

STANISŁAW ORZEŁ, PIOTR POGODA, WOJCIECH OCHAŁ

Ocena przydatności wybranych funkcji do modelowania rozkładu pierśnic w drzewostanach olszy czarnej (*Alnus glutinosa* (L.) Gaertn.)*

Evaluation of usefulness of selected functions for modeling distribution of breast height diameter in black alder stands (*Alnus glutinosa* (L.) Gaertn.)

ABSTRACT

Orzeł S., Pogoda P., Ochał W. 2017. Ocena przydatności wybranych funkcji do modelowania rozkładu pierśnic w drzewostanach olszy czarnej (*Alnus glutinosa* (L.) Gaertn.). Sylwan 161 (2): 101-113.

We evaluated the usefulness of ten theoretical probability density functions for the approximation of the breast height diameter distributions in managed alder stands growing in the western part of the Sandomierz Basin (southern Poland). The study material consisted of measurement results for 22,530 alders obtained for 844 circular sample plots, established in 163 stands aged 6-89. In the area of particular stands, from 2 to 10 age-dependent circular sample plots sized 0.01-0.10 ha were systematically arranged. We evaluated the following theoretical probability distributions: normal (N), double normal (P-N), Johnson S_B (J), Weibull (W), beta (B), Burr (Bu), gamma (G), log-normal (L-N), log-logistic (L-L) and Birnbaum-Saunders (B-S). Additionally the usefulness of the W, B, Bu, G, L-N, L-L and B-S distributions with omitted location parameter was tested. The goodness-of-fit of each probability density function was assessed based on the Kolmogorov-Smirnov statistic, the root mean square error and ranks established on their basis. It was found that DBH distribution of majority stands is characterized by right-sided asymmetry and negative kurtosis. It was showed that the best distribution for the breast height diameter structure approximation of alder stands is the Johnson S_B (J) distribution. To describe the frequency of thickness, normal (N) and log-logistic (L-L) distribution should not be used. Elimination of location parameter significantly affects usefulness of probability density functions to modeling empirical distributions of breast height diameter. Gamma and Burr distributions with omitted location parameter gave the best results in description the frequency of breast height diameter. In certain situations, these distributions can also be used to describe the structure of breast height diameter of alder stands.

KEY WORDS

diameter at breast height, diameter distribution, probability density function, Kolmogorov-Smirnov test

ADDRESSES

Stanisław Orzeł – e-mail: s.orzel@ur.krakow.pl
 Piotr Pogoda – e-mail: piotr.pogoda@krakow.lasy.gov.pl
 Wojciech Ochał – e-mail: rlochal@cyf-kr.edu.pl

Zakład Biometrii i Produkcji Lasu, Uniwersytet Rolniczy w Krakowie; al. 29 Listopada 46, 31-425 Kraków

*Badania wykonano w ramach tematu DS/ZBiPL/2016. W pracy wykorzystano materiał empiryczny zebrany w projekcie N N309 160638 finansowanym przez Narodowe Centrum Nauki w latach 2010-2012.

Wstęp

Podstawową cechą biometryczną drzewa jest pierśnica, czyli grubość pnia mierzona na wysokości 1,3 m od najwyższego punktu przy powierzchni gruntu. Możliwość bezpośredniego i nieskomplikowanego pomiaru, a także silny związek z innymi cechami biometrycznymi drzewa sprawiają, że pierśnica jest stosowana jako zmienna niezależna w modelach służących do określenia miąższości [Schumacher, Hall 1933; Spurr 1952 za Diéguez-Aranda i in. 2006], biomasy [Zianis i in. 2005], wysokości [Bruchwald i in. 2001; Orzeł i in. 2014], długości koron [Hasenauer, Monserud 1996; Rédei, Veperdi 2001] oraz grubości kory drzew [Bruchwald 1971].

Zbiór pierśnic drzew scharakteryzowany przy użyciu statystycznych miar tendencji centralnej i dyspersji dostarcza cennych informacji o strukturze drzewostanu [von Gadow i in. 2012], jego różnorodności [Buongiorno i in. 1994] i fazie rozwoju [Cajanus 1914 za Siipilehto 2011]. Rzeczywisty rozkład pierśnic umożliwia określenie struktury sortymentowej surowca drzewnego oraz planowanie intensywności i częstości wykonywania zabiegów hodowlanych [Siipilehto 2011]. Ponadto odgrywa istotną rolę przy ocenie zasobów biomasy zgromadzonych w zbiorowiskach leśnych oraz ilości sekwestrowanego w niej węgla.

W zagadnieniach związanych z planowaniem oraz prognozowaniem rozwoju zasobów leśnych wykorzystywane są informatyczne systemy wspomagania decyzji, których fundamentalną część stanowią modele struktury pierśnic. Model odwzorowujący możliwie dokładnie strukturę grubości drzewostanu może wydatnie wspierać działania kadr odpowiedzialnych za zarządzanie zasobami leśnymi [Nanos, Montero 2002; Siipilehto 2011; Ige i in. 2013]. Umożliwia określenie efektów podejmowanych decyzji dotyczących wyboru wieku rębności i pierśnicy docelowej, jak i prognozowanie wielkości zasobów leśnych uwzględniające zmieniające się warunki wzrostu (np. ocieplenie klimatu) oraz różne sposoby postępowania hodowlanego. Wybór właściwego modelu opisu struktury pierśnic stanowi także zasadniczy etap prac związanych z budową tablic zasobności oraz modeli wzrostu drzewostanu [Nagel, Biging 1995].

Za prekursora matematycznego opisu struktury grubości drzewostanu uważany jest francuski leśnik Francois de Liocourt [Meyer, Stevenson 1943 za Bailey, Dell 1973], który już w 1898 roku wykazał na podstawie obserwacji przeprowadzonych w różnowiekowych drzewostanach jodłowych, że liczba drzew w kolejnych stopniach grubości zmniejsza się zgodnie z postępowaniem geometrycznym. Zaproponowana przez Liocourta funkcja została zastosowana do opisu rozkładu pierśnic w drzewostanach różnowiekowych [Meyer 1952; Schmelz, Lindsey 1965; Leak 1965 za Bailey, Dell 1973].

Literatura dotycząca zastosowania różnych funkcji do modelowania struktury pierśnic jest dość obszerna. Meyer [1930] do opisu frekwencji pierśnic zastosował szeregi Grama-Charliera, Schnur [1934] krzywe Pearsona, zaś Osborne i Schumacher [1935] oraz Nelson [1964] krzywą wzrostu Pearl-Reeda [Bailey, Dell 1973]. Wiele miejsca poświęcono także możliwości wykorzystania podstawowych rozkładów prawdopodobieństwa: normalnego [Meixner 1964; Orzeł, Rutkowska 2000; Rymer-Dudzińska, Dudzińska 2001; Jagiełło i in. 2016], S_B Johnsona [Hafley, Schreuder 1977; Khongor i in. 2011], beta [Prodan 1953 za Bailey, Dell 1973], gamma [Nelson 1964 za Bailey, Dell 1973], logarytmicznie normalnego [Bliss, Reineker 1964 za Bailey, Dell 1973] i Weibulla [Bailey, Dell 1973; Burk, Newberry 1984; Rennolls i in. 1985; Amateis i in. 1986; Merganič, Sterba 2006]. Do tej grupy funkcji zaliczyć należy także rozkład podwójnie normalny zaproponowany przez niemieckiego psychofizyka Gustava Theodora Fechnera [Wallis 2014], zastosowany w drzewostanach sosnowych przez Bruchwalda [1988]. Binoti i in. [2015]

zweryfikowali przydatność funkcji logarytmicznie logistycznej, a dzięki badaniom Lindsaya i in. [1996] oraz Gove'a i in. [2008] katalog teoretycznych funkcji gęstości prawdopodobieństwa został poszerzony o rozkład Burra. Wyniki prac Podlaskiego [2008] oraz Leivy i in. [2012] wskazują na szerokie możliwości zastosowania rozkładu Birnbauma-Saundersa, który nadaje się do modelowania frekwencji pierśnic zarówno w drzewostanach o charakterze zbliżonym do pierwotnego, jak i na plantacjach. Badania przeprowadzone w Mongolii [Tsogot i in. 2013] oraz Iranie [Fallahchai, Shokri 2014] potwierdziły przydatność rozkładu Daguma do aproksymacji rozkładów pierśnic w drzewostanach równowiekowych. W przypadku drzewostanów dwugeneracyjnych dobre rezultaty modelowania struktury grubości uzyskuje się, stosując rozkłady mieszane [Podlaski 2011a, b; Podlaski, Roesch 2013a, b, 2014a, b].

W badaniach krajowych oceniono dotychczas przydatność wybranych teoretycznych funkcji gęstości prawdopodobieństwa do modelowania struktury pierśnic w drzewostanach: sosnowych [Orzeł 1985; Siekierski 1992; Orzeł, Rutkowska 2000; Zasada 2003; Zasada, Cieszewski 2005; Ochał i in. 2010], świerkowych [Siekierski 1992; Karczmarski 2005], jodłowych [Zasada 1995], bukowych [Rymer-Dudzińska, Dudzińska 1999, 2001; Jagiełło i in. 2016], brzoźowych [Zasada 2000, 2013b], dębowych [Magnuszewski, Tomusiak 2011] oraz mieszanych o złożonej budowie pionowej [Podlaski 2006; Podlaski, Zasada 2008; Jaworski, Podlaski 2012; Podlaski, Roesch 2013a, b].

W dostępnym piśmiennictwie krajowym i europejskim brak jest obecnie analiz poświęconych ocenie przydatności teoretycznych rozkładów prawdopodobieństwa do aproksymacji struktury grubości drzewostanów olszy czarnej (*Alnus glutinosa* (L.) Gaertn.), która jest w Polsce ważnym gatunkiem lasotwórczym. Drzewostany z jej dominującym udziałem zajmują około 5,5% powierzchni leśnej naszego kraju, ich udział w zasobach drzewnych na pniu wynosi 5,3%, przeciętny wiek 48 lat, a zasobność 258 m³/ha [Leśnictwo 2015].

Celem pracy była ocena przydatności wybranych na podstawie przeglądu literatury teoretycznych funkcji gęstości prawdopodobieństwa do aproksymacji rozkładów pierśnic w gospodarczych drzewostanach olszowych wznoszących w zachodniej części Kotliny Sandomierskiej.

Materiał i metody

Materiał badawczy stanowiły wyniki pomiaru pierśnic 22 530 olsz rosnących na 844 powierzchniach kołowych założonych w 163 równowiekowych drzewostanach olszy czarnej powstałych z odnowienia sztucznego. Ich wiek zawierał się w przedziale od 6 do 89 lat (tab. 1). Wybrane drzewostany położone były na terenie nadleśnictw: Niepołomice (59), Głogów (23), Leżajsk (22), Tuszyna (16), Nowa Dęba (12), Kolbuszowa (11), Mielec (10) oraz Dąbrowa Tarnowska (10) i wznosiły się na siedliskach: boru mieszanego wilgotnego (BMw), lasu mieszanego świeżego (LMśw), lasu mieszanego wilgotnego (LMw), lasu świeżego (Lśw), lasu wilgotnego (Lw), lasu łąkowego (Lł), olsu jesionowego (Olj) oraz olsu (Ol). W każdym drzewostanie założono od 2 do 10 powierzchni kołowych równomiernie rozmieszczonych na jego obszarze. Ich wielkość (od 0,01 do 0,10 ha) zależała od wieku drzewostanu. Empiryczne rozkłady pierśnic powstały z połączenia wszystkich olsz pomierzonych w drzewostanie. Jednorodność struktury grubości równowiekowych monokultur, jakimi są analizowane drzewostany, w pełni uzasadnia słuszność tworzenia empirycznych rozkładów pierśnic przez połączenie olsz pomierzonych na założonych w nich powierzchniach kołowych. Dla każdego z tak powstałych 163 rozkładów empirycznych przeprowadzono analizę przydatności 10 rozkładów prawdopodobieństwa stosowanych przez różnych autorów do opisu struktury pierśnic:

N – normalny

$$f(x; \sigma, \mu) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] \quad [1]$$

P-N – podwójnie normalny

$$f(x; s_1, s_2, m_0) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \left(\frac{1}{s_1 + s_2}\right) \cdot e^{-\frac{(x-m_0)^2}{2s_1^2}} & \text{dla } x \leq m_0 \\ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \left(\frac{1}{s_1 + s_2}\right) \cdot e^{-\frac{(x-m_0)^2}{2s_2^2}} & \text{dla } x > m_0 \end{cases} \quad [2]$$

W – Weibulla

$$f(x; \alpha, \beta, \gamma) = \frac{\alpha}{\beta} \left(\frac{x-\gamma}{\beta}\right)^{\alpha-1} \exp\left[-\left(\frac{x-\gamma}{\beta}\right)^\alpha\right] \quad [3]$$

J – Johnsona S_B

$$f(x; \gamma_1, \delta, \lambda, \xi) = \frac{\delta}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\lambda}{(x-\xi)(\xi+\lambda-x)} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\gamma + \delta \ln\left(\frac{x-\xi}{\xi+\lambda-x}\right)\right]^2\right\} \quad [4]$$

B – beta

$$f(x; \alpha_1, \alpha_2, a, b) = \frac{1}{B(\alpha_1, \alpha_2)} \cdot \frac{(x-a)^{\alpha_1-1} \cdot (b-x)^{\alpha_2-1}}{(b-a)^{\alpha_1+\alpha_2-1}} \quad [5]$$

Bu – Burra typ XII

$$f(x; \alpha, \beta, \gamma, k) = \frac{\alpha \cdot k \cdot \left(\frac{x-\gamma}{\beta}\right)^{\alpha-1}}{\beta \cdot \left(1 + \left(\frac{x-\gamma}{\beta}\right)^\alpha\right)^{k+1}} \quad [6]$$

G – gamma

$$f(x; \alpha, \beta, \gamma) = \frac{(x-\gamma)^{\alpha-1}}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} \exp\left(-\frac{x-\gamma}{\beta}\right) \quad [7]$$

L-N – logarytmicznie normalny

$$f(x; \sigma, \mu, \gamma) = \frac{1}{(x-\gamma)\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\ln(x-\gamma)-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] \quad [8]$$

L-L – logarytmicznie logistyczny

$$f(x; \alpha, \beta, \gamma) = \frac{\alpha}{\beta} \left(\frac{x-\gamma}{\beta}\right)^{\alpha-1} \left(1 + \left(\frac{x-\gamma}{\beta}\right)^\alpha\right)^{-2} \quad [9]$$

B-S – Birnbauma-Saundersa

$$f(x; \alpha, \beta, \gamma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\alpha}\left(\sqrt{\frac{x-\gamma}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{x-\gamma}}\right)\right]^2\right\} \frac{(x-\gamma)^{\frac{3}{2}}[(x-\gamma)+\beta]}{2\alpha\sqrt{\beta}} \quad [10]$$

gdzie:

- x – pierśnica,
- m_0 – wartość modalna pierśnicy,
- s_1, s_2 – odchylenie standardowe lewego i prawego ramienia krzywej gęstości prawdopodobieństwa,
- a, b – skrajne wartości pierśnicy,
- $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, k, \gamma_1, \delta > 0$ – parametr kształtu,
- $\beta, \sigma, \lambda > 0$ – parametr skali,
- γ, μ, ξ – parametr przesunięcia,
- $B(\cdot)$ – funkcja beta,
- $\Gamma(\cdot)$ – funkcja gamma.

W pierwszym etapie prac obliczeniowych scharakteryzowano strukturę pierśnic w każdym drzewostanie za pomocą statystycznych miar koncentracji i rozproszenia. Parametry analizowanych funkcji gęstości prawdopodobieństwa oszacowano metodą największej wiarygodności – w przypadku rozkładów N, W, J, B, Bu, G, L-N, L-L i B-S programem EasyFit 5.5 Professional (www.mathwave.com), a rozkładu P-N w programie R (www.R-project.org) według algorytmu przedstawionego przez Zasadę [2013a]. Dla rozkładów W, B, Bu, G, L-N, L-L i B-S przeprowadzono powtórny estymację parametrów dla uproszczonych postaci wzorów zakładających pominięcie parametru przesunięcia. Dla rozkładu B przyjęto granicę prawostronną równą podwójnej wartości maksymalnej pierśnicy stwierdzonej w próbie [Palahí i in. 2007].

Ocenę przydatności wybranych funkcji gęstości prawdopodobieństwa do aproksymacji rozkładów pierśnic drzewostanów olszowych przeprowadzono w oparciu o:

a) wartość statystyki D_n :

$$D_n = \sup_x |F(x) - F_n(x)| \quad [11]$$

określającej maksymalną różnicę pomiędzy dystrybucją analizowanego rozkładu teoretycznego – $F(x)$ i dystrybucją rozkładu empirycznego $F_n(x)$,

b) przeciętną różnicę pomiędzy obserwowaną (n_i) i przewidywaną (\hat{n}_i) liczbą drzew w poszczególnych stopniach grubości (k) [Podlaski, Zasada 2008]:

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^k (n_i - \hat{n}_i)^2}{k}} \quad [12]$$

W każdym drzewostanie analizowanym rozkładom przypisano rangę R_{D_n} oraz R_{RMSE} na podstawie wielkości obliczonych statystyk D_n i $RMSE$. Końcową ocenę przydatności teoretycznych funkcji gęstości prawdopodobieństwa przeprowadzono, bazując na sumie średnich wartości rang \bar{R}_{D_n} i \bar{R}_{RMSE} – określonych zarówno dla wszystkich drzewostanów łącznie, jak i w rozbiciu na poszczególne klasy wieku.

Wyniki

Średnia pierśnica drzewostanów olszowych zawierała się w przedziale od 4,3 do 42,6 cm, natomiast grubość pojedynczych drzew przyjmowała wartości z zakresu od 1,0 do 67,0 cm (tab. 1). Współczynnik zmienności pierśnic w poszczególnych drzewostanach wahał się od 13,3 do 35,7%. W 11 (7%) drzewostanach rozkład pierśnic charakteryzował się asymetrią lewostronną, w pozostałych 152 (93%) stwierdzono asymetrię prawostronną. Skrajne wartości współczynnika skośności

wynosiły odpowiednio $-1,0285$ oraz $1,3370$ (ryc. 1a, 1b). Kurtoza analizowanych rozkładów pierśnic przyjmowała wartości z zakresu od $-0,9749$ do $4,3708$ (ryc. 1c, 1d). Rozkład pierśnic w 88 (54%) drzewostanach był platokurtyczny, w pozostałych 75 (46%) leptokurtyczny.

W przypadku rozkładów W, J, L-N, L-L i B-S w żadnym z drzewostanów nie było podstaw do odrzucenia hipotezy o ich zgodności z empirycznymi rozkładami pierśnic. Odrzucono ją natomiast w przypadku rozkładu Bu w 15 drzewostanach, N w 7, B w 3, G w 2 i P-N w 1 drzewostanie (test Kołmogorowa-Smirnowa, poziom istotności $\alpha=0,05$).

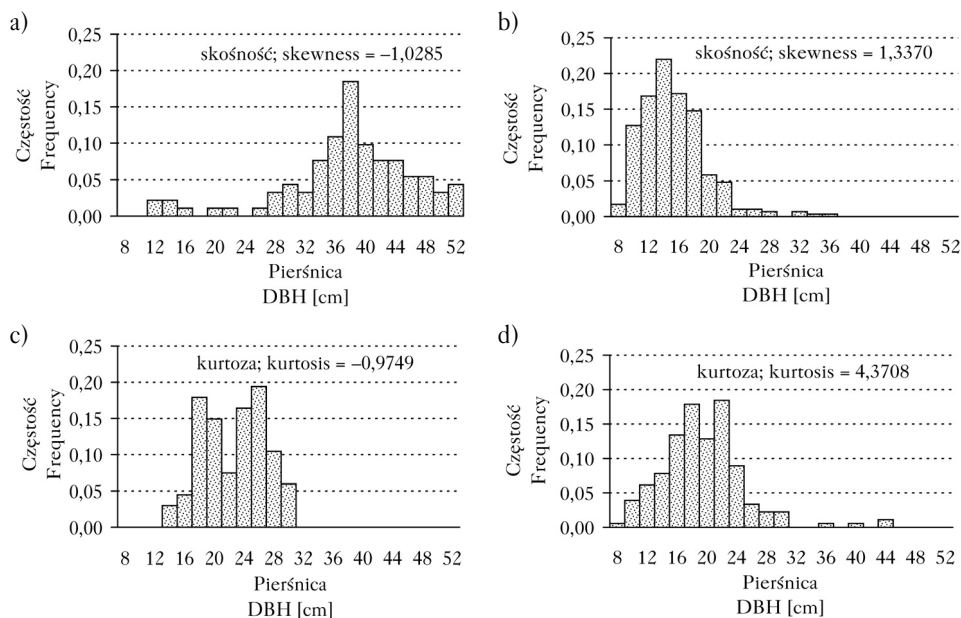
Statystyka D_n obliczona dla ocenianych teoretycznych funkcji gęstości prawdopodobieństwa przyjmowała wartości z zakresu od $0,0249$ (P-N) do $0,4873$ (Bu). Najmniejszą jej średnią

Tabela 1.

Liczba drzewostanów (ND) i powierzchni próbnych (NPP), średnia oraz najmniejsza i największa (w nawiasie) liczba drzew pomierzonych w drzewostanie (N), zagęszczenie (SDI [n/ha]) i średnia oraz najmniejsza i największa (w nawiasie) pierśnica (D [cm]) w klasach wieku (I-V)

Number of stands (ND) and sample plots (NPP), mean with minimum and maximum (in parentheses) number of trees measured in a stand (N), stand density (SDI [n/ha]) and mean with minimum and maximum (in parentheses) diameter at the breast height (D [cm]) in age classes (I-V)

	ND	NPP	N	SDI	D
I	30	145	156 (72-301)	2022	8,9 (1,0-21,5)
II	43	206	132 (57-293)	987	15,9 (6,5-44,7)
III	45	225	132 (48-359)	586	23,3 (6,7-55,3)
IV	40	242	140 (73-235)	405	31,0 (9,6-67,0)
V	5	26	124 (89-196)	351	36,9 (17,6-60,5)
Razem Total	163	844	138 (48-359)		



Ryc. 1.

Empiryczne rozkłady pierśnic o skrajnych wartościach skośności (a i b) oraz kurtozy (c i d)

Empirical DBH distributions in black alder stands characterized by extreme skewness (a and b) and kurtosis (c and d)

wartość (0,0505) stwierdzono dla rozkładu J, zaś największą (0,0705) dla rozkładu Bu (tab. 2). Statystyka $RMSE$ zawierała się w przedziale od 0,99 (G) do 19,90 (Bu). Najmniejszą średnią wartość $RMSE$ (2,67) stwierdzono dla rozkładu J, największą zaś (3,33) dla rozkładu N (tab. 2). Średnie statystyk D_n i $RMSE$ dla rozkładów P-N, W, B, G, L-N i B-S osiągają zbliżone wartości, wyraźnie niższe niż dla rozkładów N i L-L.

Pominięcie parametru przesunięcia w przypadku rozkładów W, B, Bu, G, L-N, L-L i B-S spowodowało wzrost liczby przypadków, w których odrzucono hipotezę zerową o zgodności rozkładu empirycznego z rozkładem teoretycznym. Testowaną hipotezę odrzucono w 16 drzewostanach w przypadku rozkładu W, w 9 dla rozkładu L-L, w 4 dla rozkładów L-N, B i B-S, w 2 dla rozkładu Bu i w 1 dla rozkładu G.

Arbitralne pominięcie parametru przesunięcia spowodowało również wzrost średnich wartości statystyk D_n i $RMSE$. Wyjątek stanowiły rozkłady gamma (G) i Burra (Bu), w przypadku których omawiany zabieg spowodował zmniejszenie średniej wartości analizowanych statystyk (tab. 2 i 3).

Z ocenianych 10 rozkładów teoretycznych najmniejszą sumę rang, wynoszącą 7,3, otrzymał rozkład J. Był on najlepszy w obydwu zastosowanych kryteriach oceny dopasowania (tab. 2, ryc. 2). Najmniej przydatny do opisu struktury pierścni drzewostanów olszowych okazał się rozkład N, który uzyskał ponaddwukrotnie większą sumę rang (15,4). Pozycja w rankingu analizowanych funkcji ulega na ogół zmianie z wiekiem drzewostanów (tab. 4). Zaobserwowana zmiana pozycji nie dotyczy jedynie funkcji J, dla której suma średnich rang była najniższa w każdej klasie

Tabela 2.

Średnia wartość statystyki testu Kołmogorowa-Smirnowa (\bar{D}_n), średnia wartość statystyki $RMSE$ (\overline{RMSE}), średnia ranga ustalona na podstawie statystyki D_n (\bar{R}_{Dn}), średnia ranga ustalona na podstawie statystyki $RMSE$ (\bar{R}_{RMSE}) oraz suma średnich rang (R) dla analizowanych rozkładów teoretycznych

Mean value of Kolmogorov-Smirnov test statistic (\bar{D}_n), mean value of root mean squared error (\overline{RMSE}), mean rank according to D_n (\bar{R}_{Dn}), mean rank according to $RMSE$ (\bar{R}_{RMSE}) and sum of mean ranks (R) for analysed theoretical distributions

	N	P-N	J	W	B	Bu	G	L-N	L-L	B-S
\bar{D}_n	0,0704	0,0572	0,0505	0,0562	0,0576	0,0705	0,0560	0,0553	0,0579	0,0554
\overline{RMSE}	3,33	2,90	2,67	2,85	2,80	3,22	2,90	2,93	3,31	2,95
\bar{R}_{Dn}	8,1	5,2	3,6	5,3	5,6	5,0	5,3	5,2	6,5	5,2
\bar{R}_{RMSE}	7,3	5,2	3,7	5,6	5,6	4,7	5,3	5,2	7,1	5,4
R	15,4	10,2	7,3	10,9	11,2	9,7	10,6	10,4	13,6	10,6

Rozkłady: N – normalny, P-N – podwójnie normalny, J – Johnsona S_B , W – Weibulla, B – beta, Bu – Burra, G – gamma, L-N – logarytmicznie normalny, L-L – logarytmicznie logistyczny, B-S – Birnbauma-Saundersa

Distributions: N – normal, P-N – double normal, J – Johnson's S_B , W – Weibull, B – beta, Bu – Burr, G – gamma, L-N – log-normal, L-L – log-logistic, B-S – Birnbaum-Saunders

Tabela 3.

Statystyki jakości dopasowania rozkładów przy uproszczonej postaci wzorów zakładającej pominięcie parametru położenia

Goodness-of-fit statistics for theoretical distributions with omitted location parameter

	W	B	Bu	G	L-N	L-L	B-S
\bar{D}_n	0,0804	0,0635	0,0586	0,0611	0,0661	0,0747	0,0670
\overline{RMSE}	3,85	3,10	3,07	3,10	3,23	3,55	3,23
\bar{R}_{Dn}	5,58	3,61	2,94	2,81	3,62	5,48	3,95
\bar{R}_{RMSE}	5,63	3,34	3,20	3,08	3,79	5,10	3,86
R	11,21	6,95	6,14	5,89	7,41	10,58	7,81

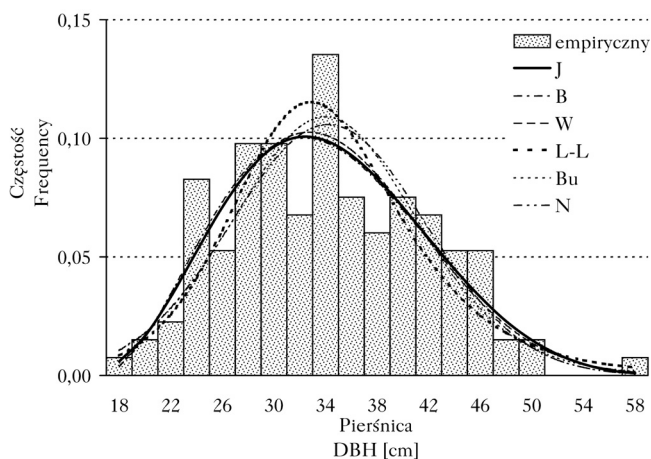
oznaczenia jak w tabeli 2; denotes as in table 2

wieku, oraz funkcji N – osiagającej w drzewostanach od I do IV klasy wieku największe wartości sumy średnich rang (tab. 4).

Pominięcie parametru położenia w przypadku rozkładów W, B, Bu, G, L-N, L-L i B-S wpłynęło wyraźnie na ich przydatność do opisu empirycznych rozkładów pierśnic (tab. 3, ryc. 3). Najmniejszą sumę rang i jednocześnie pierwsze miejsce w rankingu zajęła funkcja G, druga pozycja przypadła funkcji Bu. Empiryczne rozkłady pierśnic w drzewostanach młodszych klas wieku (od I do III) najlepiej odwzorowywał rozkład G, zaś w drzewostanach starszych rozkład Bu (tab. 5). Za mniej przydatne do opisu struktury grubości przy uproszczonej postaci wzoru należy uznać funkcje W, L-L, B-S i L-N (tab. 5).

Dyskusja

Spośród analizowanych funkcji najlepsza do aproksymacji rozkładów pierśnic w drzewostanach olszowych z zachodniej części Kotliny Sandomierskiej okazała się funkcja Johnsona S_B (J). Otrzymała ona najniższą łączną sumę rang oraz, co ważniejsze, wyniki testu Kołmogorowa-Smirnowa nie pozwoliły na odrzucenie hipotezy o jej zgodności z rozkładem empirycznym pierśnic w żadnym



Ryc. 2.

Krzywe gęstości prawdopodobieństwa rozkładów: Johnsona S_B (J), beta (B), Weibulla (W), logarymicznie logistycznego (L-L), Burra (Bu) i normalnego (N) na tle histogramu rozkładu pierśnic w 78-letnim drzewostanie olszowym w Nadleśnictwie Kolbuszowa

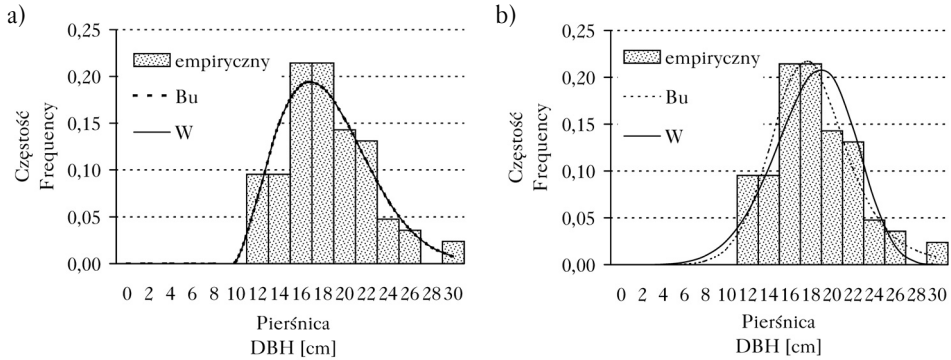
Histogram of DBH distribution in 78 years old black alder stand from Kolbuszowa Forest District with fitted Johnson's S_B (J), beta (B), Weibull (W), log-logistic (L-L), Burr (Bu) and normal (N) probability density function

Tabela 4.

Suma średnich rang przyznanych ocenianym rozkładom teoretycznym w poszczególnych klasach wieku
Sum of mean ranks for assessed theoretical distributions in distinguished age classes

	N	P-N	J	W	B	Bu	G	L-N	L-L	B-S
I	16,1	10,7	5,5	9,3	9,7	8,1	11,8	11,8	15,6	11,6
II	15,2	11,1	7,9	10,5	12,1	9,5	10,5	9,7	13,2	10,2
III	15,0	10,2	6,8	10,5	10,6	9,5	10,7	11,0	14,7	11,1
IV	15,7	9,0	8,8	12,8	11,7	11,5	10,0	9,6	11,3	9,7
V	12,4	9,6	7,4	11,7	14,2	10,1	10,0	10,2	13,4	11,0

oznaczenia jak w tabeli 2; denotes as in table 2



Ryc. 3.

Rozkład pierśnic w 42-letnim drzewostanie olszowym w Nadleśnictwie Niepołomice z dopasowanymi rozkładami Weibulla (W) i Burra (Bu) (a) z estymowaną wartością parametru przesunięcia oraz (b) z pominiętym parametrem przesunięcia

Histogram of DBH distribution in 42 years old black alder stand from Niepołomice Forest District with fitted Weibull (W) and Burr (Bu) probability density function (a) with estimated value of location parameter and (b) without location parameter

Tabela 5.

Suma średnich rang przyznanym ocenianym rozkładom teoretycznym przy pominiętej wartości parametru przesunięcia w poszczególnych klasach wieku

Sum of mean ranks for assessed theoretical distributions with omitted location parameter in distinguished age classes

	W	B	Bu	G	L-N	L-L	B-S
I	11,2	7,5	6,7	6,1	6,9	11,1	6,7
II	11,2	7,4	6,4	6,2	7,0	10,6	7,2
III	10,7	6,2	6,2	5,4	7,9	11,2	8,4
IV	11,8	6,9	5,4	5,8	7,6	9,8	8,8
V	11,8	7,0	6,4	6,9	7,4	9,0	7,5

oznaczenia jak w tabeli 2; denotes as in table 2

drzewostanie. Dotychczasowe wyniki badań nad wykorzystaniem rozkładu Johnsona S_B (J) do modelowania struktury pierśnic drzewostanów są niejednoznaczne. Wskazują bowiem na jego małą przydatność do opisu struktury pierśnic w drzewostanach brzoźowych [Zasada 2000] oraz zadowalającą w przypadku drzewostanów bukowych [Jagiello i in. 2016]. Na jego dużą „niestabilność” pod względem stopnia dopasowania do danych empirycznych wskazują analizy Rymer-Dudzińskiej i Dudzińskiej [1999, 2001] wykonane dla nizinnych i górskich drzewostanów bukowych. Problem ten pojawił się również w pracy Siekierskiego [1992], który zauważył, że estymatory parametrów rozkładu Johnsona S_B (J) oszacowane metodą największej wiarygodności przyjmowały często nierealne wartości. Uwzględnione w pracy kryteria oceny sugerują jednak dużą przydatność tego rozkładu do modelowania struktury pierśnic w drzewostanach olszowych. Ponadto ocena, jaką uzyskał ten rozkład dla drzewostanów przyporządkowanych do poszczególnych klas wieku, wskazuje, że modelowanie struktury grubości drzewostanów olszowych może bazować na jednej funkcji, bez konieczności jej zmiany przy przejściu do kolejnych klas wieku.

Miejsca zajęte w rankingu przez rozkłady Weibulla (W) i beta (B) korespondują z wnioskami Fonseki i in. [2009], którzy 4-parametrowy rozkład Johnsona S_B (J) uznają za bardziej ogólny, a tym samym efektywniejszy podczas modelowania struktury grubości w porównaniu do powszechnie

stosowanych rozkładów. Alternatywę dla rozkładu Johnsona S_B (J) w przypadku drzewostanów olszowych, zwłaszcza od I do III klasy wieku, może pełnić rozkład Weibulla (W). Uzyskał on bowiem nieco niższą łączną sumę średnich rang w porównaniu do rozkładu beta (B), a dodatkowo test Kołmogorowa-Smirnowa nie pozwolił w żadnym drzewostanie na odrzucenie hipotezy o jego zgodności z rozkładem empirycznym. Rozkład ten okazał się odpowiedni do opisu struktury grubości drzewostanów bukowych [Rymer-Dudzińska, Dudzińska 1999; Jagiełło i in. 2016], brzoźowych [Zasada 2000, 2013b] oraz dębowych [Magnuszewski, Tomusiak 2011].

Wyniki przeprowadzonej oceny nie rozstrzygają w jednoznaczny sposób o przydatności rozkładów gamma (G), logarytmicznie normalnego (L-N), podwójnie normalnego (P-N) i Birbauma-Saundersa (B-S). Na możliwość zastosowania rozkładu logarytmicznie normalnego (L-N) do modelowania struktury grubości drzewostanów dębowych z terenu Lubelszczyzny i Podkarpacia wskazują badania Magnuszewskiego i Tomusiaka [2011]. Rozkład Birbauma-Saundersa (B-S) był stosowany w Polsce do aproksymacji rozkładów pierśnic w lasach o charakterze zbliżonym do naturalnego [Podlaski 2008]. Rezultaty jego zastosowania do modelowania struktury grubości monokultur przedstawili natomiast Leiva i in. [2012]. Rozkład podwójnie normalny (P-N) wykorzystany był do modelowania struktury pierśnic w drzewostanach sosnowych [Bruchwald 1988]. Posiada on łatwe do interpretacji pod względem biologicznym parametry, które odzwierciedlają różnicę w długości prawego i lewego ramienia krzywej frekwencji [Zasada 2013a] wynikającą z procesu ubywania drzew z niższych klas grubości na skutek naturalnego wydzielania lub w efekcie prowadzonych cięć pielęgnacyjnych. nierozstrzygnięta pozostaje również kwestia zastosowania rozkładu Burra (Bu), dla którego najczęściej odrzucana była hipoteza o zgodności z rozkładami empirycznymi. Rozkład ten, obok rozkładu gamma, okazał się natomiast najlepiej opisującym frekwencje pierśnic w wyniku pominięcia we wzorze parametru przesunięcia.

Przyjęta głównie w celach poznawczych koncepcja pominięcia parametru przesunięcia uzasadniona jest obserwowanym w przyrodzie zakresem wartości pierśnic i wynikała z faktu, że estymowane metodą największej wiarygodności wartości tego parametru w wielu przypadkach były ujemne. Pozostaje ona jednak dyskusyjna w sytuacji drzewostanów starszych klas wieku, w których minimalna pierśnica jest znacznie większa niż wynikająca z zastosowanego zabiegu wartość 0. Uproszczenie wzoru może powodować deformację kształtu krzywej frekwencji oraz wpływać niekorzystnie na jakość dopasowania, co zostało potwierdzone w przypadku większości analizowanych rozkładów.

Przeprowadzona ocena przydatności wybranych rozkładów teoretycznych do opisu struktury grubości otwiera drogę dla dalszych analiz ukierunkowanych w sposób szczególny na możliwość szacowania parametrów wybranej teoretycznej funkcji gęstości prawdopodobieństwa na podstawie dostępnych cech taksacyjnych drzewostanu. Interesująca poznawczo pozostaje kwestia zastosowania i oceny alternatywnych metod modelowania struktury grubości, zwłaszcza wykorzystanie percentyli [Kangas, Maltamo 2000] czy też jądrowych estymatorów gęstości [Kulczycki 2005; Podlaski, Roesch 2014b]. Z uwagi na ciągły rozwój metod statystycznych istotna jest również weryfikacja przydatności różnych wariantów metod służących do szacowania wartości parametrów rozkładów teoretycznych.

Wnioski

- ✦ Rozkład pierśnic większości analizowanych drzewostanów olszowych wznoszących w zachodniej części Kotliny Sandomierskiej wykazuje asymetrię prawostronną oraz ujemną wartość kurtozy.

- ✦ Niezależnie od wieku analizowanych drzewostanów olszowych rozkład Johnsona S_B okazał się najbardziej przydatny do aproksymacji struktury ich pierśnic. Do opisu frekwencji grubości nie należy natomiast stosować rozkładu normalnego i logarytmicznie logistycznego.
- ✦ Pominięcie wartości parametru przesunięcia we wzorach wybranych teoretycznych funkcji gęstości prawdopodobieństwa istotnie wpłynęło na ich przydatność do opisu empirycznych rozkładów pierśnic.
- ✦ Po arbitralnym pominięciu parametru przesunięcia rozkład gamma najlepiej opisywał frekwencję pierśnic drzewostanów młodszych klas wieku, zaś Burra drzewostanów starszych.
- ✦ Zarówno z poznawczego, jak i utylnego punktu widzenia ważne byłoby podjęcie badań nad przydatnością cech taksacyjnych drzewostanu do szacowania parametrów wybranych funkcji opisujących strukturę pierśnic oraz ocena alternatywnych metod jej modelowania.

Literatura

- Amateis R. L., Burkhart H. E., Burk T. E. 1986. A ratio approach to predicting merchantable yields of unthinned loblolly pine plantations. *Forest Science* 32 (2): 287-296.
- Bailey R. L., Dell T. R. 1973. Quantifying diameter distributions with the Weibull function. *Forest Science* 19 (2): 97-104.
- Binoti D. H. B., Binoti M. L. M. S., Leite H. G. 2015. Use of log-logistic function for modelling diameter distribution. *Revista Árvore* 39 (5): 943-951.
- Bruchwald A. 1971. Metoda określenia bieżącego przyrostu miąższości drzewostanu przy zastosowaniu właściwej liczby kształtu $f_{L/3}$. *Folia Forestalia Polonica, Series A – Forestry* 18: 99-131.
- Bruchwald A. 1988. Simulation algorithm of the distribution of b. h. diameters of trees in pine stands. *Annals of Warsaw Agriculture University – SGGW-AR, Forestry and Wood Technology* 37: 91-95.
- Bruchwald A., Dmyterko E., Dudzińska M., Wirowski M. 2001. Stałe krzywe wysokości dla drzewostanów olszy czarnej. *Sylvan* 145 (11): 15-19.
- Buongiorno J., Dahir S., Lu H. C., Lin C. R. 1994. Tree size diversity and economic returns in uneven-aged forest stands. *Forest Science* 40 (1): 83-103.
- Burk T. E., Newberry J. D. 1984. A simple algorithm for moment-based recovery of Weibull distribution parameters. *Forest Science* 30 (2): 329-332.
- Diéguez-Aranda U., Castedo-Dorado F., Álvarez-González J. G., Rojo A. 2006. Compatible taper function for Scots pine plantations in northwestern Spain. *Canadian Journal of Forest Research* 36 (5): 1190-1205.
- Fallahchahi M. M., Shokri S. 2014. The evaluation of different statistical distributions in order to fit *Alnus subcordata* C.A.M. species diameter in mountainous forests north of Iran. *Biological Forum – An International Journal* 6 (1): 109-115.
- Fonseca T. F., Marques C. P., Parresol B. R. 2009. Describing Maritime pine diameter distributions with Johnson's S_B distribution using a new all – parameter recovery approach. *Forest Science* 55 (4): 367-373.
- von Gadow K., Zhang C. Y., Wehenkel C., Pommerening A., Corral-Rivas J., Korol M., Myklush S., Hui G. Y., Kiviste A., Zhao X. H. 2012. Forest structure and diversity. W: Pukkala T., von Gadow K. [red.]. *Continuous cover forestry. Book series managing forest ecosystems*. Springer, Berlin. 29-84.
- Gove J. H., Ducey M. J., Leak W. B., Zhang L. 2008. Rotated sigmoid structures in managed uneven-aged northern hardwood stands: a look at the Burr Type III distribution. *Forestry* 81 (2): 161-176.
- Hafley W. L., Schreuder H. T. 1977. Statistical distributions for fitting diameter and height data in even-aged stands. *Canadian Journal of Forest Research* 7 (3): 481-487.
- Hasenauer H., Monserud R. A. 1996. A crown ratio model for Austrian forests. *Forest Ecology and Management* 84 (1-3): 49-60.
- Ige P. O., Akinyemi G. O., Abi E. A. 2013. Diameter distribution models for tropical natural forest trees in Onigambari Forest Reserve. *Journal of Natural Sciences Research* 3 (12): 14-22.
- Jagiello R., Beker C., Jagodziński A. M. 2016. Ocena zgodności rozkładów empirycznych pierśnic drzewostanów bukowych różnych klas wieku z wybranymi rozkładami teoretycznymi. *Sylvan* 160 (2): 107-119.
- Jaworski A., Podlaski R. 2012. Modelling irregular and multimodal tree diameter distributions by finite mixture models: an approach to stand structure characterization. *Journal of Forest Research* 17 (1): 79-88.
- Kangas A., Maltamo M. 2000. Percentile based basal area diameter distribution models for Scots pine, Norway spruce and birch species. *Silva Fennica* 34 (4): 371-380.
- Karczmariski J. 2005. Struktura rozkładów pierśnic w naturalnych górnoreglowych borach świerkowych Tatr i Beskidów Zachodnich w zależności od stadiów i faz rozwojowych lasu o charakterze pierwotnym. *Sylvan* 149 (3): 12-23.

- Khongor T., Lin C., Tsogt Z. 2011. Diameter structure analysis of forest stand and selection of suitable model. *Mongolian Journal of Biological Sciences* 9 (1-2): 19-22.
- Kulczycki P. 2005. Estymatory jądrowe w analizie systemowej. WNT, Warszawa.
- Leiva V., Guadalupe Ponce M., Marchant C., Bustos O. 2012. Fatigue statistical distributions useful for modeling diameter and mortality of trees. *Revista Colombiana de Estadística* 35 (3): 349-370.
- Leśnictwo. 2015. GUS, Warszawa.
- Lindsay S. R., Wood G. R., Woollons R. C. 1996. Modelling the diameter distribution of forest stands using the Burr distribution. *Journal of Applied Statistics* 23 (6): 609-619.
- Magnuszewski M., Tomusiak R. 2011. Ocena zgodności rozkładów empirycznych pierśnic drzewostanów dębowych starszych klas wieku z terenów Lubelszczyzny i Podkarpacia z wybranymi rozkładami teoretycznymi. *Sylwan* 155 (2): 96-103.
- Merganič J., Sterba H. 2006. Characterisation of diameter distribution using the Weibull function: method of moments. *European Journal of Forest Research* 125 (4): 427-439.
- Meixner J. 1964. Ocena normalności rozkładów niektórych cech taksacyjnych drzew w drzewostanie sosnowym. *Roczniki Wyższej Szkoły Rolniczej w Poznaniu* 23: 55-72.
- Nagel J., Biging G. S. 1995. Schätzung der Parameter der Weibullfunktion zur Generierung von Durchmesserverteilungen. *Allgemeine Forst- und Jagdzeitung* 166 (9/10): 185-189.
- Nanos N., Montero G. 2002. Spatial prediction of diameter distribution models. *Forest Ecology and Management* 161 (1-3): 147-158.
- Ochał W., Pająk M., Pietrzykowski M. 2010. Struktura grubości wybranych drzewostanów sosnowych wzrastających na zrekretywowanych dla leśnictwa obiektach pogórnich. *Sylwan* 154 (5): 323-332.
- Orzeł S. 1985. Biometryczna charakterystyka wzrostu drzewostanów sosnowych w rejonie Tarnobrzkiego Zagłębia Siarkowego. *Acta Agraria et Silvestria, series Silvestris* 24: 59-79.
- Orzeł S., Pogoda P., Ochał W. 2014. Stała krzywa wysokości dla olszy czarnej (*Alnus glutinosa* (L.) Gaertn.) z zachodniej części Kotliny Sandomierskiej. *Sylwan* 158 (11): 840-849.
- Orzeł S., Rutkowska L. 2000. Struktura grubości drzewostanów sosnowych wzrastających w różnych strefach przemysłowego uszkodzenia. *Sylwan* 144 (7): 55-63.
- Palahí M., Pukkala T., Blasco E., Trasobares A. 2007. Comparison of beta, Johnson's S_B , Weibull and truncated Weibull functions for modeling the diameter distribution of forest stands in Catalonia (north-east of Spain). *European Journal of Forest Research* 126 (4): 563-571.
- Podlaski R. 2006. Suitability of the selected statistical distributions for fitting diameter data in distinguished development stages and phases of near-natural mixed forests in the Świętokrzyski National Park (Poland). *Forest Ecology and Management* 236 (2-3): 393-402.
- Podlaski R. 2008. Characterization of diameter distribution data in near-natural forests using the Birnbaum-Saunders distribution. *Canadian Journal of Forest Research* 38 (3): 518-527.
- Podlaski R. 2011a. Modelowanie rozkładów pierśnic drzew z wykorzystaniem rozkładów mieszanych. I. Definicja, charakterystyka i estymacja parametrów rozkładów mieszanych. *Sylwan* 155 (4): 244-252.
- Podlaski R. 2011b. Modelowanie rozkładów pierśnic drzew z wykorzystaniem rozkładów mieszanych. II. Aproksymacja rozkładów pierśnic w lasach wielopiętrowych. *Sylwan* 155 (5): 293-300.
- Podlaski R., Roesch F. A. 2013a. Aproksymacja rozkładów pierśnic drzew w dwugeneracyjnych drzewostanach za pomocą rozkładów mieszanych. I. Estymacja parametrów. *Sylwan* 157 (8): 587-596.
- Podlaski R., Roesch F. A. 2013b. Aproksymacja rozkładów pierśnic drzew w dwugeneracyjnych drzewostanach za pomocą rozkładów mieszanych. II. Testy zgodności. *Sylwan* 157 (9): 652-661.
- Podlaski R., Roesch F. A. 2014a. Aproksymacja rozkładów pierśnic drzew w dwugeneracyjnych drzewostanach za pomocą rozkładów mieszanych. III. Estymatory jądrowe a rozkłady mieszane. *Sylwan* 158 (6): 414-422.
- Podlaski R., Roesch F. A. 2014b. Modelling diameter distributions of two-cohort forest stands with various proportions of dominant species: A two-component mixture model approach. *Mathematical Biosciences* 249 (1): 60-74.
- Podlaski R., Zasada M. 2008. Comparison of selected statistical distributions for modeling the diameter distributions in near-natural *Abies-Fagus* forests in the Świętokrzyski National Park (Poland). *European Journal of Forest Research* 127 (6): 455-463.
- Rédei K., Véperdi I. 2001. Study of the relationships between crown and volume production of black locust trees (*Robinia pseudoacacia* L.). *Lesnícky Časopis – Forestry Journal* 47 (2): 135-142.
- Rennolls K., Geary D. N., Rollinson T. J. D. 1985. Characterizing diameter distributions by the use of the Weibull distribution. *Forestry* 58 (1): 57-66.
- Rymer-Dudzińska T., Dudzińska M. 1999. Analiza rozkładu pierśnic w drzewostanach bukowych. *Sylwan* 143 (8): 5-24.
- Rymer-Dudzińska T., Dudzińska M. 2001. Rozkład pierśnic drzew w nizinnych drzewostanach bukowych. *Sylwan* 145 (8): 13-22.
- Siekierski K. 1992. Evaluation of the goodness of fit of some statistical distributions to tree diameter distributions. *Annals of Warsaw Agriculture University – SGGW-AR, Forestry and Wood Technology* 43: 7-14.

- Siipilehto J. 2011.** Methods and applications for improving parameter prediction models for stand structures in Finland. Academic dissertation. Department of Forest Sciences Faculty of Agriculture and Forestry University of Helsinki.
- Tsogot K., Zandraabal T., Lin C. 2013.** Diameter and height distributions of natural even-aged pine forests (*Pinus sylvestris*) in western Khentey, Mongolia. *Taiwan Journal of Forest Science* 28 (1): 29-41.
- Wallis K. F. 2014.** The two-piece normal, binormal or double Gaussian distribution: its origin and rediscoveries. *Statistical Science* 29 (1): 106-112.
- Zasada M. 1995.** Ocena zgodności rozkładów pierśnic w drzewostanach jodłowych z niektórymi rozkładami teoretycznymi. *Sylvan* 139 (12): 61-69.
- Zasada M. 2000.** Ocena zgodności rozkładów pierśnic drzew drzewostanów brzozowych z niektórymi rozkładami teoretycznymi. *Sylvan* 144 (5): 43-51.
- Zasada M. 2003.** Możliwość zastosowania rozkładów mieszanych do modelowania rozkładów pierśnic drzew w naturalnych klasach biosocjalnych. *Sylvan* 147 (9): 27-37.
- Zasada M. 2013a.** Evaluation of the double normal distribution for tree diameter distribution modeling. *Silva Fennica* 47 (2): 1-17.
- Zasada M. 2013b.** Modelowanie rozkładów pierśnic młodocianych drzewostanów brzozy brodawkowatej na gruntach porolnych za pomocą dwuparametrowego rozkładu Weibulla. *Sylvan* 157 (4): 268-277.
- Zasada M., Cieszewski C. J. 2005.** A finite mixture distribution approach for characterizing tree diameter distributions by natural social class in pure even-aged Scots pine stands in Poland. *Forest Ecology and Management* 204 (2-3): 145-158.
- Zianis D., Muukkonen P., Mäkipää R., Mencuccini M. 2005.** Biomass and stem volume equations for tree species in Europe. *Silva Fennica Monographs* 4.