

MACIEJ PACH, RAFAŁ PODLASKI

Modele struktury grubości w dwu- i wielopiętrowych drzewostanach z udziałem jodły *Abies alba* Mill. i buka *Fagus sylvatica* L.

Models of diameter structure in two- and multi-storied stands with fir *Abies alba* Mill. and beech *Fagus sylvatica* L.

ABSTRACT

Pach M., Podlaski R. 2015. Modele struktury grubości w dwu- i wielopiętrowych drzewostanach z udziałem jodły *Abies alba* Mill. i buka *Fagus sylvatica* L.. Sylwan 159 (8): 632-638.

The objectives of the study were (1) to determine the models of diameter at breast height (dbh) distributions in two- and multi-storied mixed stands with fir *Abies alba* Mill. and beech *Fagus sylvatica* L. as well as (2) to assess the usefulness of single Weibull distribution and two-component mixture of Weibull distribution to approximation of empirical dbh distributions for distinguished models of dbh structures. In the Świętokrzyskie Mountains, 21 sample plots ranging in size from 0.2 to 0.4 ha were established. To identify the models of dbh distributions, in two- and multi-storied stands with similar empirical dbh distributions, the hierarchical cluster analysis (HCA) with the Jaccard's measure and the Ward's minimum variance agglomeration method were used. To approximate dbh distributions, the single Weibull distribution and the two-component mixture of Weibull distribution were employed. In two- and multi-storied mixed stands with fir and beech, with the mean age between 50 and 70 at the dbh, four models of dbh distributions were determined (fig. 1). Two of them were decreasing, strongly asymmetric (OS and OJ models; fig. 2) and the other two were increasing in the initial phase and decreasing in the final, having two maximums (DM1 and DM2 models; fig. 3). In the stands with the complex structure mixed distribution should be used to approximate empirical data. The analysis revealed high suitability and versatility of Weibull distribution both as single form and two-component mixture.

KEY WORDS

tree diameter modelling, forest complex structure, Weibull mixture model

ADDRESSES

Maciej Pach ⁽¹⁾ – e-mail: rlpach@cyf-kr.edu.pl

Rafał Podlaski ⁽²⁾ – e-mail: r_podlaski@pro.onet.pl

⁽¹⁾ Zakład Szczegółowej Hodowli Lasu, Uniwersytet Rolniczy w Krakowie; al. 29 Listopada 46, 31-425 Kraków

⁽²⁾ Zakład Ochrony Przyrody i Fizjologii Roślin, Uniwersytet Jana Kochanowskiego; ul. Świętokrzyska 15, 25-406 Kielce

Wstęp

Lasy mieszane z udziałem jodły *Abies alba* Mill. i buka *Fagus sylvatica* L. cechują się złożoną teksturą. Płatowe różnicowanie lasu zwiększa bioróżnorodność strukturalną całego ekosystemu. W tym kontekście bioróżnorodność nie jest związana ze składem gatunkowym, ale z organizacją

strukturalną ekosystemu, czyli ze stopniem zróżnicowania cech drzew tworzących drzewostan [Noss 1990]. Płaty lasu charakteryzujące się m.in. różną strukturą grubości mają na ogół wielkość od kilku arów do kilku, czasem kilkunastu hektarów [Splechna, Gratzer 2005; Rozenberger i in. 2007]. Lasy dwu- i wielopiętrowe z jodłą i bukiem odznaczają się jedno-, dwu- i wielomodalnymi, niesymetrycznymi rozkładami pierśnic [Jaworski, Podlaski 2012].

Modele struktury grubości mogą być wykorzystywane do generowania rozkładów pierśnic i następnie do modelowania rozwoju drzewostanów przy pomocy modeli pojedynczego drzewa. W Polsce modele wzrostu zbudowane przez Bruchwalda i współpracowników pozwalają na prognozowanie krótko- i długookresowych zmian zasobów leśnych [Bruchwald, Zasada 2010]. Dotychczas opracowano modele wzrostu m.in. dla sosny [Bruchwald 1985, 1986], świerka [Bruchwald i in. 1999], jodły [Zasada 1999], dębu szypułkowego [Bruchwald i in. 1996], buka [Bruchwald i in. 1998] i brzozy [Bruchwald i in. 2001]. Poznanie dynamiki struktury grubości drzewostanów jest podstawą naturalnego kierunku hodowli lasu, w ramach którego należy m.in. zwiększać bioróżnorodność strukturalną ekosystemów leśnych. Monitorowanie zmian bioróżnorodności strukturalnej powinno być prowadzone zarówno w lasach objętych różnymi formami ochrony, jak i w lasach gospodarczych.

Prace dotyczące struktury pierśnic w drzewostanach o złożonej budowie z jodłą i bukiem koncentrowały się przede wszystkim na lasach przerębowych [Paluch 2005; Jaworski i in. 2007]. Lasy dwu- i wielopiętrowe były badane głównie pod kątem oceny zgodności rozkładów empirycznych z wybranymi rozkładami teoretycznymi [Podlaski, Zasada 2008; Podlaski 2011a, b].

Celem pracy było (1) wyodrębnienie modeli rozkładów pierśnic w mieszanych drzewostanach dwu- i wielopiętrowych z udziałem jodły i buka oraz (2) ocenienie przydatności pojedynczego rozkładu Weibulla i rozkładu mieszanego złożonego z dwóch rozkładów składowych Weibulla do aproksymacji empirycznych rozkładów pierśnic dla wyróżnionych modeli struktury grubości.

Material i metody

W pracy wykorzystano dane z powierzchni badawczych założonych w Górach Świętokrzyskich na obszarze ograniczonym współrzędnymi 50°54'-50°55' N, 20°36'-20°37' E (w Rezerwacie Sufraganiec: skrótowy nazw powierzchni stosowane w dalszej części pracy: Suf) oraz 50°50'-50°53' N, 21°01'-21°05' E (w Świętokrzyskim Parku Narodowym: ŚPN). W drzewostanach dwu- i wielopiętrowych, głównie na siedlisku LG i Lśw, wybrano 21 powierzchni badawczych o wielkości od 0,2 do 0,4 ha, na których zmierzono pierśnice (od 7,0 cm) wszystkich żywych drzew, a następnie z pni przynajmniej 15 drzew (przede wszystkim jodeł i buków) pobrano na wysokości 1,3 m nad powierzchnią gruntu po jednym wywiercie. Opis procedury wyboru powierzchni oraz szczegółowa charakterystyka prac terenowych znajdują się w pracy Podlaskiego i Pacha [2015].

W celu wyodrębnienia modeli rozkładów pierśnic, czyli grup dwu- i wielopiętrowych drzewostanów o zbliżonych empirycznych rozkładach pierśnic, zastosowano analizę skupień (HCA). Każdy drzewostan został scharakteryzowany przez 20 zmiennych: frakcje liczby drzew (10 zmiennych) i frakcje pola powierzchni przekroju pierśnicowego (10 zmiennych) w 10-centymetrowych przedziałach od 7 do 107 cm. Dokładny opis zastosowanego sposobu grupowania powierzchni znajduje się w pracy Podlaskiego i Pacha [2015].

Do aproksymacji rozkładów pierśnic zastosowano pojedynczy rozkład Weibulla:

$$f_x(x | \alpha, \beta, \gamma) = \frac{\alpha}{\beta} \left(\frac{x - \gamma}{\beta} \right)^{\alpha - 1} e^{-\left(\frac{x - \gamma}{\beta} \right)^\alpha} \quad [1]$$

oraz rozkład mieszany złożony z dwóch rozkładów składowych Weibulla:

$$f_{(Weib)_X}(x|\Psi) = \pi_1 f_{(Weib)_1}(x|\theta_1) + \pi_2 f_{(Weib)_2}(x|\theta_2) \quad [2]$$

gdzie:

α – parametr kształtu,

β – parametr skalujący,

pierśnica $x \geq$ parametr przesunięcia γ ,

π_1, π_2 – wagi (frakcje) rozkładów składowych Weibulla $f_{(Weib)_1}(\cdot), f_{(Weib)_2}(\cdot)$,

θ_1, θ_2 – wektory parametrów dla rozkładów składowych,

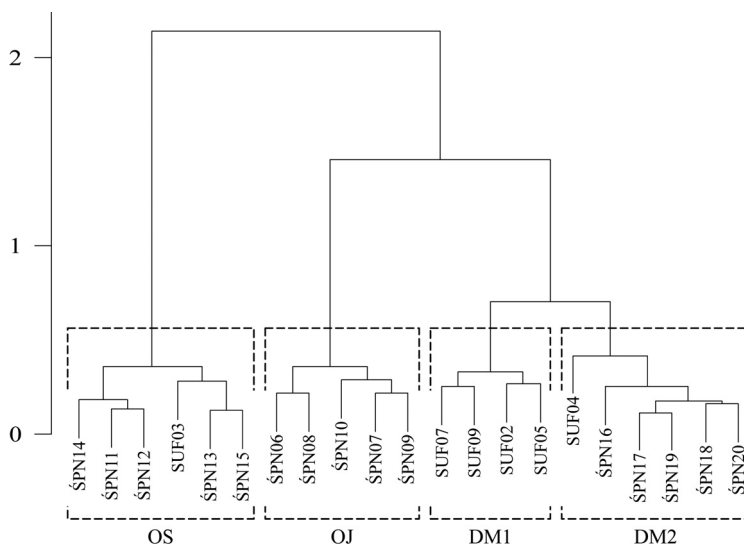
Ψ – zestaw wszystkich parametrów danego rozkładu mieszanego.

Do obliczenia parametrów rozkładów zastosowano standardową procedurę wykorzystującą metodę największej wiarygodności (MLE) i bazującą na algorytmie EM połączonym z metodą Newtona [Böhning 2000]. Obliczenia przeprowadzono według schematu postępowania zaproponowanego w opracowaniach Podlaskiego [2011a, b], łączącego dwie metody wyboru wartości startowych dla procedury numerycznej (min.k/max.k, dla k=1, 3, 6 oraz 0,5/1,5/średnia). W celu oceny zgodności dopasowania wykorzystano test zgodności χ^2 [Macdonald, Pitcher 1979; Reynolds i in. 1988]. Wszystkie analizy statystyczne i obliczenia przeprowadzono w środowisku R (www.r-project.org).

Wyniki

W analizowanych drzewostanach dominowały jodła i buk. Średnie pole powierzchni przekroju pierścicowego dla tych gatunków wynosiło odpowiednio 23,89 oraz 3,93 m²/ha. Pozostałe gatunki, przede wszystkim świerk *Picea abies* (L.) Karst., sosna *Pinus sylvestris* L., dęby *Quercus robur* L. i *Q. petraea* [Matt.] Liebl. oraz olsza *Alnus glutinosa* (L.) Gaertn., występowały w mniejszej ilości. Średnia liczba drzew przyjęła wartość 552 pni/ha, natomiast średni wiek pierścicowy wynosił od 50 do 70 lat.

Analiza skupień pozwoliła na identyfikację czterech modeli dla drzewostanów dwu- i wielopiętrowych (ryc. 1). W przypadku drzewostanów należących do modelu OS (obrócony sigmoidalny) średnia pierśnica przyjmowała wartość 21,7, odchylenie standardowe pierśnic wynosiło 12,5 cm, maksymalna pierśnica osiągnęła 95 cm, średnie wartości współczynnika skośności i współczynnika spłaszczenia wynosiły odpowiednio 0,97 i 2,41. Najwięcej drzew miało pierśnicę 7-11 cm, w najliczniejszym stopniu grubości znajdowało się ponad 200 drzew/ha (ryc. 2). Model OS jest dokładnie aproksymowany przez rozkład mieszany złożony z dwóch rozkładów składowych Weibulla. Losowo wybrany rozkład reprezentujący model OS (ŚPN14) ma następujące wartości parametrów: $\gamma=6,9999$, $\pi_1=0,58$, $\alpha_1=1,567$, $\beta_1=14,789$ oraz $\pi_2=0,42$, $\alpha_2=4,828$ i $\beta_2=45,211$ (ryc. 2). W przypadku modelu OJ (odwrócony J-kształtny) średnia pierśnica przyjmowała wartość 19,5 cm, odchylenie standardowe pierśnic wynosiło 16,3 cm, maksymalna pierśnica osiągnęła 100 cm, średnie wartości współczynnika skośności i współczynnika spłaszczenia wynosiły odpowiednio 1,88 i 4,09. Drzewostany należące do tej grupy cechowały się największymi wartościami maksymalnej pierśnicy. Najwięcej drzew posiadało pierśnicę 7-11 cm, a w najliczniejszym stopniu grubości znajdowało się ponad 100 drzew/ha (ryc. 2). Model OJ jest precyzyjnie aproksymowany przez pojedynczy rozkład Weibulla. Losowo wybrany rozkład reprezentujący model OJ (ŚPN06) ma następujące wartości parametrów: $\gamma=6,9999$, $\alpha=0,599$ oraz $\beta=8,822$ (ryc. 2). W drzewostanach należących do grupy modelu DM1 (dwumodalny M-kształtny) średnia pierśnica przyjmowała wartość 29,4, odchylenie standardowe pierśnic wynosiło 16,9 cm, maksymalna pierśnica osiągnęła 75 cm, średnie wartości współczynnika skośności i współczynnika spłaszczenia wynosiły

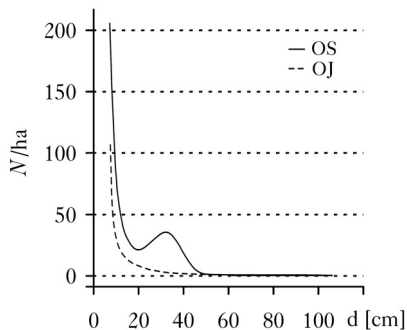


Ryc. 1.

Grupowanie rozkładów pierśnic drzewostanów jednopiętrowych metodą HCA (miara Jaccarda, aglomeracja metodą minimalnej wariancji Warda)

Classification of diameter distributions in single-storied stands according to HCA method (Jaccard's measure and the Ward's minimum variance agglomeration)

OS – model obrócony sigmoidalny; OJ – model odwrócony J-kształtny; DM1, DM2 – modele dwumodalne M-kształtne
 OS – rotated sigmoid model; OJ – reverse J-shaped model; DM1, DM2 – bimodal M-shaped models

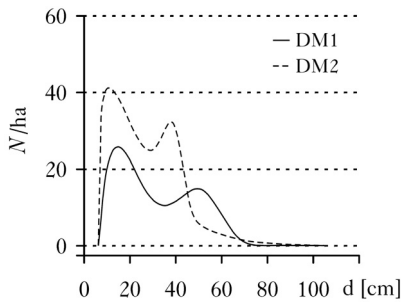


Ryc. 2.

Losowo wybrane rozkłady Weibulla (pojedynczy i mieszany złożony z dwóch komponentów) reprezentujące modele OS i OJ

Randomly selected the Weibull distributions (the single and the two-component mixture) representing models OS and OJ

odpowiednio 0,67 i -0,55. Drzewostany należące do tej grupy cechowały się największymi wartościami średniej pierśnicy i odchylenia standardowego. Najwięcej drzew posiadało pierśnicę 11-21 cm (maksimum globalne) oraz 47-57 cm (maksimum lokalne), a w najliczniejszym stopniu grubości znajdowało się prawie 25 drzew/ha (ryc. 3). Model DM1 jest dokładnie aproksymowany przez rozkład mieszany złożony z dwóch rozkładów składowych Weibulla. Losowo wybrany rozkład reprezentujący model DM1 (Suf05) ma następujące wartości parametrów: $\gamma=6,9999$, $\pi_1=0,45$, $\alpha_1=1,749$, $\beta_1=9,955$ oraz $\pi_2=0,55$, $\alpha_2=4,862$ i $\beta_2=28,446$ (ryc. 3). W drzewostanach należących do modelu DM2 (dwumodalny M-kształtny) średnia pierśnica przyjmowała wartość 28,3, odchylenie standardowe pierśnic wynosiło 15,6 cm, maksymalna pierśnica osiągnęła 91 cm, średnie wartości współczynnika skośności i współczynnika spłaszczenia wynosiły odpowiednio 0,72 i -0,08. Najwięcej drzew posiadało pierśnicę 7-17 cm (maksimum globalne) oraz 37-43 cm (maksimum lokalne), a w najliczniejszym stopniu grubości znajdowało się ponad 40 drzew/ha



Ryc. 3.

Losowo wybrane rozkłady mieszane złożone z dwóch komponentów Weibulla reprezentujące modele DM1 i DM2

Randomly selected the two-component mixtures of Weibull distribution representing models DM1 and DM2

(ryc. 3). Model DM2 jest dokładnie aproksymowany przez rozkład mieszany złożony z dwóch rozkładów składowych Weibulla. Losowo wybrany rozkład reprezentujący model DM2 (ŚPN16) ma następujące wartości parametrów: $\gamma=6,9999$, $\pi_1=0,82$, $\alpha_1=1,181$, $\beta_1=19,500$ oraz $\pi_2=0,18$, $\alpha_2=7,487$ i $\beta_2=32,396$ (ryc. 3).

Test zgodności χ^2 wykazał, że zastosowane rozkłady teoretyczne (pojedynczy i mieszany) poprawnie aproksymowały dane empiryczne w przypadku 18 powierzchni. Średnie wartości statystyki χ^2 i granicznego poziomu istotności p wynosiły odpowiednio 49,47 i 0,3344 dla rozkładu pojedynczego oraz 39,51 i 0,2679 dla rozkładu mieszanego.

Dyskusja

Rozkłady pierśnic drzew należą do najważniejszych charakterystyk drzewostanów, wykorzystywanych m.in. podczas analizy dynamiki lasu. W celu generowania rozkładów pierśnic i modelowania rozwoju lasu stosowane są dwie podstawowe metody. Pierwsza z nich bazuje na rozkładach teoretycznych, natomiast druga na podobieństwach rozkładów pierśnic między różnymi drzewostanami o zbliżonej budowie. Parametry rozkładów teoretycznych są obliczane podczas aproksymacji lub na podstawie zależności między zmiennymi drzewostanowymi a parametrami modeli teoretycznych. Coraz częściej stosowane są koncepcje złożone, łączące obie powyższe metody i bazujące np. na podejściu bayesowskim, w którym wykorzystywane są informacje *a priori* (uzyskane w wyniku zastosowania metody 2) i *a posteriori* (uzyskane po zastosowaniu metody 1) [Mehtätalo, Kangas 2005]. Prezentowane podejścia wymagają znajomości modeli rozkładów pierśnic dla drzewostanów o różnej budowie [Mehtätalo i in. 2011].

W wielopiętrowych lasach z udziałem jodły i buka występują rozkłady pierśnic o różnym kształcie, najczęściej są to rozkłady odwrócone sigmoidalne, dwumodalne i jednomodalne, silnie asymetryczne [Emborg i in. 2000; von Oheimb i in. 2005]. Odnowienie jodłowe i bukowe powstaje w lukach oraz pod okapem drzewostanu. Procesy wydzielania drzew i odnowienia zachodzą z różną dynamiką, a prowadzone cięcia cechują się różną intensywnością. Zmniejszenie dynamiki tych procesów i intensywności cięć powoduje powstawanie rozkładów wielomodalnych, które z czasem wygładzają się i przybierają postać krzywej odwróconej sigmoidalnej lub krzywej jednomodalnej, silnie asymetrycznej. Z kolei jednorazowe zwiększenie liczby wydzielonych lub usuniętych drzew prowadzi do utworzenia krzywej dwumodalnej. Powyższe mechanizmy powstawania rozkładów pierśnic są potwierdzone przez symulacje [Rademacher i in. 2004].

Przedstawione modele struktury grubości zostały opracowane dla drzewostanów w średnim wieku pierśnicowym 50-70 lat, znajdujących się w stadium dorastania (lasy naturalne) lub w okresie drzewostanu dojrzałego (lasy gospodarcze). Drzewostany z jodłą i bukiem w średnim wieku pierśnicowym o tej wartości dominowały na badanych terenach. Rozkłady pierśnic należy analizować, uwzględniając odpowiednio stadium lub okres dynamiki drzewostanu naturalnego

i gospodarczego. Powiązanie tych elementów umożliwia prognozowanie zmian zasobów leśnych oraz generowanie rozkładów pierśnic drzew w różnych stadiach i okresach rozwoju lasu.

Model mieszany złożony z dwóch rozkładów składowych Weibulla ma dużo większe możliwości w porównaniu do pojedynczego rozkładu Weibulla, ponieważ precyzyjnie aproksymuje nie tylko rozkłady silnie asymetryczne, ale również posiadające dwa ekstrema. Rozkłady mieszane okazały się bardzo użyteczne zarówno do modelowania danych empirycznych [Liu i in. 2002; Zhang i in. 2001; Gove i in. 2008], jak i podczas wydzielania podpopulacji [Zasada, Cieszewski 2005; Podlaski, Roesch 2014].

Podsumowanie

W mieszanych drzewostanach dwu- i wielopiętrowych z udziałem jodły i buka, o średnim wieku pierśnicowym od 50 do 70 lat, utworzono cztery modele rozkładów pierśnic. Były to rozkłady malejące, silnie asymetryczne (modele OS i OJ) oraz rozkłady w początkowej fazie rosnące, a w końcowej fazie malejące, posiadające dwa maksima (modele DM1 i DM2). W drzewostanach o złożonej budowie należy do aproksymacji danych rzeczywistych stosować oprócz rozkładów pojedynczych rozkłady mieszane. Rozkład Weibulla potwierdził wysoką przydatność i uniwersalność zarówno w formie pojedynczej, jak i w postaci mieszaniny dwóch rozkładów.

Literatura

- Böhning D. 2000. Computer-Assisted Analysis of Mixtures and Applications. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton.
- Bruchwald A. 1985. Model wzrostowy MDI-1 dla sosny. Las Pol. 9: 10-15.
- Bruchwald A. 1986. Simulation growth model MDI-1 for Scots pine. Ann. Warsaw Agricult. Univ.- SGGW-AR, For. and Wood Technol. 34: 47-52.
- Bruchwald A., Dudek A., Michalak K., Rymer-Dudzińska T., Wróblewski L., Zasada M. 1999. Model wzrostu dla drzewostanów świerkowych. Sylwan 143 (1): 19-31.
- Bruchwald A., Dudzińska M., Wirowski M. 1996. Model wzrostu dla drzewostanów dębu szypułkowego. Sylwan 140 (10): 35-44.
- Bruchwald A., Dudzińska M., Wirowski M. 1998. Model wzrostu buka. Dokumentacja naukowa IBL.
- Bruchwald A., Rymer-Dudzińska T., Dudek A., Michalak K., Wróblewski L., Zasada M., Tomusiak R. 2001. Model wzrostu dla drzewostanów brzoźowych. Dokumentacja naukowa w Zakładzie Dendrometrii i Nauki o Produkcyjności Lasu, Warszawa.
- Bruchwald A., Zasada M. 2010. Model wzrostu modrzewia europejskiego (*Larix decidua* Mill.). Sylwan 154 (9): 615-624.
- Emborg J., Christensen M., Heilmann-Clausen J. 2000. The structural dynamics of Suserup Skov, a near-natural temperate deciduous forest in Denmark. For. Ecol. Manage. 126: 173-189.
- Gove J. H., Ducey M. J., Leak W. B., Zhang L. 2008. Rotated sigmoid structures in managed uneven-aged northern hardwood stands: a look at the Burr Type III distribution. Forestry 81: 161-176.
- Jaworski A., Paluch J., Pach M., Kołodziej Z., Majerczyk K. 2007. Charakterystyka lasów przerębowych w wybranych nadleśnictwach Regionalnej Dyrekcji Lasów Państwowych w Krakowie. Sylwan 151 (6): 34-52.
- Jaworski A., Podlaski R. 2012. Modelling irregular and multimodal tree diameter distributions by finite mixture models: an approach to stand structure characterisation. J. For. Res. 17: 79-88.
- Liu C., Zhang L., Davis C. J., Solomon D. S., Gove J. H. 2002. A finite mixture model for characterizing the diameter distribution of mixed species forest stands. For. Sci. 48: 653-661.
- Macdonald P. D. M., Pitcher T. J. 1979. Age-groups from size-frequency data: a versatile and efficient method of analyzing distribution mixtures. J. Fish. Res. Board. Can. 36: 987-1001.
- Mehtätalo L., Comas C., Pukkala T., Palahi M. 2011. Combining a predicted diameter distribution with an estimate based on a small sample of diameters. Can. J. For. Res. 41: 750-762.
- Mehtätalo L., Kangas A. 2005. An approach to optimizing data collection in an inventory by compartments. Can. J. For. Res. 35: 100-112.
- Noss R. F. 1990. Indicators for monitoring biodiversity: A hierarchical approach. Conserv. Biol. 4: 355-364.
- von Oheimb G., Westphal C., Tempel H., Härdtle W. 2005. Structural pattern of a near-natural beech forest (*Fagus sylvatica*) (Serrahn North-east Germany). For. Ecol. Manage. 212: 253-263.
- Paluch J. 2005. Spatial distribution of regeneration in West-Carpathian uneven-aged silver fir forests. Eur. J. For. Res. 124: 47-54.
- Podlaski R. 2011a. Modelowanie rozkładów pierśnic drzew z wykorzystaniem rozkładów mieszanych. I. Rozkłady mieszane: definicja, charakterystyka, estymacja parametrów. Sylwan 155 (4): 244-252.

- Podlaski R. 2011b. Modelowanie rozkładów pierśnic drzew z wykorzystaniem rozkładów mieszanych. II. Aproksymacja rozkładów pierśnic w lasach wielopiętrowych. *Sylwan* 155 (5): 293-300.
- Podlaski R., Pach M. 2015. Modele struktury grubości w jednopiętrowych drzewostanach z udziałem jodły *Abies alba* Mill. i buka *Fagus sylvatica* L. *Sylwan* 159 (7): 586-592.
- Podlaski R., Roesch F. A. 2014. Modelling diameter distributions of two-cohort forest stands with various proportions of dominant species: A two-component mixture model approach. *Math. Biosci.* 249: 60-74.
- Podlaski R., Zasada M. 2008. Comparison of selected statistical distributions for modelling the diameter distributions in near-natural *Abies-Fagus* forests in the Świętokrzyski National Park (Poland). *Eur. J. For. Res.* 127: 455-463.
- Rademacher C., Neuert C., Grundmann V., Wissel C., Grimm V. 2004. Reconstructing spatiotemporal dynamics of Central European natural beech forests: the rule-based forest model BEFORE. *For. Ecol. Manage.* 194: 349-368.
- Reynolds M. R., Burk T., Huang W-H. 1988. Goodness-of-fit tests and model selection procedures for diameter distribution models. *For. Sci.* 34: 373-399.
- Rozenbergar D., Mikac S., Anic I., Diaci J. 2007. Gap regeneration patterns in relationship to light heterogeneity in two old-growth beech-fir forest reserves in South East Europe. *Forestry* 80: 431-443.
- Splechtna B. E., Gratzner G. 2005. Natural disturbances in Central European forests: approaches and preliminary results from Rothwald, Austria. *For. Snow. Landsc. Res.* 79: 57-67.
- Zasada M. 1999. The growth model for fir (*Abies alba* Mill.). *Fol. For. Pol. ser A.* 41: 37-46.
- Zasada M., Cieszewski C. J. 2005. A finite mixture distribution approach for characterizing tree diameter distributions by natural social class in pure even-aged Scots pine stands in Poland. *For. Ecol. Manage.* 204: 145-158.
- Zhang L., Gove J. H., Liu C., Leak W. B. 2001. A finite mixture distribution for modeling the diameter distribution of rotated-sigmoid, uneven-aged stands. *Can. J. For. Res.* 31: 1654-1659.