

TADEUSZ GIERUSZYŃSKI

Formułki miąższościowe dla drzew ściętych

Volumetric formulas for felled trees.

Przy określaniu miąższości drzew leżących (kłód lub całych strzał) posługujemy się zasadniczo dwoma rodzajami formułek. Do grupy pierwszej należą będą tzw. wzory przybliżone, oparte na kilku przekrojach (1 do 3), zaś grupę drugą stanowią metody wymagające pomiaru stosunkowo wielkiej ilości średnic (wzory sekcyjne). Przy zwiększaniu ilości pomierzonych średnic wzrasta — jak wiadomo — dokładność oznaczenia miąższości. Z drugiej jednak strony wzory złożone (sekcyjne) zużywają dużo pracy pomiarowej i kameralnej (podział kłody) na odcinki, pomiar średnic, obliczanie powierzchni przekrojów itp.). Z prostych formułek jednoprzekrojowych, np. wzór Hubera, powszechnie zresztą stosowany w praktyce, jest mało dokładny. Inne dwu i więcej przekrojowe, nie zawsze dokładniejsze, kryją w sobie m. in. niedogodności pomiarowe, jak np. określenie przekroju g_0 w metodzie Smaliana, Rieckiego i Breymanna, a dalej wyznaczenie miejsc pomiaru średnic dzieleniem długości drzewa na odpowiednie odcinki itd. Ta okoliczność, że we wzorze jednoprzekrojowym miąższość zależy tylko od jednej średnicy, pociąga za sobą niemożność usunięcia względnie zrównoważenia błędu popełnionego przy pomiarze średnicy. Natomiast we wzorach o kilku przekrojach spodziewać się można wyrównania błędu. W metodach sekcyjnych, jak wykazują badania, otrzymuje się wyniki stosunkowo ściśle, jednakowoż w porównaniu ze sposobami ksyłometrycznymi formułki sekcyjne dają za niskie rezultaty. Tjuri¹⁾ podaje, że wzór sekcyjny Hubera daje w porównaniu z ksyłometrem wynik niższy o około 1%, wedle Kunz²⁾ dla 54 strzał świerka błąd pomiaru sekcyjnego wynosił — 3,1%, natomiast Gehrhardt³⁾ ustala błąd metod sekcyjnych (Smalian) na — 2%.

W literaturze pomiarowej spotykamy się m. in. z następującymi krzywymi tworzącymi strzał:

$$y^2 = p \cdot x^r \quad \dots \dots \dots (1)$$

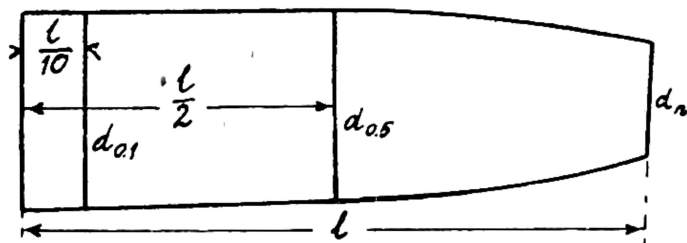
$$i \quad g = a + b \cdot x + c \cdot x^2 + \dots \dots \dots (2)$$

Z obserwacji pokroju strzał wynika, że krzywa tworząca posiada punkty przegięcia w części dolnej strzały (okolica szyi korzeniowej) lub w części górnej strzały, będącej pod wpływem korony.

Ponieważ krzywą tworzącą, posiadającą punkty przegięcia, da się wyrazić tylko równaniem $g = a + b \cdot x + c \cdot x^2 + \dots$, dlatego w rozważaniach moich nad określeniem miąższości strzały i jej części przyjąłem równanie typu (2), a w szczególności 3-członowy wzór:

$$g = a + b \cdot x + c \cdot x^2 \quad \dots \dots \dots (3)$$

Dla bliższego określenia równania (3) należy przede wszystkim wyznaczyć współczynniki a , b , c przy pomocy przekrojów g i odpowiadających tym przekrojom długości x . Trzy przekroje stanowić będą minimum potrzebne do rozwiązania równania (3). Oczywiście, że przekroje te można wybrać na strzale w dowolnym miejscu. Kierując się jednak dogodnością oznaczenia miejsca pomiaru przekrojów na strzale, jak również myślą, by przekroje te służyły później do charakterystyki elementów kształtu strzały, przyjęto pierwszy przekrój $g_{0,1}$ na $1/10$ długości, drugi w połowie $g_{0,5}$, zaś trzeci g_n wybrano na końcu długości odcinka strzały. Odpowiadające tym przekrojom długości będą wynosiły: $x_1 = 1 : 10$ $x_2 = 1 : 2$ $x_3 = 1$.



Wyznaczenie współczynników a , b , c :

Wstawiając do równania (3) przekroje i długości otrzymamy system równań:

$$I. \quad g_{0,1} = a + \frac{bl}{10} + \frac{cl^2}{100}$$

$$II. \quad g_{0,5} = a + \frac{bl}{2} + \frac{cl^2}{4}$$

$$III. \quad g_n = a + bl + cl^2$$

1) Tjurin A. W.: Taksacja lesa. Moskwa 1938.

2) Kunze: Supplemente T. J. t. II. 1882.

3) Gehrhardt: Eine Studie über Inhaltsermittlung von Probestämmen. Th.

F. J. 1932.

Odejmując od równania III rów. II, zaś od rów. II rów. I wyrugujemy niewiadomą a, czyli:

$$\text{III} - \text{II} \quad g_n - g_{0.5} = \frac{bl}{2} + \frac{3}{4} cl^2$$

$$\text{II} - \text{I} \quad g_{0.5} - g_{0.1} = \frac{4}{10} bl + \frac{24}{100} cl^2$$

Mnożąc równanie III — II przez 4/5, a następnie odejmując od tego równanie II — I obliczymy wartość c.

$$\left. \begin{array}{l} \text{III} - \text{II} \quad \frac{4}{5} (g_n - g_{0.5}) = \frac{4}{10} bl + \frac{3}{5} cl^2 \\ \text{II} - \text{I} \quad -g_{0.5} + g_{0.1} = -\frac{4}{10} bl + \frac{24}{100} cl^2 \end{array} \right\} -$$

$$\frac{4}{5} g_n - \frac{4}{5} g_{0.5} - g_{0.5} + g_{0.1} = \frac{36}{100} cl^2 \quad \text{stad}$$

$$g_{0.1} + \frac{4}{5} g_n - \frac{9}{5} g_{0.5} = \frac{36}{100} cl^2 \quad \text{zaś}$$

$$c = \frac{25 g_{0.1} + 20 g_n - 45 g_{0.5}}{gl^2}$$

Z równania III — II obliczymy współczynnik b, czyli

$$\text{III} - \text{II} \quad g_n - g_{0.5} = \frac{bl}{2} + \frac{3}{4} \left(\frac{25g_{0.1} + 20g_n - 45g_{0.5}}{gl^2} \right) \cdot l^2$$

$$g_n - g_{0.5} = \frac{bl}{2} + \frac{25g_{0.1} + 20g_n - 45g_{0.5}}{12}$$

$$12g_n - 12g_{0.5} = 6bl + 25g_{0.1} + 20g_n - 45g_{0.5}$$

$$6bl = 12g_n - 12g_{0.5} - 25g_{0.1} - 20g_n + 45g_{0.5}$$

$$b = \frac{33g_{0.5} - 25g_{0.1} - 8g_n}{6l}$$

Wreszcie współczynnik a określimy z równania III.

$$a = g_n - bl - cl^2$$

$$a = g_n - \frac{33g_{0.5} - 25g_{0.1} - 8g_n}{6} - \frac{25g_{0.1} + 20g_n - 45g_{0.5}}{g}$$

$$a = \frac{25g_{0.1} - 9g_{0.5} + 2g_n}{18}$$

Miąszość kłody o długości l równa będzie sumie miąszości nieskończenie wielkiej ilości nieskończenie małych walców o podstawie g_x a wysokości dx , czyli

$$V = \int_0^x g_x dx = \int_0^x (a + bx + cx^2) dx = a \cdot x + \frac{b \cdot x^2}{2} + \frac{c \cdot x^3}{3}$$

wstawiając za x wartość l będzie $V = al + \frac{bl^2}{2} + \frac{cl^3}{3}$

a następnie wartości współczynników a, b, c :

$$V = l \cdot \left[\frac{25g_{0.1} - 9g_{0.5} + 2g_n}{18} + \frac{33g_{0.5} - 25g_{0.1} - 8g_n}{12} + \frac{25g_{0.1} + 20g_n - 45g_{0.5}}{27} \right]$$

$$V = \frac{l}{108} \cdot \left[\begin{array}{ccc} 150g_{0.1} + 297g_{0.5} + 80g_n \\ - 225g_{0.1} - 54g_{0.5} - 72g_n \\ + 100g_{0.1} - 180g_{0.5} + 12g_n \end{array} \right]$$

$$V = \frac{l}{108} (25 \cdot g_{0.1} + 63 \cdot g_{0.5} + 20 \cdot g_n) \dots \dots \dots (A)$$

dzieląc poszczególne wyrazy przez 108 otrzymamy

$$V = l \cdot (0,23 \cdot g_{0.1} + 0,58 \cdot g_{0.5} + 0,19 \cdot g_n) \dots \dots \dots (A')$$

lub po zaokrągleniu na jedno miejsce dziesiętne:

$$V = l \cdot (0,2 \cdot g_{0.1} + 0,6 \cdot g_{0.5} + 0,2 \cdot g_n) \dots \dots \dots (A'')$$

Miąszość strzały, po wstawieniu $g_n = 0$ w równaniu (A'), będzie

$$V = l \cdot (0,23 \cdot g_{0.1} + 0,58 \cdot g_{0.5}) \dots \dots \dots (B)$$

Dokładność praktyczna wzorów (A') i (B):

Porównanie miąszości obliczonych wzorami (A') i (B) z miąszością określoną ksylometrycznie.

Świerk Nr 2.

- Pierśnica $d = 26,55$ cm
- średnica w środku dług. $d_{0.5} = 21,05$ cm
- długość strzały $l = 26,95$ m

Świerk Nr 21.

- Pierśnica $d = 27,65$ cm
- średnica w środku długości $d_{0.5} = 19,15$ cm
- długość strzały $l = 29,55$ m.

Świerk Nr 2.

Sekcje średnice miąższ. ksylom.

m	d cm	m ³
0,0	39,35	0,0763
0,5	29,70	
1,0	27,00	
1,5	26,25	558
2	25,85	
3	25,50	532
4	25,20	512
5	24,95	500
6	24,60	493
7	24,20	481
8	23,80	462
9	23,45	451
10	23,05	433
11	22,50	413
12	22,00	399
13	21,40	369
14	20,70	352
15	19,90	340
16	19,05	309
17	18,05	279
18	17,00	250
19	15,95	221
20	14,85	191
21	13,65	168
22	12,30	247
23	10,70	
24	8,88	143
25	6,25	
26	3,30	

0,8866

trociny 0,0031

miąższ. wierzch. 0,0003

$$V_2 = 0,8900 \text{ m}^3$$

wierzchołek: d = 3,3 cm

$$h = 0,95 \text{ m}$$

Świerk Nr 21

Sekcje średnice miąższ. ksylom.

m	d cm	m ³
0,0	39,55	0,0815
0,5	31,30	
1,0	28,05	
1,5	26,70	565
2	26,10	
3	25,20	529
4	24,45	484
5	23,95	478
6	23,45	459
7	23,00	437
8	22,60	417
9	22,10	401
10	21,60	379
11	21,10	368
12	20,55	350
13	20,05	331
14	19,50	324
15	19,05	303
16	18,50	288
17	17,95	263
18	17,35	255
19	16,60	229
20	15,70	393
21	14,75	
22	13,75	307
23	12,60	
24	11,20	208
25	9,65	
26	7,85	
27	6,00	128
28	3,80	
29	1,50	

0,8711

trociny 0,0028

miąższ. wierzch. 0,00003

$$V_{21} = 0,87393 \text{ m}^3$$

wierzchołek: d = 1,5 cm

$$h = 0,55 \text{ m.}$$

Wymiary i dane dla powyższych strzał zaczerpnięto z pracy G e h r d t a pt.: Eine Studie über die Inhaltsermittlung von Probestämmeln Th. F. J. 1932.

U świerka Nr 2 i 21 sksyłometrował G. strzałę bez wierzchołka. Miąższość wierzchołków obliczono wobec tego stereometrycznie jako stożki oraz dodano do miąższości strzał. Wierzchołek Nr 2 $d = 3,3$ cm, $h = 0,95$ m. Wierzchołek Nr 21: $d = 1,5$ cm, $h = 0,55$ m. Miąższość strzały Nr 2 wyniesie wobec tego $V = 0,8897 + 0,0003 = 0,8900$ m³. Miąższość strzały Nr 21: $V = 0,8739 + 0,00003 = 0,87393$ m³. By oznaczyć miąższość ksylometryczną kłód o długości 10 m, dodano do siebie 10 jednometrowych odcinków strzały plus część trocin t w następujący sposób: Drzewo Nr 2, miąższ. strzały (sksyłometrowanej) = 0,8866 m³, miąższ. 10 jednometr. sekcji 0,5185 m³, miąższ. trocin 0,0031 m³. Miąższ. trocin przypadającą na kłodę obliczono z proporcji: $0,8866 : 0,5185 = 0,0031 : t$, stąd $t = 0,0018$ m³. Miąższ. kłody Nr 2 wyniesie $0,5185 + 0,0018 = 0,5203$ m³. Analogicznie miąższ. kłody Nr 21: $0,4964 + 0,0016 = 0,4980$ m³.

Strzała Nr 2:

Miąższ. ksylometr. $V_k = 0,8900$ m³,
 „ obliczona wzorem sekc. Hubera ⁴⁾ sekcje 2m, $V_H = 0,8515$ m³,

wedle formuлки (B) $V_B = (0,23 \cdot g_{01} + 0,58 \cdot g_{05}) \cdot l$

$l = 26,95$ m, $d_{01} = 25,6$ cm, $d_{05} = 21,05$ cm

$V_B = 0,8632$ m³

Strzała Nr 21:

Miąższ ksylometr. $V_k = 0,8739$ m³

„ wedle wz. sekc. Hubera $V_H = 0,8370$ m³

„ wedle formuлки (B) $V_B = 0,8327$ m³

$l = 29,55$ m, $d_{01} = 25,2$ cm $d_{05} = 19,15$ cm

Kłoda Nr 2:

Miąższ. ksylom $V = 0,5203$ m³

„ wz. sekc. Hubera $V_H = 0,4930$ m³

„ wedle formuлки (A') $V_{A'} = l \cdot (0,23 \cdot g_{01} + 0,58 \cdot g_{05} + 0,19 \cdot g_n)$

$l = 10$ m, $d_{01} = 27,0$ cm, $d_{05} = 24,95$ cm, $d_n = 23,05$ cm

$V_{A'} = 0,4946$ m³

Miąższ. wedle formuлки (A'') $V_{A''} = l \cdot (0,2 \cdot g_{01} + 0,6 \cdot g_{05} + 0,2 \cdot g_n)$

$V_{A''} = 0,4914$ m³

Kłoda Nr 21:

Miąższ ksylometr. $V_k = 0,4980$ m³

„ wz. sekc. Hubera $V_H = 0,4732$ m³

⁴⁾ Wprawdzie G e h r h a r d t obliczył miąższość powyższych strzał wzorem sekcyjnym Smaliana, przy długości sekcji 1 m, zastosowano tu wzór sekcyjny Hubera, gdyż dalsze porównywanie wyprowadzonych formulek odniesiono do sekcyjnego wzoru Hubera. Przyjęto 2 m długości sekcje, gdyż chciano użyć do obliczeń oryginalnych danych a nie uzyskanych z interpolacji (liniowej).

$l=10$ m, $d_{01}=28,05$ cm, $d_{05}=23,95$ cm, $d_n=21,6$ cm

$V_{A'}=0,4727$ m³

$V_{A''}=0,4668$ m³

Pozostałe części strzały (wierzchołkowe):

Miąszsz. ksylom. $V_k=03697$ m³

„ wg wzoru sek. Hubera $V_H=0,3585$ m³

$l=16,95$ m, $d_{01}=22,15$ cm, $d_{05}=16,48$ cm

Miąszsz. wedle form (B) $V_B=03605$ m³

Strzała Nr 21:

Miąszsz. ksylom $V_k=0,3759$ m³

„ wg wzoru sek. Hubera $V_H=0,3638$ m³

„ wedle form.(B) $V_B=0,3740$ m³

$l=19,55$ m, $d_{01}=20,5$ cm, $d_{05}=15,9$ cm.

Jak widzimy z powyższych obliczeń wyprowadzone wzory dają wartości bardzo zbliżone do miąższości otrzymanej metodą sekcijną Hubera, a w niektórych wypadkach (części wierzchołkowe strzały) do miąższkości ksylometrycznej.

Celem zorientowania się w dokładności praktycznej wyprowadzonych wzorów obliczono miąższości 60 kłód i strzał świerkowych⁵⁾ formułkami (A') i (B), a następnie porównano z miąższością określoną wzorem sekcijnym Hubera (sekcje długości 1 m). Również wyliczono miąższość kłód i strzał wedle zwyczajnego sposobu Hubera. Błędy wyrażono procentowo w stosunku do miąższości oznaczonej podanymi wzorami (A') i (B) oraz zwykłym wzorem Hubera.

Poniżej zestawiono wielkości i ilości błędów:

Kłody⁶⁾ $V = 1 \cdot (0,23 \cdot g_{0.1} + 0,58 \cdot g_{0.5} + 0,19 \cdot g_n)$

$$p = 100 \cdot \left(1 - \frac{V \text{ wz. sek. Hubera}}{V \text{ wzorem (A')}} \right)$$

	błędy w procentach	ilość błędów	
	od — do		
plus	2,1 — 3,0	1	maximum = + 2,1%
	1,1 — 2,0	8	minimum = — 2,8%
	0,1 — 1,0	26	
	0,0	2	
minus	0,1 — 1,0	16	
	1,1 — 2,0	6	
	2,1 — 3,0	1	

⁵⁾ Świerk 80 do 90 letni, górski (Rafajłowa), klasa bonit. I., dobrze zwarty. Miąższość liczono bez kory.

⁶⁾ Kloce pochodziły z części dolnej strzały długość kłoców ok. 10 m.

Kłody dla $V = g_{0.5} \cdot 1$

$$p = 100 \cdot \left(1 - \frac{V \text{ wz. sek. Hubera}}{V \text{ wz. zw. Hubera}} \right)$$

	błędy w procentach od — do	ilość błędów	
plus	2,1 — 3,0	2	
	1,1 — 2,0	5	
	0,1 — 1,0	4	
	0,0	0	
	0,1 — 1,0	7	maximum = + 2,6%
	1,1 — 2,0	14	minimum = — 9,9%
	2,1 — 3,0	9	
	3,1 — 4,0	4	
minus	4,1 — 5,0	9	
	5,1 — 6,0	3	
	6,1 — 7,0	1	
	7,1 — 8,0	0	
	8,1 — 9,0	0	
	9,1 — 10,0	2	

Strzała $V = 1 \cdot (0,23 \cdot g_{0.1} + 0,58 \cdot g_{0.5})$

$$p = 100 \cdot \left(1 - \frac{V \text{ wz. sek. Hubera}}{V \text{ wzorem (B)}} \right)$$

	błędy w procentach od — do	ilość błędów	
plus	3,1 — 4,0	4	
	2,1 — 3,0	7	
	1,1 — 2,0	14	maximum = + 3,8%
	0,1 — 1,0	10	minimum = — 3,3%
	0,0	1	
	0,1 — 1,0	10	
minus	1,1 — 2,0	10	
	2,1 — 3,0	3	
	3,1 — 4,0	1	

Strzała dla $V = g_{0.5} \cdot 1$

$$p = 100 \cdot \left(1 - \frac{V \text{ wz. sek. Hubera}}{V \text{ wz. zw. Hubera}} \right)$$

	błędy w procentach od — do	ilość błędów
plus	11,1 — 12,0	1
	10,1 — 11,0	0
	9,1 — 10,0	2
	8,1 — 9,0	0
	7,1 — 8,0	2
	6,1 — 7,0	3
	5,1 — 6,0	3

	4,1 — 5,0	6	maximum = + 11,6%
	3,1 — 4,0	8	minimum = — 9,2%
	2,1 — 3,0	4	
	1,1 — 2,0	5	
	0,1 — 1,0	2	
	0,0	1	
	0,1 — 1,0	8	
	1,1 — 2,0	1	
	2,1 — 3,0	0	
minus	3,1 — 4,0	2	
	4,1 — 5,0	3	
	5,1 — 6,0	3	
	6,1 — 7,0	4	
	7,1 — 8,0	1	
	8,1 — 9,0	0	
	9,1 — 10,0	1	

Tabl. 1

Obliczono	Ilość	Ilość błędów			błąd w % tach		Błąd śred. w % tach	Błąd przeciętny		Oznaczenie sposobu obliczania
		0	+	—	max.	min.		pojed. oblicz.	sumy miąższości	
kłód	60	2	35	23	+2,1	2,8	± 0,9	0,7	+0,07	wzorem (A')
		—	11	49	+2,6	9,9	± 3,4	2,6	1,1	zw. wz. Hubera
strzał	60	1	35	24	+3,8	3,3	± 1,8	1,5	+0,7	wzorem (B)
		1	36	23	+11,6	9,2	± 4,8	4,0	+1,9	zw. wz. Hubera

W tabeli 1. zestawiono dane odnośnie błędów średnich i przeciętnych. Jak widzimy, średni błąd obliczenia miąższości kłody wzorem (A') wynosi $\pm 0,9\%$ w stosunku do sekcyjnej formułki Hubera, zwyczajny natomiast wzór Hubera $\pm 3,4\%$. Wynikało by z tego, że wyprowadzony wzór (A') jest 3,8 razy dokładniejszy od wzoru $V = g_{0,5} \cdot l$.

Błąd przeciętny formułki (A') jest równy $0,7\%$, u zwyczajnego wzoru Hubera zaś $2,6\%$. Są to błędy pojedynczego spostrzeżenia (obliczenia miąższ.). Jeśli chodzi nam o sumę miąższości kłód, to dla wzoru (A') błąd sumy wynosi $+ 0,07\%$, a analogiczny błąd formułki $V = g_{0,5} \cdot l$ jest dużo wyższy, wynoszący $- 1,1\%$. Okazuje się z tego, że zwyczajny wzór Hubera daje za niskie wyniki dla odcinków strzał.

Średni błąd oznaczenia miąższości wzorem (B) dla 60 obliczeń wynosi $\pm 1,8\%$, błąd przeciętny $1,5\%$. Natomiast wzór zwyczajny Hubera wykazuje błąd średni $\pm 4,8\%$, a przeciętny $4,0\%$. Wzór (B) jest więc 2,7 razy dokładniejszy od zwyczajnej formułki Hubera.

Wzór (A'') dla 60 obliczeń miąższości kłód daje błąd średni $\pm 1,5\%$, czyli o $0,6\%$ większy od formułki (A').

Nadmienić tu należy, że dokładnością praktyczną i teoretyczną formuły Hubera dla sosny na tle badań kształtu strzały zajmował się G r o c h o w s k i ⁷⁾.

BŁĘDY TEORETYCZNE ⁸⁾

Celem zbadania teoretycznej dokładności wzoru (A) porównano go z wzorem na miąższość zasadniczych brył matematycznych ściętych (walc, paraboloidy, stożka i nejloidy).

Zasadniczy wzór na objętość ściętych brył wyrażony przez średnice końcowe brzmi:

$$V = \frac{1}{V+1} \cdot \frac{\frac{r+1}{r} g_0 - \frac{r+1}{r} g_n}{\frac{1}{r} g_0 - \frac{1}{r} g_n} \dots\dots\dots (4)$$

Przyjmując stosunek $g_n : g_0 = z^2$ stąd $g_n = g_0 \cdot z^2$, a po wstawieniu do równania (4) będzie:

$$V = \frac{1}{V+1} \cdot \frac{\frac{r+1}{r} g_0 - \frac{r+1}{r} g_0 \cdot z^2}{\frac{1}{r} g_0 - \frac{1}{r} g_0 \cdot z^2}$$

Po wyciągnięciu w liczniku przed nawias $\frac{r+1}{r} g_0$ i uproszczeniu licznika

i mianownika przez $\frac{1}{r} g_0$ otrzymany:

$$V = \frac{g_0 \cdot 1}{r+1} \left(\frac{1 - z^2}{1 - z^{2/r}} \right)$$

We wzorze (A) $V = \frac{1}{108} \cdot (25 \cdot g_{0.1} + 63 \cdot g_{0.5} + 20 \cdot g_n)$ należy wyrazić przekroje $g_{0.1}$ i $g_{0.5}$ przez g_0 i g_n , żeby w ten sposób umożliwić wzajemną porównywalność.

⁷⁾ G r o c h o w s k i J.: Wykładnik kształtu strzały. RNR i L. T. XXIX: Poznań 1933.

⁸⁾ Badania nad błędami teoretycznymi, ich wielkością i przebiegiem w związku z wykładnikiem kształtu i stosunkiem średnic, dla szeregu prostych formułek miąższościowych przeprowadził wyczerpująco W i e l g o s z. Vide jego prace: Teoria dokładności wzorów ksylometrycznych. Poznań 1926 oraz: Paradoks ksylometryczny na tle dokładności wzoru zrównanych średnic krańcowych. RNR i L. Poznań 1937.

Wychodząc z równania $y^2 = p \cdot x^r$ wyznaczmy

$$g_{0.1} = \frac{9 \cdot g_0 + g_n}{10} \quad \text{względnie} \quad g_{0.1} = \left(\frac{9 \cdot g_0 + g_n}{19} \right)^r$$

$$\text{natomiast} \quad g_{0.5} = \frac{g_0 + g_n}{2} \quad \text{lub} \quad g_{0.5} = \left(\frac{g_0 + g_n}{2} \right)^r$$

Podstawiając do równania (A) wartości za $g_{0.1}$ i $g_{0.5}$ otrzymamy:

$$V = \frac{1}{108} \cdot \left[25 \cdot \left(\frac{9 \cdot g_0 + g_n}{10} \right)^r + 63 \cdot \left(\frac{g_0 + g_n}{2} \right)^r + 20 \cdot g_n \right]$$

względnie

$$V = \frac{1}{108} \cdot \left[25 \cdot 10^{-r} \cdot \left(9 \cdot g_0 + g_n \right)^r + 63 \cdot 2^{-r} \cdot \left(g_0 + g_n \right)^r + 20 \cdot g_n \right]$$

przyjmując $g_n = g_0 \cdot z^2$ będzie

$$V = \frac{1}{108} \cdot \left[25 \cdot 10^{-r} \cdot \left(9 \cdot g_0 + g_0 \cdot z^{2/r} \right)^r + \right. \\ \left. + 63 \cdot 2^{-r} \cdot \left(g_0 + g_0 \cdot z^{2/r} \right)^r + 20 \cdot g_0 \cdot z^2 \right]$$

wyłączając g_0 przed nawias otrzymamy:

$$V = \frac{g_0 \cdot 1}{108} \cdot \left[25 \cdot 10^{-r} \cdot \left(9 + z^{2/r} \right)^r + 63 \cdot 2^{-r} \cdot \left(1 + z^{2/r} \right)^r + 20 \cdot z^2 \right]$$

Stosunek miąższości wedle wzoru (4) do tejże wedle wz. (A) jest równy

$$\frac{V \text{ wz. (4)}}{V \text{ wz. (A)}} = \frac{\frac{1}{r+1} \cdot \left(\frac{1-z}{1-z^{2/r}} \right)^{\frac{2r+2}{r}}}{\frac{1}{108} \cdot \left[25 \cdot 10^{-r} \cdot \left(9 + z^{2/r} \right)^r + 63 \cdot 2^{-r} \cdot \left(1 + z^{2/r} \right)^r + 20 \cdot z^2 \right]}$$

$$\text{lub} \\ = \frac{108 \cdot \left(1 - z^{\frac{2r+2}{r}} \right)}{(r+1) \cdot \left(1 - z^{2/r} \right) \left[25 \cdot 10^{-r} \cdot \left(9 + z^{2/r} \right)^r + 63 \cdot 2^{-r} \cdot \left(1 + z^{2/r} \right)^r + 20 \cdot z^2 \right]}$$

zaś w procentach:

$$p = 100 \cdot \left(1 - \frac{V \text{ wz. (4)}}{V \text{ wz. (A)}} \right) = 100 \cdot \left\{ 1 - \frac{108 \left(1 - z^{\frac{2r+2}{r}} \right)}{\left(r+1 \right) \left(1 - z^{2/r} \right) \left[25 \cdot 10^{-r} \left(9 + z^{2/r} \right)^r + 63 \cdot 2^{-r} \cdot \left(1 + z^{2/r} \right)^r + 20 \cdot z^2 \right]} \right\}$$

względnie po przekształceniu:

$$p = 100 \cdot \left\{ 1 - \frac{108 \left(1 - z^{\frac{2r+2}{r}} \right)}{\left(r+1 \right) \cdot \left(1 - z^{2/r} \right) \left[20z^2 + 2^{-r} \cdot \left(5^{2-r} \left\{ 9 + z^{2/r} \right\}^r + 63 \left\{ 1 + z^{2/r} \right\}^r \right) \right]} \right\} \quad (5)$$

dla brył całkowitych:

$$p = 100 \cdot \left\{ 1 - \frac{108}{\left(r+1 \right) \cdot 2^r \left(5^{2-r} \cdot 9^r + 63 \right)} \right\} \quad (5')$$

Wzory (5) i (5') podają różnice między miąższością obliczoną wyprowadzonymi wzorami (A) i (B) a miąższością określoną formułą dla brył matematycznych (4). Różnicę wyrażono w procentach miąższości otrzymanej wzorami (A) i (B).

Rozpatrując procentowe błędy wzorów (A) i (B) w związku z wykładnikiem kształtu, to dla walca wzór (A) jest ścisły, gdyż $g_{0,1} = g_{0,5} = g_n$, stąd

$$V = \frac{1}{108} \cdot (25 \cdot g_{0,1} + 63 \cdot g_{0,5} + 20 \cdot g_n) = g_{0,1} \cdot 1$$

Dla paraboloidy ($r = 1$) i stożka ($r = 2$) błąd również wynosi 0, natomiast dla nejloidy ($r = 3$) błąd waha się od 0 do $-3,44\%$, w zależności od stosunku z . Dla $z = 0,8$ błąd wynosi $0,00\%$, zaś w miarę zmniejszania się z błąd ujemny wzrasta, by przy $z = 0$ osiągnąć $-3,44\%$.

W tabeli 2. zestawiono procentowe błędy w zależności od wykładnika kształtu i stosunku średnic krańcowych z . Np. dla strzał ($z = 0$) przy wykładniku kształtu $r = 0,25$ błąd procentowy wynosi $-11,73\%$, zaś przy $r = 0,50$ $p = -5,47\%$. Nie ma to jednak praktycznego znaczenia, gdyż strzał o tak niskim wykładniku kształtu (tak pełnych) właściwie nie spotyka się. Z teoretycznego punktu widzenia dla $r = 0$ zaś dla $z = 0,8$ do $0,0$

wzór (5) daje ujemne błędy o wartości od $-7,14$ do $-22,72\%$. Nie ma to jednak wpływu na dokładność formułki (A), gdyż wiemy, że nie istnieją bryły o wykładniku kształtu $r = 0$ a $z = 0,8$ do $0,0$. Tylko w jednym wypadku dla $r = 0$ $z = 1,0$, ale wtedy błąd wzorem (5) wyliczony wynosi $0,0\%$.

TABL. 2. BŁĘDY TEORETYCZNE W PROCENTACH:

$$p = 100 \cdot \left(1 - \frac{\text{miąższ. bryły matematycznej}}{\text{miąższ. oblicz. wzorem (A)}} \right)$$

$$z = d_n : d_0$$

r \ z	1,0	0,8	0,6	0,4	0,2	0,0
0,00	0,00	—	—	—	—	—
0,25	—	-0,36	-3,05	-7,34	-10,84	-11,73
0,50	—	-0,05	-0,57	-2,12	-4,60	-5,47
0,75	—	-0,01	-0,10	-0,46	-1,24	-1,91
1,00	—	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
1,25	—	0,00	+0,03	+0,10	+0,35	+0,83
1,50	—	0,00	+0,02	+0,18	+0,56	+0,96
1,75	—	0,00	+0,01	+0,05	+0,19	+0,63
2,00	—	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
2,25	—	0,00	-0,01	-0,05	-0,18	-0,80
2,50	—	0,00	-0,02	-0,09	-0,36	-1,67
2,75	—	0,00	-0,02	0,13	-0,51	-2,58
3,00	—	0,00	-0,03	-0,16	-0,64	-3,44
3,50	—	0,00	0,04	-0,21	-0,86	-5,00

CHARAKTERYSTYKA WYPROWADZONYCH FORMUŁEK MIĘZSZOŚCIOWYCH.

Na podstawie przytoczonych obliczeń wynika, że wzór:

$$V = 1 \cdot (0,23 \cdot g_{0,1} + 0,58 \cdot g_{0,5} + 0,19g_n)$$

określający miąższość kłód przy pomocy trzech przekrojów daje wyniki wcale ściśle, o błędzie średnim $\pm 0,9$ w stosunku do metody sekcyjnej Hubera (1 m sekcje).

Wzór o czynnikach zaokrąglonych do jednego miejsca dziesiętnego określa miąższość o około $0,5\%$ za nisko w porównaniu z formułką o czynnikach na dwa miejsca dziesiętne.

Jeśli chodzi o określenie miąższości całych strzał, to formułka $V = 1 \cdot (0,23 \cdot g_{0,1} + 0,58 \cdot g_{0,5})$ daje błąd średni $\pm 1,8\%$ w stosunku do wzoru sekcyjnego Hubera.

Biorąc pod uwagę wyniki porównań z miąższością otrzymaną ksylo-metrem i wzorem sekcyjnym Hubera (str. 5 i 6) okazuje się, że wyprowa-dzone formułki dają wartości bardzo zbliżone do metody sekcyjnej Hu-bera.

Odnoszenie ekonomiki czasu i dogodności użycia tych wzorów w praktyce zauważyć należy, że praca w lesie nie zabiera wiele czasu, wyznaczenie miejsc pomiaru (średnic) na strzale uskutecznia się wprost (dzielenie długości przez 2 i 10 w pamięci) bez żadnych działań rachunkowych na papierze.

Dalszą zaletę wyprowadzonych wzorów stanowi możliwość scharakteryzowania elementów kształtu strzał i innych formułek miąższości (Huber), co stanowi temat oddzielnych prac.

Wyniki dokładności podanych wzorów dotyczą strzał świerkowych, 80 — 90-letnich, rosnących na siedlisku górskim I kl. bonitacyjnej. Przydatność (dokładność praktyczna) wymienionych formułek w odniesieniu do innych gatunków drzew należałoby ustalić na podstawie dalszych prób.

Lwów, w roku 1940.

S U M M A R Y

The author gives a formula for calculating the volume of the stem and of its divisions on the base of a forming curve $g = a + bx + cx^2$.

The formula is: $v = (0,23 g_{0,1} + 0,58 g_{0,5} + 0,19 g_n) \cdot l$ where $g_{0,1}$, $g_{0,5}$ and g_n are the cross-sections at $1/10$, at $1/2$ and at the top of each division, and l — the length of the divisions.

The author aimed at supplying a simple formula containing a limited number of cross-sections, but sufficiently exact for partly replacing the section formula; further, after a suitable transformation, for helping in defining the full-bodiness' characteristics of stems, as well as for testing the exactness of other formulas including the cross-sectioning $g_{0,5}$ (Huber's formula in order to examine the designed formula for practical exactness. 60 stems and 60 stem divisions of sprucetrees were calculated and compared with Huber's formula for 1 met. divisions.

The obtained errors were: for all length stems — mean error $\pm 1,8\%$, maximum $+ 3,8\%$, minimum $3,3\%$; for ± 10 meter butt-end divisions the mean error was $\pm 0,9\%$, maximum $+ 2,1\%$, minimum $- 2,8\%$.

The volumes of the same stems and divisions, calculated by using the Huber ordinary formula disclosed a mean error of $\pm 4,8\%$ i $\pm 3,4\%$, the maximums being $+ 11,6\%$ and $+ 2,6\%$, and the minimums $- 9,2\%$ and $- 9,9\%$ respectively.

The obtained theoretical precisions were: with entire blocks: for $r = 0,1$ and $2 - 0\%$ error, for $r = 3 - 3,44\%$ error.

The errors with intermediate blocks, positive and negative, did not exceed $5,47\%$.

It might seem on the base of these figures, that the formula is useful to a certain degree as a substitute for divisions formulas.

The full-bodiness' characteristics of stems, Huber's formula, as well as the calculation of divisions upon the base of top diameters, using the elaborated formula, will be negotiated in separate studies.