АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ РАБОЧЕГО ПРОЦЕССА ЭРЛИФТА С РАЗВИТОЙ СНАРЯДНОЙ СТРУКТУРОЙ ВОДОВОЗДУШНОГО ПОТОКА

Анатолий Кононенко, Геннадий Улитин, Валерий Калиниченко

ГВУЗ «Донецкий национальный технический университет»
Адрес: 83001, Украина, г. Донецк, ул. Артема, 58
e-mail: ap.kononenko@ukr.net

Аннотация. Приведено аналитическое решение математической модели рабочего процесса эрлифта с развитой снарядной структурой водовоздушного потока, позволяющее теоретически установить влияние длины жидкостных пробок, газовых снарядов и других значимых факторов на режимы и энергетическую эффективность работы газожидкостного подъемника.

Ключевые слова: математическая модель, эрлифт, подъемная труба, снарядная структура, подача, расход воздуха, энергоэффективность, длина газового снаряда, длина жидкостной пробки.

ВВЕДЕНИЕ

Теоретическое обоснование возможных способов повышения энергетической эффективности работы гидравлических машин и аппаратов, к которым относятся и эрлифты, основывается на математических моделях их рабочих процессов, базирующихся, как правило, на дифференциальных уравнениях сохранения массы и количества движения. Во многих случаях такие математические модели могут быть решены только численными методами, имеющими известные недостатки и ограничения. Поэтому разработка метода аналитического решения математической модели рабочего процесса эрлифта с развитой снарядной структурой водовоздушного потока является актуальной научной задачей, имеющей существенное практическое приложение.

АНАЛИЗ ПУБЛИКАЦИЙ

Моделирование рабочих процессов эрлифтов со снарядной структурой водовоздушного потока наиболее востребовано ввиду либо наиболее высокой энергоэффективности таких подъемников в общепромышленных условиях [1÷4], либо однозначности их работы с такой структурой многофазной смеси в условиях глубоководных или скважинных подъемов [5÷8].

Снарядную структуру вертикального восходящего водовоздушного потока разделяют на развитую и развивающуюся, первая из которых характеризуется упорядоченностью периодического движения сформировавшихся газовых снарядов и жидкостных пробок, а вторая – движением все еще визуально различимых снарядов и пробок, но потерявших строгую геометрическую форму с возможностью взаимного слияния и деления [9÷13]. Развивающаяся структура в сравнении с развитой характеризуется уменьшением длины жидкостных пробок и увеличением длины газовых снарядов с повышением их относительной скорости, что при работе эрлифта приводит к снижению подачи, уменьшению истинного газосодержания, увеличению потерь на скольжение фаз и, в общем итоге, снижению энергоэффективности работы гидроаппарата [2÷3].

Для выявления влияния длин жидкостных пробок и газовых снарядов и их соотношений в вертикальной подъемной трубе на энергоэффективность работы газожидкостного подъемника разработана, с принятыми допущениями, математическая модель рабочего процесса эрлифта с развитой снарядной структурой водовоздушного потока и выполнено ее численное решение [3]. Углубление использования разработанной математической модели с целью изучения и установления способов повышения эффективности работы эрлифта возможно при ее аналитическом решении.

Исходя из изложенного необходимо выполнить аналитическое решение математической модели рабочего процесса эрлифта с развитой снарядной структурой водовоздушного потока, позволяющей учитывать влияние длины газовых снарядов и жидкостных пробок и их соотношений на режимы работы газожидкостного подъемника.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И АНАЛИЗ

Исходное, численно решаемое в [3], уравнение движения для i – ой пробки воды в вертикальной подъемной трубе эрлифта имеет вид

$$m'\frac{dw'(z)}{dt}= \\ = F_p(z)-F'_g-F'_\tau(z)-F'_{g\,(n-i)}(z), \qquad (1)$$

где $m'=\rho'\omega L_s$ – масса каждой из i-ых пробок воды; ρ' – плотность воды; $\omega=\pi D^2/4$ – площадь поперечного сечения подъемной трубы; D – диаметр подъемной трубы; L_s – длина пробки воды; $w'(z)$ – скорость i-ой пробки воды в сечении подъемной трубы с вертикальной координатой z; t – время; $F_p(z)=p_{см}[1-z/(H+h)]\omega$ – сила давления; $p_{см} = \rho' gh$ – избыточное давление в смесителе; H – высота подъема эрлифта; h – геометрическое погружение смесителя; $F'_g = m'g$ – вес пробки воды; g – ускорение свободного падения; $F'_\tau(z) = \tau'_w(z)\pi D \sum L_s(z)$ – сумма сил трения i-ой и выше находящихся пробок воды о стенки подъемной трубы; $\tau'_w(z) = \lambda' \rho' [w'(z)]^2 / 8$ – касательное напряжение; $\lambda' = 0{,}11(\Delta_э / D)^{0,25}$ – коэффициент гидравлического трения (формула Шифринсона); $\Sigma L_s(z) = (H + h - z)[1 - \varphi_{cp}(z)]$ – часть длины подъемной трубы выше сечения z, занятая жидкостными пробками; $\varphi_{cp}(z)$ – среднее объемное истинное газосодержание водовоздушного потока на участке подъемной трубы длиной (H+h - z); $F'_{g\,(n-i)}(z) = m'gn[1 - z/(H + h)]$ – вес верхних $(n - i)$ пробок воды; n – общее число пробок воды в подъемной трубе.

Число n жидкостных пробок в подъемной трубы определяется исходя из условия $(H + h)_{расч} \le H + h$ [3], где расчетная длина подъемной трубы

$$(H + h)_{расч} = L_s n + L_{b1} + \sum_{i=2}^{n} L_{bi} ,$$

здесь L_{b1} и L_{bi} – длина 1-го (на входе в подъемную трубу) и i-го газового снаряда соответственно.

Аналитическое решение математической модели (1) рабочего процесса эрлифта с развитой снарядной структурой водовоздушного потока может быть получено при условии использования в уравнении для определения части длины подъемной трубы выше сечения z, занятой жидкостными пробками, $\sum L_s(z)$, допущения равенства среднего газосодержания водовоздушной смеси на участке трубы ($H + h - z$), обозначаемого $\varphi_{cp}(z)$, среднему газосодержанию в подъемной трубе $\overline{\varphi}$, то есть $\varphi_{cp}(z) = \overline{\varphi}$. Тогда это уравнение примет вид

$$\Sigma L_s(z) = (H + h - z)(1 - \overline{\varphi}).$$

Исходя из данного допущения, среднее объемное истинное газосодержание водовоздушного потока $\overline{\varphi}$ на рассматриваемом участке подъемной трубы не зависит от координаты z.

С учетом принятого допущения сумму сил трения i-ой и выше находящихся жидкостных пробок о стенки подъемной трубы [3] возможно представить в виде

$$F'_\tau(z) = 0{,}11\left(\frac{\Delta_э}{D}\right)^{0,25} \frac{\rho'[w'(z)]^2}{8}\pi D \times$$
$$\times (H + h - z)(1 - \overline{\varphi}) = A[w'(z)]^2 (H + h - z),$$

где

$$A = 0{,}11\left(\frac{\Delta_э}{D}\right)^{0,25} \frac{\rho' \pi D}{8}(1 - \overline{\varphi}),$$

а уравнение (1) после подстановки значений внешних сил и несложных преобразований – в виде

$$m'\frac{dw'(z)}{dt} = p_{см}\left(1 - \frac{z}{H + h}\right)\omega - m'g - $$
$$- A[w'(z)]^2 (H + h - z) - m'gn\left(1 - \frac{z}{H + h}\right). \tag{2}$$

Переходя к дифференцированию по z, получаем

$$\frac{dw'(z)}{dt} = \frac{dw'(z)}{dz}\frac{dz}{dt} = \frac{d[w'(z)]^2}{2dz} ,$$

что позволяет преобразовать (2) к виду

$$\frac{d[w'(z)]^2}{dz} = \frac{2p_{см}}{m'}\left(1 - \frac{z}{H + h}\right)\omega - 2g - $$
$$- \frac{2A}{m'}[w'(z)]^2 (H + h - z) - 2gn\left(1 - \frac{z}{H + h}\right). \tag{3}$$

После алгебраических преобразований уравнение (3) возможно записать следующим образом

$$\frac{d[w'(z)]^2}{dz} = 2\left[\frac{p_{см}\omega}{m'} - g(1 + n)\right] + $$
$$+ \left(gn - \frac{p_{см}\omega}{m'}\right) \times \frac{2z}{H + h} - \tag{4}$$
$$- \frac{2A(H + h)}{m'}[w'(z)]^2 + \frac{2A}{m'}[w'(z)]^2 z.$$

Обозначив

$$B = 2\left[\frac{p_{см}\omega}{m'} - g(1 + n)\right];\ C = \left(gn - \frac{p_{см}\omega}{m'}\right)\frac{2}{H + h};$$
$$D = \frac{2A'(H + h)}{m'};\ \ E = \frac{2A}{m'},\ \ [w'(z)]^2 \equiv W(z),$$

представим (4) в виде

$$\frac{dW(z)}{dz} = B + Cz - DW(z) + EW(z)z ,$$

или

$$\frac{dW(z)}{dz} + (D - Ez)W(z) = B + Cz . \tag{5}$$

Выполним замену в (5)

$$D - Ez = \xi ,$$

откуда

$$z = \frac{D - \xi}{E} ,$$

и тогда

$$\frac{d\xi}{dz} = -E .$$

Выразим

$$\frac{dW(z)}{dz} = \frac{dW(z)}{d\xi}\frac{d\xi}{dz} = -E\frac{dW(z)}{d\xi} .$$

Тогда (5) можно записать

$$-E\frac{dW(z)}{d\xi} + \xi W(z) = B + C\frac{D-\xi}{E} ,$$

или

$$\frac{dW(z)}{d\xi} - \frac{\xi}{E}W(z) = -\frac{B}{E} - \frac{CD}{E^2} + \frac{C}{E^2}\xi . \qquad (6)$$

Обозначим

$$a = -\frac{B}{E} - \frac{CD}{E^2}$$

и (6) преобразуем к виду

$$\frac{dW(z)}{d\xi} - \frac{\xi}{E}W(z) = a + \frac{C}{E^2}\xi . \qquad (7)$$

Примем $W(z) = u\upsilon$ и преобразуем (7)

$$u'_{\xi}\upsilon + u\upsilon'_{\xi} - \frac{\xi}{E}u\upsilon = a + \frac{C}{E^2}\xi ,$$

или

$$u'_{\xi}\upsilon + u\left(\upsilon'_{\xi} - \frac{\xi}{E}\upsilon\right) = a + \frac{C}{E^2}\xi . \qquad (8)$$

Из (8)

$$\frac{d\upsilon}{d\xi} = \frac{\xi}{E}\upsilon . \qquad (9)$$

Тогда из (9)

$$\frac{d\upsilon}{\upsilon} = \frac{\xi}{E}d\xi \text{ и } \ln\upsilon = \frac{\xi^2}{2E} ,$$

откуда

$$\upsilon = e^{\frac{\xi^2}{2E}} . \qquad (10)$$

С учетом (10) выражение (8) примет вид

$$u'_{\xi}e^{\frac{\xi^2}{2E}} = a + \frac{C}{E^2}\xi \text{, или}$$

$$u'_{\xi} = e^{-\frac{\xi^2}{2E}}\left(a + \frac{C}{E^2}\xi\right).$$

Воспользуемся начальными условиями $W(0) = W_0$; так как $W(\xi)$, то $W(D) = W_0$.

Тогда

$$u(\xi) = a\int_D^{\xi} e^{-\frac{\xi^2}{2E}}d\xi + \frac{C}{E^2}\int_D^{\xi}\xi e^{-\frac{\xi^2}{2E}}d\xi + \overline{C} , \qquad (11)$$

где $\overline{C} = const$ – определяется из условия $W(D) = W_0$.

Из условия $W = u\upsilon$ с учетом (11) получаем

$$W = u\upsilon = ae^{\frac{\xi^2}{2E}}\int_D^{\xi} e^{-\frac{\xi^2}{2E}}d\xi - \frac{C}{E} + \overline{C}e^{\frac{\xi^2}{2E}} + \frac{C}{E}e^{\frac{\xi^2}{2E}}e^{-\frac{D^2}{2E}} . \qquad (12)$$

Выражение (12) получено с учетом

$$\int_D^{\xi}\xi e^{-\frac{\xi^2}{2E}}d\xi = -Ee^{-\frac{\xi^2}{2E}}\Bigg|_D^{\xi} .$$

Определим $\overline{C}$, подставив в (12) $\xi = D$

$$W_0 = \overline{C}e^{\frac{D^2}{2E}} ,$$

откуда

$$\overline{C} = W_0 e^{-\frac{D^2}{2E}} .$$

С учетом приведенного выражение (12) примет вид

$$W = ae^{\frac{\xi^2}{2E}}\int_D^{\xi} e^{-\frac{\xi^2}{2E}}d\xi + \frac{C}{E}\left(e^{\frac{\xi^2-D^2}{2E}} - 1\right) + W_0 e^{\frac{\xi^2-D^2}{2E}} . \qquad (13)$$

Введем функцию Лапласа

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz$$

и выразим (13) следующим образом

$$W(\xi) = a\sqrt{2\pi E}e^{\frac{\xi^2}{2\cdot E}}\left[\Phi\left(\frac{\xi}{\sqrt{E}}\right) - \Phi\left(\frac{D}{\sqrt{E}}\right)\right] + \frac{C}{E}\left(e^{\frac{\xi^2-D^2}{2E}} - 1\right) + W_0 e^{\frac{\xi^2-D^2}{2E}} , \qquad (14)$$

где $\xi = D - Ez$, $a = -\frac{B}{E} - \frac{CD}{E^2}$.

Функция Лапласа [14]

$$\int_D^{\xi} e^{-\frac{\xi^2}{2E}}d\xi = \sqrt{2\pi}\frac{\sqrt{E}}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{D}{\sqrt{E}}}^{\frac{\xi}{\sqrt{E}}} e^{-\frac{z^2}{2}}dz =$$

$$= \sqrt{2\pi E}\left[\Phi\left(\frac{\xi}{\sqrt{E}}\right) - \Phi\left(\frac{D}{\sqrt{E}}\right)\right],$$

где $\frac{\xi}{\sqrt{E}} = z, \quad d\xi = \sqrt{E}dz$.

Так как $W(z) \equiv [w'(z)]^2$, то уравнение (14) выражает зависимость скорости жидкостной пробки $w'(z)$ в заданном сечении z подъемной трубы от значащих факторов, что позволяет выполнить аналитические исследования, в том числе, влияния длин жидкостных пробок L_s и газовых снарядов L_b на энергоэффективность работы эрлифта.

ВЫВОДЫ

Приведено аналитическое решение математической модели рабочего процесса эрлифта с развитой снарядной структурой водовоздушного потока, позволяющее теоретически установить влияние значимых параметров на энергетическую эффективность работы газожидкостного подъемника. Анализ аналитического решения математической модели необходимо выполнить для значимых параметров, характеризующих общепромышленные эрлифты.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кононенко А., 2006.: Модель рабочего процесса эрлифта со снарядной структурой водовоздушного потока // Промислова гідравліка і пневматика. - №1, 34-37.
2. Кононенко А., Калиниченко В., 2013.: Модель рабочего процесса эрлифта с учетом структуры газожидкостных образований снарядного водовоздушного потока // Вісник НТУ «ХПІ». - №5 (979), 110-118.
3. Кононенко А., Калиниченко В., 2013.: Математическая модель рабочего процесса эрлифта с развитой снарядной структурой водовоздушного потока // Наукові праці ДНТУ. Серія гірничо-електромеханічна. - №2 (26), 151-163.
4. Кононенко А., Карпушин М., 2010. Рабочий режим и особенности формирования подачи эрлифта в условиях переменных притоков гидросмесей (жидкостей) // MOTROL. - №12, 300-308.
5. Кириченко Е., Евтеев В., Романюков А., 2007.: Исследование параметров снарядной структуры течения в подъемной трубе глубоководного эрлифта // Науковий вісник НГУ.– № 9, 66–72.
6. Кириченко Е., Гоман О., Кириченко В., Романюков А., 2012.: Моделирование динамических процессов в глубоководных пневмогидротранспортных системах. – Днепропетровск: НГУ. – 268.
7. Кириченко Е., Кириченко В., Евтеев В., 2013.: Теория и алгоритмы расчета снарядного течения в эрлифте. – Днепропетровск: НГУ. – 263.
8. Red'ko A., Kononenko A., Bugai V., 2009. Energy efficiency of geotermal circulating systems of the heat supply // MOTROL. - №11A, 64-69.
9. Уоллис Г., 1972.: Одномерные двухфазные течения. - М.: Мир. - 440.
10. Мойссис, Гриффитс., 1962.: Влияние входных условий на снарядный режим течения двухфазной смеси // Труды американского общества инж.-мех., серия С. Теплопередача. - том 84, №1, 38-51.
11. Мойссис., 1963.: Переход от снарядного к эмульсионному режиму течения двухфазной среды // Труды американского общества инж.-мех., серия С. Теплопередача. - том 85, № 4, 93 – 98.
12. Субботин В., Похвалов Ю., Михайлов Л., Кронин И., Леонов В., 1976.: Временные и структурные характеристики газожидкостного потока при снарядном течении // Теплоэнергетика. – №1, 67-70.
13. Нездойминов В., Рожков В., Григоренко Н., Заворотный Д., 2012. Математическое описание газожидкостной структуры потока в системе транспортирования жидкости под вакуумом // MOTROL. – Vol. 15, №6, 125-132.
14. Корн Г., Корн Т., 1978.: Справочник по математике. - М.: Наука. – 832.

ANALYTICAL SOLUTION OF THE MATHEMATICAL MODEL OF OPERATING PROCESS OF THE AIRLIFT WITH THE DEVELOPED PROJECTILE STRUCTURE OF THE WATER-AIR STREAM

Summary. The analytical solution of the mathematical model of operating process of the airlift is worked out with the developed projectile structure of the water-air stream. It allows to theoretically establish the effect of length of liquid corks, gas projectiles and other meaningful factors on the modes and the energy efficiency of the gas-liquid lift.

Key words: mathematical model, airlift, lift pipe, projectile structure, serve, expense of air, energy efficiency, length of the gas projectile, length of the liquid corks.