для исследования распространения волн в периодических структурах использовать теорему Флоке, которая показывает, в каком виде нужно искать волновое поле, и положена в основу всех современных методов расчета колебаний периодических структур [12 – 16]. Смысл ее состоит в том, что колебания двух соседних периодов отличаются на постоянную величину S, которую называют мультипликатором. Это утверждение есть следствием трансляционной симметрии периодических структур, которая состоит в неизменности структуры при сдвиге ее на расстояние, кратное размеру одной ячейки периодичности. Мультипликатор полностью характеризует процесс прохождения волны вдоль периодической структуры. Если $S \equiv 1$, тогда волна проходит без никаких искажений. В общем случае S есть комплексным числом, которое можно представить в виде: $S = |S| e^{i \arg(S)}$.

Модуль мультипликатора равен амплитуде волны, а аргумент – сдвигу фазы волны, который возникает при прохождении последующего периода системы. Исходя из физических соображений, логично припустить, что $|S| \le 1$. Случай, когда $|S| > 1$ соответствует волне, которая распространяется в противоположном направлении. Когда $|S| = 1$, амплитуда волны не изменяется во время ее распространения вдоль системы, в противном случае она будет уменьшатся по экспоненциальному закону. Для получения полной информации о волновых свойствах периодической системы необходимо знать все частотные промежутки, для которых $|S| = 1$ и которые называются „окнами прозрачности".

ЦЕЛЬ РАБОТЫ

В данной работе делается попытка на примере бесконечной периодической шарнирно закрепленной балки показать, что независимо от вида внешней нагрузки, на большей части ее устанавливаются колебания, которые соответствуют однородной квазипериодической волны, исключение составляют пролеты, к которым непосредственно приложена внешняя нагрузка.

РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЙ

Рассматривается бесконечная периодически шарнирно закрепленная однородная балка, к среднему сечению произвольного пролета которой приложена сосредоточенная сила, которая изменяется во времени по гармоническому закону $Pe^{-i\omega t}$. Для математической постановки задачи используем метод суперпозиции и функцию влияния:

$$w^*(x) = \frac{1}{4p^3 EJ}\left(e^{-p|x|} - ie^{ip|x|}\right), \tag{1}$$

которая соответствует волне, возбужденной единичной сосредоточенной перерезающей силой, приложенной в сечении $x = 0$. Учитывая, что внешняя сила вызывает в шарнирах реакции с неизвестными амплитудами P_n, $n = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$, амплитудная функция прогиба балки может быть представлена в следующем виде:

$$w(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{P_n}{4p^3 EJ}\left(e^{-p|x-(n+1/2)a|} - ie^{ip|x-(n+1/2)a|}\right) + \\ + \frac{1}{4p^3 EJ}\left(e^{-p|x|} - ie^{ip|x|}\right). \tag{2}$$

Будем считать, что ближайшие к точке приложения нагрузки опоры имеют индексы –1 и 0. За начало отсчета оси x выбрано точку приложения сосредоточенной силы, то есть средину соответственного пролета.

Для того, что бы выражение (2) однозначно задавало поле прогибов в балке, необходимо найти амплитуды реакций P_n. Последние определяются из условий отсутствия прогибов в шарнирах, которые на основании (2) можно записать в виде бесконечной системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ):

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} : P_k\left(e^{-|(n-k)|pa} - ie^{i|(n-k)|pa}\right) = \\ = P\left(e^{-(n+1/2)pa} - ie^{i(n+1/2)pa}\right), \; n \in Z. \tag{3}$$

Система (3) относится к разностным, к таким, индексы k и n в коэффициенты которой входят только в виде разницы $n-k$. Для нахождения решения таких систем используют преобразование Лорана [19, 20]. Но если параметр p, который пропорциональный квадратному корню с круговой частоты волны, считать действительной величиной, то при таких условиях коэффициенты системы (3) не стают ничтожно малыми при росте их индекса, а потому правомерность использования преобразования Лорана вызывает определенные сомнения.

Для решения этой проблемы будем считать p комплексным числом с малой положительной мнимой частью. Физически ненулевая мнимая часть параметра p соответствует учитыванию сил внутреннего сопротивления, которые действуют в балке. При этом СЛАУ (3) стремятся к нулю в геометрической прогрессии с ростом их индекса, что позволяет применить к ней преобразование Лорана. После проведения всех преобразований соответственные результаты для балки без внутренних потерь получаем граничным переходом, направляя мнимую часть p к нулю.

Представим (3) в следующем виде:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{n-k} P_k = c_n , \qquad (4)$$

где:

$$a_n = e^{-|(n)|pa} - ie^{i|(n)|pa} , \qquad (5)$$

$$c_n = P\left(ie^{i(n+1/2)pa} - e^{-(n+1/2)pa}\right).$$

Ряд, который стоит в левой части (4), называется сверткой последованостей a_n и P_n. Применяя к (4) преобразование Лорана:

$$A(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k t^k , \quad C(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k t^k ,$$

$$P(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} P_k t^k , \qquad (6)$$

или умножая уравнения на t^n, складывая их, и используя свойство: преобразование Лорана от свертки двух последованостей равно произведению их образов, в пространстве получаем функциональные уравнения на единичном круге комплексной плоскости t:

$$A(t)P(t) = C(t), \quad |t| = 1 . \qquad (7)$$

Проведя несложные преобразования, в основу которых положена формула для суммы членов геометрической прогрессии, для коэффициента правой части уравнения (7) найдем явные выражения:

$$A(t) = \frac{2t\sin(pa)}{1-2t\cos(pa)+t^2} - \frac{2tsh(pa)}{1-2tch(pa)+t^2} \qquad (8)$$

$$C(t) = -2P\left[\frac{(1+t)\sin(pa/2)}{1-2t\cos(pa)+t^2} - \frac{(1+t)sh(pa/2)}{1-2tch(pa)+t^2}\right].$$

Таким образом, решение (3) получаем как обратное преобразование Лорана от функции $P(t)$:

$$P_n = \frac{1}{2}\int_{|t|=1} \frac{P(t)}{t^{n+1}}dt = \frac{1}{2\pi}\int_{|t|=1} \frac{C(t)}{A(t)t^{n+1}}dt , \; n \in Z . \quad (9)$$

Положив $t = \exp(i\varphi)$ и подставив (8) у (9), после очевидных преобразований, получим:

$$P_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\cos n\varphi + \cos(n+1)\varphi)\times$$

$$\times\frac{(\cos\varphi - \cos(pa))sh(pa/2) - (\cos\varphi - ch(pa))\sin(pa/2)}{(\cos\varphi - ch(pa))\sin(pa) - (\cos\varphi - \cos(pa))sh(pa)}d\varphi \quad (10)$$

или

$$P_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\cos n\varphi + \cos(n+1)\varphi)\frac{\widetilde{c} + \widetilde{d}\cos\varphi}{\widetilde{b} - \cos\varphi}d\varphi , \qquad (11)$$

где:

$$\widetilde{b} = \frac{sh(pa)\cos(pa) - ch(pa)\sin(pa)}{sh(pa) - \sin(pa)} ,$$

$$\widetilde{c} = -\frac{sh(pa/2)\cos(pa) - ch(pa)\sin(pa/2)}{sh(pa) - \sin(pa)} ,$$

$$\widetilde{d} = \frac{sh(pa/2) - \sin(pa/2)}{sh(pa) - \sin(pa)} \qquad (12).$$

Только из самого вида интеграла (11) можно сделать вывод, что: $P_{-(n+1)} = P_n$, поэтому достаточно найти P_n для $n = 0,1,2,3\ldots$

Таким образом, нахождение решения бесконечной СЛАУ (3) свелось к вычислению интеграла (11). Это несложно сделать, если ввести в рассмотрение параметр S, который есть меньшим по модулю корнем уравнения вида:

$$S^2 - 2\widetilde{b}S + 1 = 0 , \qquad (13)$$

и воспользоваться значениями интегралов [17, 20]:

$$\int_0^{\pi}\frac{\cos n\varphi}{S^2 2S\cos\varphi + 1}dx = \frac{\pi S^n}{1-S^2} ,$$

$$\int_0^{\pi}\frac{\cos n\varphi\cos\varphi}{S^2 2S\cos\varphi + 1}dx = \frac{\pi}{2}S^{n-1}\frac{1+S^2}{1-S^2} . \qquad (14)$$

В выражениях интегралов (14) существенным есть то, что S меньший по модулю корень уравнения (13). Для большего по модулю корня данные выражения модифицируются путем замены S на обратную величину.

Подставив выражения интегралов (14) в (11), остаточно находим:

$$P_0 = P\frac{S}{1-S}\left[(1+S)\widetilde{d} + 2\widetilde{c}\right],$$

$$P_n = P\frac{S^n}{1-S}\left[\left(1+S^2\right)\widetilde{d} + 2S\widetilde{c}\right], n = 1,2,\ldots \quad (15)$$

На основе несложных, но громоздких алгебраических преобразований можно показать, что (15) совпадают с ранее установленными выражениями для амплитуд реакций в шарнирах в работе [21]:

$$P_0 = -M_0 p\left[\frac{\cos(pa) - S}{2\sin(pa)} + \frac{ch(pa) - S}{2sh(pa)} + \right.$$

$$\left. + \frac{\alpha\cos\frac{pa}{2} + \alpha ch\frac{pa}{2} + \sin\frac{pa}{2} + sh\frac{pa}{2}}{ch\frac{pa}{2} - \cos\frac{pa}{2}}\right],$$

$$P_n = 2M_0 pS^n\frac{\cos(pa) - ch(pa)}{sh(pa) - \sin(pa)} , \quad n = 1,2,3\ldots$$

где:

$$M_0 = \frac{P}{2p} \frac{ch\frac{pa}{2} - \cos\frac{pa}{2}}{2\alpha ch\frac{pa}{2}\cos\frac{pa}{2} + ch\frac{pa}{2}\sin\frac{pa}{2} + sh\frac{pa}{2} + \cos\frac{pa}{2}},$$

$$\alpha = \frac{1}{2}\left[\frac{S - \cos(pa)}{\sin(pa)} + \frac{ch(pa) - S}{sh(pa)}\right].$$

Таким образом, получили решение в виде квазипериодической волны без использования теории Флоке. Использованный метод плотно связан с теорией граничных задач функций комплексной переменной [18]. Учитывая хорошо обоснованные результаты этой теории, можно утверждать, что (15) есть единственным ограниченным решением бесконечной СЛАУ (3). С последнего следует, что поле прогибов, полученное на основании теории Флоке в работе [21], есть единственным ограниченным на бесконечности решением поставленной задачи.

Был рассмотрен интересный, но частный случай внешней нагрузки, наделенный конкретными свойствами симметрии по отношению к самой балке. Может возникнуть допущение, что квазипериодичность соответственного решения благодаря именно этому обстоятельству. Для того, чтобы развеять подобные сомнения, рассмотрим бесконечную периодично шарнирно закрепленную балку, нагруженную сосредоточенной силой амплитудой P в произвольном сечении пролета $\xi \in [-a/2, a/2]$, средина которого совпадает с началом отсчета оси x.

Проведя аналогичные к предыдущим выкладки, найдем соответственные реакции опор:

$$P_n = \frac{2PS1}{\pi}\int_0^{\pi}\left\{\cos n\varphi \frac{\tilde{c}^+ + \tilde{d}^+ \cos\varphi}{1 - 2S\cos\varphi + S^2} + \right.$$

$$\left. + \cos(n+1)\varphi \frac{\tilde{c}^- + \tilde{d}^- \cos\varphi}{1 - 2S\cos\varphi + S^2}\right\}d\varphi, \qquad (16)$$

где введены обозначения:

$$\tilde{c}^{\pm} = -\frac{sh(pa/2 \pm \xi)\cos(pa) - ch(pa)\sin(pa/2 \pm \xi)}{sh(pa) - \sin(pa)},$$

$$\tilde{d}^{\pm} = \frac{sh(pa/2 \pm \xi) - \sin(pa/2 \pm \xi)}{sh(pa) - \sin(pa)}. \qquad (17)$$

После взятия интеграла (16) получаем:

$$P_n = P\frac{S^{-(n+1)}}{1 - S^2}\left[\left(1 + S^2\right)\left(\tilde{d}^- + S\tilde{d}^+\right) + 2S\left(\tilde{c}^- + S\tilde{c}^+\right)\right],$$

$$n < -1,$$

$$P_{-1} = P\frac{S}{1 - S^2}\left[\left(1 + S^2\right)\tilde{d}^+ + 2S\left(\tilde{d}^- + S\tilde{c}^+\right) + 2\tilde{c}^-\right], \qquad (18)$$

$$P_0 = P\frac{S}{1 - S^2}\left[\left(1 + S^2\right)\tilde{d}^- + 2S\left(\tilde{d}^+ + S\tilde{c}^-\right) + 2\tilde{c}^+\right]$$

$$P_n = P\frac{S^n}{1 - S^2}\left[\left(1 + S^2\right)\left(\tilde{d}^+ + S\tilde{d}^-\right) + 2S\left(\tilde{c}^+ + S\tilde{c}^-\right)\right], \; n > 0.$$

Амплитудную функцию прогибов, которая соответствует (18), можно использовать, как функцию влияния, для получения решения задачи о балке, нагруженной произвольной распределенной нагрузкой q на пролете $[-a/2, a/2]$.

ВЫВОД

Если интервал нагрузки распространяется на нескольких пролетах, тогда для получения решения необходимо воспользоваться принципом суперпозиции, разбив нагрузку на составляющие за пролетами. Общий характер решения при этом очевидно сохранится: сразу за последним нагруженным пролетом поле прогибов можно будет представить в виде квазипериодической волны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Golovach I., Bulgakov V., Finko S. 2003: Yeksperimentalni doslidzhennya yenergetichnikh pokaznikiv vibratsiynogo vikopuyuchogo robochogo organu // IV Internatioal Research and Techical Conference, MOTROL – Vol. 6. – 32 – 40.
2. Brillyuen L., Parodi M. 1959: Rasprostraneniye voln v periodicheskikh strukturakh: Per. s angl. – M. – 457.
3. Alam N., Asani N.T. 1984: Vibration and damping analysis of multiplayered rectangular plate with constrained viscoelastic layers // J. Sound and Vibr. – Vol. 97, N4. – 597 – 614.
4. Doyle J.F. 1997: Wave propagation in structures // Springer-Verlag.
5. Langley R.S. 1994: On the modal density and energy flow characteristics of periodic structures // J. Sound and Vibr. – Vol. 172, N4. – 491 – 511.
6. Lin Y.K. 1976: Random vibration of periodic and almost periodic structures // J. in Mechanics Today. – Vol. 3. – 93 – 124.
7. Lust S.D., Friedmann P.P., Bendiksen O.O. 1985: Free and forced response of multispan

beams and multibay trusses with localized modes // J. Sound and Vibr. – Vol. 180. – 313 – 332.
8. Mead D.J. 1996: Wave propagation in continuous periodic structures: research contributions from Southampton, 1964–1995// J. Sound and Vibr. – Vol. 190, N3. – 495 – 524.
9. Miles J.W. 1956: Vibrations of beams on many supports // Pros. Am. Soc. Civil Eng. – Vol. 82, N1. – 1 – 9.
10. Ouyang H.J., Williams F.W., Kennedy D. 1994: A general method for an alyzing wave propagation along longitudinally periodic structures // J. Sound and Vibr. – Vol. 177, N2. – 277-281.
11. Zhu D.C. 1993: The mutual varialional principle of free wave propagationin periodic siructures // Acta Mechanica Sinica. – Vol. 9, N2. – 149 – 155.
12. Banerjee J.R., Su H. 2004: Development of a dynamic stiffness matrix for free vibration analysis of spinning beams // Computers and Structures.. – Vol. 82. – 2189 – 2197.
13. Duhamel D., Mace B.R., Brennan M.J. 2006: Finite element analysis of the vibration of waveguides and periodic structures // J. Sound and Vibr. – Vol. 294, N5. – 205 – 220.
14. Lee J., Thompson D.J. 2001: Dynamic stiffness formulation, free vibration and wave motion of helical springs // J. Sound and Vibr. – Vol. 239. – 297 – 320.
15. Mencik J.M., Ichchou M.N. 2007: Wave finite elements in guided elastodynamics with internal fluid // Inter. J. of Sol. And Structures. – Vol. 44. – 2148 – 2167.
16. Wang D., Zhou C., Rong J. 2003: Free and forced vibration of repetitive structures // Inter. J. of Solids and Structure. –. Vol. 40. – 5477 – 5494.
17. Brychkov Yu.A., Prudnikov A.P., Marichev O.A. 1981: Integraly i ryady.: V Zt. – M.: Nauka, t. 1.: Elementarnyye funktsii. – 800.
18. Gakhov F.D., Cherskiy Yu.I. 1978: Uravneniya tipa svertki. – M.: Nauka. – 296.
19. Gradshteyn M.S., Ryzhik I.M. 1962: Tablitsy integralov, summ, ryadov i proizvedeniy. – M: Fizmatgiz. – 1100.
20. Dech G. 1971: Rukovodstvo k prakticheskomu primeneniyu preobrzovaniya Laplasa i Z-preobrazovaniya. – M.: Nauka. – 288.
21. Kutsenko A.G. 1997: Poshirennya khvil v balkakh, zakriplenikh periodichnim chinom // Visnik Kievskogo universitetu. Ser. fiz.-mat. nauk., N3. – 69 – 76.

ABOUT FORCED VIBRATION OF PERIODICALLY ONE-DIMENSIONAL WAVE GUIDE

Summary. In the present paper wave propagation through under one-dimensional engineering systems which simple periodically supported is investigated. As examples, two problems of simple periodically supported beams with various forced conditions is considered. For every type of forced conditions quasi-periodic solutions has been obtained, what made it possible to used Floquet´s principle of corresponding problems.

Key words: periodic structure, beam, wave, pass-band, Floquet´s principle.