

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ГАРМОНИЧЕСКИХ ВОЛН С ТОНКИМ УПРУГИМ КРУГОВЫМ ВКЛЮЧЕНИЕМ В УСЛОВИЯХ ПОЛНОГО СЦЕПЛЕНИЯ С МАТРИЦЕЙ

Лариса Вахонина

Николаевский национальный аграрный университет

54020, г. Николаев, ул. Парижской коммуны, 9. E-mail: vahonina@mnau.edu.ua

Larisa Vakhonina

Nikolaev National Agrarian University

54020, Nikolaev, st. Paris Commune, 9. E-mail: vahonina@mnau.edu.ua

Аннотация. В статье изложено решение задачи об определении концентрации напряжений вблизи тонкого упругого включения в виде кругового диска, которое находится в неограниченном упругом теле (матрице). На включение действуют гармонические осесимметричные упругие волны (ось симметрии проходит через центр включения). Включение предполагается полностью сцепленным с матрицей. Метод решения основывается на представлении перемещений отражённой волны разрывным решением уравнений Ламе. Это даёт возможность после реализации граничных условий свести исходную задачу к системе интегральных уравнений относительно скачков напряжений на срединной плоскости включений. После ряда преобразований эта система уравнений приводится к системе интегральных уравнений Фредгольма второго рода. Решение этой системы находится численно коллокационным методом. С помощью найденного решения исследована зависимость напряженного состояния вблизи включения от частоты волн и отношения упругих постоянных матрицы и включения.

Ключевые слова: концентрация напряжений, круговое упругое включение, осесимметричные волны.

ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ

Современные проблемы динамической механики разрушения, усовершенствование методов неразрушаемого контроля и дефектоскопии, задачи механики композитов требуют дальнейшего развития и усовершенствования методов решения задач динамического взаимодействия тонкостенных включений с окружающей средой.

АНАЛИЗ ПОСЛЕДНИХ ИССЛЕДОВАНИЙ И ПУБЛИКАЦИЙ

Во многих случаях включения имеют жесткость значительно большую чем матрица то распространенным является подход, когда включение считается абсолютно жестким. Например, такое предположение реализовано в работах [1],[2],[3]. Значительно меньше работ в которых учтены упругие свойства включений. Прежде всего, отметим работы [4],[5],[6], где с помощью асимптотического метода решены задачи о динамическом нагружении с

дископодобным включением малой жесткости. В данной работе предлагается решение задачи про гармонические колебания неограниченного тела с тонким дископодобным включением, жесткость которого превышает или сравнима с жесткостью матрицы. При этом считается, что между матрицей и включением выполняются условия полного сцепления.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть в неограниченном упругом теле (матрице) находится упругое включение в виде тонкой круговой пластины толщиной h и радиуса a ($h \ll a$). Если ввести цилиндрическую систему координат, начало которой совпадает с центром включения, то в плоскости $z = 0$ оно займет круг $r \leq a, 0 \leq \theta < 2\pi$. В матрице происходят осесимметричные колебания в результате распространения в ней упругих волн. Допускаются следующие случаи волнового воздействия. В первом случае распространяется плоская продольная волна, фронт которой параллелен плоскости включения. Потенциал этой волны и вызванные ею перемещения равны:

$$\varphi_0 = \frac{A_0 e^{i\kappa_1 z}}{\kappa_1}, \quad u_z^0 = iA_0 e^{i\kappa_1 z}, \quad u_r^0 = 0. \quad (1)$$

Во втором случае в матрице распространяются цилиндрические продольные волны. Потенциал [7] и перемещения, вызванные этими волнами, определяются по формулам:

$$\varphi_0(r, z) = \frac{A_0}{\beta_1} J_0(\beta_1 r) e^{i\gamma z}, \quad u_z^0 = \frac{i\gamma A_0}{\beta_1} J_0(\beta_1 r) e^{i\gamma z},$$

$$u_r^0 = -A_0 J_0(\beta_1 r) e^{i\gamma z}. \quad (2)$$

В третьем случае распространяются поперечные цилиндрические волны, для которых аналогичные формулы имеют вид:

$$\psi_0(r, z) = \frac{B_0}{\beta_2^2} J_0(\beta_2 r) e^{i\gamma z}, \quad u_z^0 = B_0 J_0(\beta_2 r) e^{i\gamma z},$$

$$u_r^0 = -\frac{i\gamma B_0}{\beta_2} J_1(\beta_2 r) e^{i\gamma z}. \quad (3)$$

В формулах (1) – (3) и дальше множитель $e^{-i\omega t}$, который определяет зависимость от времени опущенный. Так же в этих формулах приняты обозначения:

$$\kappa_k = \frac{\omega}{c_k}, \quad \beta_k = \sqrt{\kappa_k^2 - \gamma^2}, \quad k=1, 2,$$

$$\tilde{n}_1^2 = \frac{\lambda_1 + 2\mu_1}{\rho_1}, \quad \tilde{n}_2^2 = \frac{\mu_1}{\rho_1},$$

где: ρ_1 - плотность матрицы, а λ_1, μ_1 - постоянные Ламе материала матрицы; c_1, c_2 - скорости распространения упругих волн в теле.

Малая толщина включения позволяет сформулировать условия взаимодействия между ним и матрицей относительно его срединной плоскости. При этом считается, что перемещения любой точки включения совпадают с перемещением соответствующей ей точки срединной плоскости. Тогда при полном сцеплении на срединной плоскости включения будут разрывными нормальное и касательное напряжения, для скачков которых вводятся обозначения:

$$\langle \sigma_z^1 \rangle = \sigma_z^1(r, +0) - \sigma_z^1(r, -0) = \chi_1(r),$$

$$\langle \tau_{rz}^1 \rangle = \tau_{rz}^1(r, +0) - \tau_{rz}^1(r, -0) = \chi_2(r). \quad (4)$$

Кроме того, для перемещения выполняются равенства:

$$u_z(r, 0) = w_0(r), \quad u_r(r, 0) = u_0(r) - \frac{h}{2} w_0'(r)$$

$$0 \leq r < a. \quad (5)$$

Здесь $w_0(r), u_0(r)$ - изгиб и радиальное перемещение срединной плоскости включения. Во втором равенстве (5) учтено перемещение, вызванное поворотом сечения.

ИЗЛОЖЕНИЕ ОСНОВНОГО МАТЕРИАЛА

Вывод и преобразование системы интегральных уравнений.

Изгиб и радиальное перемещения срединной плоскости включения находятся путем решения следующих уравнений теории пластин [8]:

$$D \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) w_0 - m\omega^2 w_0 = \chi_1(r), \quad 0 \leq r \leq a;$$

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} u \right) + q_2^2 u = -\frac{\chi_2(r)}{D_0 h}, \quad (6)$$

$$\text{где: } D = \frac{E_0 h^3}{12(1-\nu_0^2)}, \quad D_0 = \frac{E_0}{1-\nu_0^2} \quad \text{— изгибная и}$$

сдвиговая жесткости, $m = h\rho_0$ - масса единицы площади включения, а ρ_0, ν_0, E_0 - плотность, коэффициент Пуассона и модуль упругости материала включения.

Граничные условия для уравнений (6) формулируются в допущении, что действием со

стороны матрицы на край включения можно пренебречь, и на нём осуществлены условия свободного края. Тогда должны выполняться равенства:

$$N_r(a) = 0, \quad M(a) = 0, \quad Q(a) = 0, \quad (7)$$

где $N_r(a), Q(a), M(a)$ - нормальная и поперечная силы, изгибный момент на краю включения.

Из равенств (7) следует выполнение на краю включения условий:

$$\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial r^2} + \frac{\nu_0}{r} \frac{\partial w_0}{\partial r} \right) \Bigg|_{r=a} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w_0}{\partial r} \right) \Bigg|_{r=a} = 0, \quad 0 \leq r < a. \quad (9)$$

Кроме этого функция $w_0(r)$ должна быть ограниченной когда $r \rightarrow 0$, и $u_0(a) = 0$.

Для решения сформулированных одномерных краевых задач (6), (7), (9) сначала строятся функции Грина, которые определяются формулами:

$$G_1(\eta, r) = g_1(\eta, r) - \frac{1}{q_{01}} (J_0(q_{01}\eta)G_1(r) + I_0(q_{01}\eta)G_2(r)),$$

$$G_2(\eta, r) = g_2(\eta, r) + BJ_1(q_2\eta)J_1(q_2r). \quad (10)$$

В формуле (10) $g_1(\eta, r), g_2(\eta, r)$ - фундаментальные функции, которые равны:

$$g_1(\eta, r) = \frac{1}{2q_1} (g_1^-(\eta, r) + g_1^+(\eta, r)),$$

$$g_1^\pm(\eta, r) = \int_0^\infty \frac{\lambda J_0(\lambda r) J_0(\lambda \eta)}{\lambda^2 \pm q_1^2} d\eta,$$

$$g_2(\eta, r) = \int_0^\infty \frac{\lambda J_1(\lambda r) J_1(\lambda \eta)}{\lambda^2 - q_2^2} d\lambda.$$

Для других функций, которые входят в (10) имеют место равенства:

$$G_1(r) = \frac{1}{2\Delta(q_{01})} \left(A_1(q_{01})J_0(q_1r) + \frac{I_0(q_1r)}{q_{01}} \right),$$

$$G_2(r) = \frac{1}{2\Delta(q_{01})} \left(A_2(q_{01})J_0(q_1r) + \frac{I_0(q_1r)}{q_{01}} \right),$$

$$A_1(q_{01}) = I_1(q_{01})a_2(q_{01}) + \frac{\pi i}{2} h_1(q_{01})H_1^{(1)}(q_{01}),$$

$$A_2(q_{01}) = a_1(q_{01})K_1(q_{01}) - J_1(q_{01})h_2(q_{01}),$$

$$\Delta(q_{01}) = a_1(q_{01})I_1(q_{01}) + J_1(q_{01})h_1(q_{01}),$$

$$a_1(q_{01}) = J_0(q_{01}) - (1-\nu_0) \frac{J_1(q_{01})}{q_{01}},$$

$$a_2(q_{01}) = \frac{\pi i}{2} (H_0^{(1)}(q_{01}) - (1-\nu_0) \frac{H_1^{(1)}(q_{01})}{q_{01}}),$$

$$\begin{aligned} h_1(q_{01}) &= I_0(q_{01}) - (1 - \nu_0) \frac{I_1(q_{01})}{q_{01}}, & \int_0^a \eta \frac{\chi_2(\eta)}{\mu_1} F_{42}(\eta, r) d\eta &= - \int_0^a \eta \frac{\chi_2(\eta)}{Dh} G_2(\eta, r) d\eta - \\ h_2(q_{01}) &= K_0(q_{01}) + (1 - \nu_0) \frac{K_1(q_{01})}{q_{01}}, & - \frac{h}{2} \int_0^a \eta \frac{\chi_1(\eta)}{D} \frac{\partial}{\partial r} G_1(\eta, r) d\eta &- p_2(r), \\ q_1^4 &= \frac{m\omega^2}{D}; \quad q_{01} = qa, & & 0 \leq r < a. \end{aligned} \quad (14)$$

где: $p_1(r) = -u_z^0(r, \pm 0)$, $p_2(r) = -u_r^0(r, \pm 0)$.

$$B = \frac{i\pi}{2} \frac{(q_{02} H_0^{(1)}(q_{02}) - (1 - \nu_0) H_1^{(1)}(q_{02}))}{q_{02} J_0(q_{02}) - (1 - \nu_0) J_1(q_{02})}, \quad q_0 = aq_2.$$

С помощью функций Грина решение граничных задач (6), (7), (9). представляются в виде:

$$\begin{aligned} w_0(r) &= \int_0^a \frac{\chi_1(\eta)}{D} G_1(\eta, r) d\eta, \quad 0 \leq r < a, \\ u_0(r) &= - \frac{1}{D_0 h} \int_0^a \eta \chi_2(\eta) G_2(\eta, r) d\eta. \end{aligned} \quad (11)$$

Таким образом, радиальное и изгибное перемещения срединной плоскости включения определяются формулами (11).

Для определения перемещения в матрице представим их в виде:

$$u_z = u_z^0 + u_z^1, \quad u_r = u_r^0 + u_r^1. \quad (12)$$

В этом представлении u_z^0, u_r^0 - находятся по формулам (1.1), (1.2), (1.3), а слагаемые u_z^1, u_r^1 это перемещения, которые вызванные волнами, отраженными от включения. Далее они для осесимметричных гармонических колебаний представляются разрывным решением уравнений Ламе [9]:

$$\begin{aligned} u_z^1 &= \int_0^a \eta \frac{\chi_1(\eta)}{\mu_1} g_{31}(\eta, r, z) d\eta + \int_0^a \eta \frac{\chi_2(\eta)}{\mu_1} g_{32}(\eta, r, z) d\eta, \\ u_r^1 &= \int_0^a \eta \frac{\chi_1(\eta)}{\mu_1} g_{41}(\eta, r, z) d\eta + \int_0^a \eta \frac{\chi_2(\eta)}{\mu_1} g_{42}(\eta, r, z) d\eta. \\ g_{31}(\eta, r, h \pm 0) &= - \frac{1}{2\mu_1 \kappa_2^2} \int_0^\infty \frac{S(\lambda)}{q_2(\lambda)} \lambda J_0(\lambda \eta) J_0(\lambda r) d\lambda = F_{31}(\eta, r), \\ g_{42}(\eta, r, h \pm 0) &= - \frac{1}{2\mu_1 \kappa_2^2} \int_0^\infty \frac{S(\lambda)}{q_1(\lambda)} \lambda J_1(\lambda \eta) J_1(\lambda r) d\lambda = F_{42}(\eta, r), \\ g_{32}(\eta, r, h \pm 0) &= g_{41}(\eta, r, h \pm 0) = 0, \\ S(\lambda) &= \lambda^2 - q_1(\lambda) q_2(\lambda), \\ q_1(\lambda) &= \sqrt{\lambda^2 - \kappa_1^2}, \quad q_2(\lambda) = \sqrt{\lambda^2 - \kappa_2^2}. \end{aligned} \quad (13)$$

Таким образом формулы (11), (13) позволяют находить перемещение во включении и матрице при условии что известны скачки напряжений (1.4)

Последние определяются из системы интегральных уравнений, которые получаются из (1.5) после подстановки в нее (13), (11). Эта система имеет следующий вид:

$$\int_0^a \eta \frac{\chi_1(\eta)}{\mu_1} F_{31}(\eta, r) d\eta = \int_0^a \eta \frac{\chi_1(\eta)}{D} G_1(\eta, r) d\eta - p_1(r),$$

С целью приведения системы (14) к виду удобному для численного решения над ней необходимо проделать преобразования аналогичные изложенным в [10]. Для дальнейшего решения задачи вводятся в рассмотрение функции:

$$T_1(\lambda) = \int_0^a \eta \chi_1(\eta) J_0(\lambda \eta) d\eta; T_2(\lambda) = \int_0^a \eta \chi_2(\eta) J_1(\lambda \eta) d\eta. \quad (15)$$

На первое и второе уравнение полученной системы производится действие операторами:

$$\begin{aligned} D_1[f] &= \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{y dy}{\sqrt{x^2 - y^2}} \int_y^x f(r) dr, \\ D_2[f] &= \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{r f(r)}{\sqrt{x^2 - y^2}} dr. \end{aligned}$$

В полученные после этого уравнения подставляется представление $T_k(\lambda)$ косинус - интегралами Фурье:

$$\begin{aligned} T_1(\lambda) &= \frac{2}{\pi} \int_0^a \varphi_1(\tau) \cos \lambda \tau d\tau, \\ T_2(\lambda) &= \frac{2}{\pi} \int_0^a \varphi_2(\tau) \sin \lambda \tau d\tau. \end{aligned} \quad (16)$$

Функции $\varphi_k(\tau)$ связаны с реальными скачками напряжений по формулам:

$$\begin{aligned} \chi_1(\eta) &= \frac{2}{\pi} \int_\eta^a \varphi_1(\tau) \frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{\sqrt{\tau^2 - \eta^2}} \right) d\tau, \\ \chi_2(\eta) &= - \frac{2}{\pi} \int_\eta^a \varphi_2(\tau) \frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{\sqrt{\tau^2 - \eta^2}} \right) d\tau, \\ \varphi_1(\tau) &= \int_\tau^a \frac{\eta \chi_1(\eta)}{\sqrt{\eta^2 - \tau^2}} d\eta; \quad \varphi_2(\tau) = \int_\tau^a \frac{\tau \chi_2(\eta)}{\sqrt{\eta^2 - \tau^2}} d\eta, \\ & 0 \leq \tau < a, \\ \varphi_1(\tau) &\equiv 0; \quad \varphi_2(\tau) \equiv 0, \quad \tau > a. \end{aligned} \quad (17)$$

В результате вышеуказанных действий над системой (14) найдено, что функции $\varphi_k(\tau)$, ($k = 1, 2$) являются решениями следующей системы интегральных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{1+\xi^2}{4} g_1(\zeta) + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 g_1(y) [Q_3(y-\zeta) + W_1(y, \zeta)] dy = f_1(\zeta) \\ \frac{1+\xi^2}{4} g_2(\zeta) + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 g_1(y) W_3(y, \zeta) dy + \\ + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 g_2(y) \left[-\frac{2m_0}{\varepsilon} \ln|y-\zeta| + Q_4(y-\zeta) + W_2(y, \zeta) \right] d\zeta = f_2(\zeta), \\ -1 < \zeta < 1. \end{aligned} \quad (18)$$

При выводе уравнений (18) также были введены обозначения:

$$\begin{aligned} \tau = ay, \quad x = a\zeta, \quad \varphi_k(ay) = \mu_1 a g_k(y), \quad (k = 1, 2) \\ \kappa_0 = a\kappa_2, \quad \frac{\gamma}{\kappa_2} = d_k, \quad \xi = \frac{\kappa_1}{\kappa_2}, \quad (k = 1, 2). \end{aligned} \quad (19)$$

Функции $Q_k(y-\zeta)$, $k = 3, 4$ находятся согласно формул:

$$\begin{aligned} Q_k = Q_{k1}(p) + iQ_{k2}(p) \quad k = 3, 4; \\ Q_{31}(p) = \frac{\pi\kappa_0}{2} \operatorname{sign}(p) (A_2(\kappa_0 p) - \xi^3 A_2(\kappa_0 p) - \xi^3 J_1(\kappa_0 p)), \\ Q_{41}(p) = \frac{\pi\kappa_0}{2} \operatorname{sign}(p) (\xi^3 A_2(\xi\kappa_0 p) - A_2(\kappa_0 p) - J_1(\kappa_0 p)), \\ Q_{32}(p) = \kappa_0 (2S_1(\kappa_0 p) - 2\xi^3 S_1(\xi\kappa_0 p) + \xi^3 S_2(\xi\kappa_0 p)), \\ ; \\ Q_{42}(p) = \kappa_0 (2\xi^3 S_1(\xi\kappa_0 p) - 2S_1(\kappa_0 p) + S_2(\kappa_0 p)), \\ A_1(x) = J_0(x) - \frac{J_1(x)}{x}; \quad A_2(x) = J_1(x) - \frac{2J_1(x)}{x^2} + \frac{J_0(x)}{x}, \\ S_1(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{2m}; \quad S_2(x) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m x^{2m}, \\ a_0 = \frac{1}{3}; \quad b_0 = 1; \quad a_m = \frac{(-1)^m (m+1)}{(2m-1)!! (2m+1)!!}, \\ b_m = \frac{(-1)^m}{(2m-1)!! (2m+1)!!}; \quad m = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (20)$$

Функции: $W_k(y, \zeta)$, $k = 1, 2, 3$ являются результатом действия на функции Грина (10) и их производные дифференциальными операторами D_1, D_2 и вычисления соответствующих интегралов, введения обозначений (19) и исключения из результата разрывной составляющей. Эти функции соответственно равны:

$$W_2(y, \zeta) = \frac{2m_0}{\varepsilon} (D(z) - B \cos q_{02} z),$$

$$D(z) = (\ln|z| - ci(q_{02}|z|)) +$$

$$+ 2 \sin^2 \frac{q_{02}|z|}{2} ci(q_{02}|z|) - \sin(q_{02}|z|) si(q_{02}|z|).$$

$$W_1(z) = \frac{\xi_0}{q_{01}^2 \varepsilon^2} (D_0^+(z) - D_0^-(z)),$$

$$W_3(z) = \frac{\xi_0}{2\varepsilon^2 q_{01}} (A^+(q_{01}z) + A^-(q_{01}z)),$$

$$\begin{aligned} A^-(q_{01}z) = -\operatorname{sign}(z) (\sin(q_{01}|z|) ci(q_{01}|z|) - \\ - \cos(q_{01}|z|) si(q_{01}|z|)), \end{aligned}$$

$$A^+(q_{01}z) = -\operatorname{sign}(z) \times$$

$$\begin{aligned} \times \left((C + \ln q_{01}|z|) shq_{01}|z| - \frac{1}{2} (e^{+q_{01}|z|} S_3(-q_{01}|z|) - e^{-q_{01}|z|} S_3(-q_{01}|z|)) \right) \\ D_0^-(q_{01}z) = -\cos q_{01}|z| ci(q_{01}|z|) - \sin q_{01}|z| si(q_{01}|z|), \\ D_0^+(q_{01}z) = (1 - chq_{01}|z|) \ln|z| - (C + \ln q_{01}|z|) chq_{01}|z| - \\ - \frac{1}{2} (e^{-q_{01}|z|} S_3(q_{01}|z|) + e^{-q_{01}|z|} S_3(-q_{01}|z|)), \end{aligned}$$

$$S_3(q_0|z|) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(q_0|z|)^k}{k \cdot k!}; \quad \xi_0 = \frac{6(1-\nu_0^2)}{(1+\nu_1)} e_0; \quad e_0 = \frac{E_1}{E_0}.$$

В правых частях уравнения (18) при действии на включение нормальной гармонической силы следует считать:

$$f_1(\zeta) \equiv 0; \quad f_2(\zeta) \equiv 0.$$

При взаимодействии с включением плоской продольной волны:

$$f_1(\zeta) = i\alpha; \quad f_2(\zeta) = 0.$$

Если с включением взаимодействует цилиндрическая волна расширения-сжатия, то

$$f_1(\zeta) = \frac{id_1 \alpha}{b_1} \cos(\xi \kappa_0 b_1 \zeta); \quad f_2(\zeta) = -\alpha \sin(\xi \kappa_0 b_1 \zeta),$$

а если цилиндрическая волна поперечного сдвига, то

$$f_1(\zeta) = \beta \cos(\kappa_0 b_2 \zeta); \quad f_2(\zeta) = \frac{\beta d_2}{b_2} \sin(\kappa_0 b_2 \zeta).$$

Приближенное решение системы интегральных уравнений.

Для построения приближенного решения системы уравнений (18) производится замена его системой алгебраических уравнений при помощи квадратурной формулы Гаусса и специальной квадратурной формулой для интеграла с логарифмической особенностью [11]:

$$\int_{-1}^1 \ln|y - y_k| g(y) dy = \sum_{m=1}^n B_{km} g_m, \quad g_m = g(y_m), \quad (21)$$

$$B_{km} = \frac{2n+1}{2n} \times$$

$$\times \left((1-y_k) \ln(1-y_k) + (1+y_k) \ln(1+y_k) - 2 + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{P_j(y_m)}{2j+1} (Q_{j+1}(y_k) - Q_{j-1}(y_k)) \right),$$

где: y_k , $k = 1, 2, \dots, m$ - корни многочлена Лежандра:

$$P_j(x) - \text{многочлен Лежандра,}$$

$$Q_j(x) - \text{присоединение функции Лежандра.}$$

В результате этого из (18) получена система линейных алгебраических уравнений:

$$\frac{1+\xi^2}{4}g_{1j} + \frac{1}{2\pi}\sum_{m=1}^n A_m g_{1m} [Q_3(\acute{o}_m - \acute{o}_k) + W_1(\acute{o}_m - \acute{o}_k)] = f_1(\acute{o}_k),$$

$$\frac{1+\xi^2}{4}g_{2j} + \frac{1}{2\pi}\sum_{m=1}^n A_m g_{1m} W_3(\acute{o}_m - \acute{o}_k) + \frac{1}{2\pi}\sum_{m=1}^n A_m g_{2m} \times$$

$$\times \left[-\frac{2m_0}{\varepsilon} B_{km} + Q_4(\acute{o}_m - \acute{o}_k) + W_2(\acute{o}_m - \acute{o}_k) \right] = f_2(\acute{o}_k). \quad (22)$$

После решения системы (22) неизвестные функции $g_k(\acute{o})$ приближаются интерполяционным многочленом :

$$g_k(y) = \sum_{m=1}^n g_k(y_m) \frac{P_n(y)}{(y-y_m)P'_n(y_m)}, \quad k = 1, 2. \quad (23)$$

Концентрация напряжений в матрице вблизи включения оценивается с помощью безразмерных коэффициентов интенсивности напряжений (КИН) N_1 и N_2 , приближенное значение которых определяется формулой:

$$K_j = \lim_{r \rightarrow a-0} \sqrt{a-r} \chi_j(r),$$

$$K_j = \sqrt{2a} \mu_j N_j, \quad N_j = \frac{g_j(1)}{\pi} = \sum_{m=1}^n \frac{g_j(y_m)}{(1-y_m)P'_n(y_m)},$$

$$(j = 1, 2). \quad (24)$$

Численный анализ концентрации напряжения.

С помощью формул (24) выполнено численное исследование почастотной зависимости безразмерных значений КИН, результаты этих исследований показаны в виде графиков. Чтобы выяснить влияние на значение КИН именно жесткости включения, сначала считалось, что включение и матрица имеют одинаковую плотность и коэффициент Пуассона ($\bar{\rho} = 1, \nu_0 = \nu_1 = 0,25$). Результаты этих исследований, показаны на рис.1 – рис.3. Кривые на этих рисунках отвечают указанному значению отношения модулей упругости матрицы и включения.

На рис. 1 показана зависимость $|N_1|$ от безразмерного волнового числа для случая, когда на включение действует плоская продольная волна. Кривая, построенная, для отношения модулей упругости $e_0 = 10^{-5}$ целиком совпадает с соответствующей кривой для абсолютно жесткого включения. С уменьшением жесткости включения сначала убывает и уровень концентрации напряжений возле него. Потом зависимость КИН от волнового числа приобретает сложный вид с большим количеством максимумов, в которых значения КИН могут превышать те, что отвечают абсолютно жесткому включению.

Что касается поведения $|N_2|$, то его значения в этом случае близки к нулю. Это свидетельствует о том, что в условии (1.5) другим слагаемым, которое учитывает поворот сечения включения в случае действия плоской продольной волны можно пренебречь.

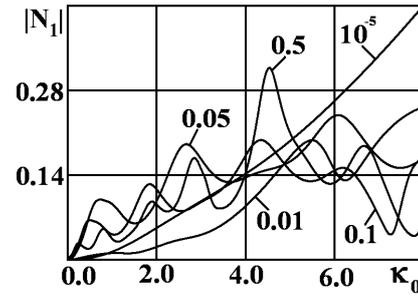


Рис.1. Зависимость $|N_1|$ от безразмерного

волнового числа при действии на включение плоской продольной волны

Fig.1. The dependence $|N_1|$ of the dimensionless wave number when exposed to the inclusion of a plane longitudinal wave

Графики на рис.2 иллюстрируют зависимость $|N_1|$ от волнового числа при действии на включение продольной цилиндрической волны. При расчетах считалось, что волновая постоянная определенная в (19) $d_1 = 0,9$. Кривая построенная при $e_0 = 10^{-5}$ совпадает с соответствующей кривой для абсолютно жесткого включения. При убывании жесткости включения поведение этого коэффициента аналогично предыдущему случаю. Но для упругих включений значительного превышения значений $|N_1|$, которые соответствуют, абсолютно жесткому включению не наблюдается. Коэффициент интенсивности напряжений $|N_2|$ для данного случая ($d_1 = 0,9$) при тех же значениях волновых чисел, что и для $|N_1|$ меньше и $|N_2|$ для упругого включения не превышает его значения для включения абсолютно жесткого.

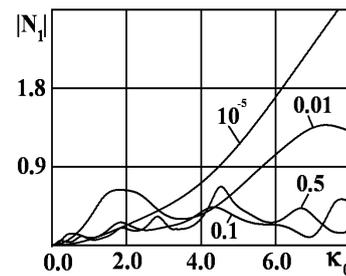


Рис.2. Зависимость $|N_1|$ от волнового числа при

действии на включение продольной цилиндрической волны

Fig.2. The dependence $|N_1|$ on the wave number by the action of the inclusion of longitudinal cylindrical wave

На рис.3 показан график зависимости $|N_2|$ от волнового числа при действии на включение цилиндрической волной сдвига. Считалось, что волновая постоянная $d_2 = 0,9$. Кривая, построенная

для $e_0 = 10^{-3}$ совпадает с кривой, которая соответствует абсолютно жесткому включению. При уменьшении жесткости включения сначала наблюдается уменьшение значения КИН, но для $e_0 > 0,1$ монотонное убывание значений КИН нарушается. Зависимость КИН от волнового числа стаёт более сложной. При действии цилиндрической волной сдвига, превышение значения КИН для упругого включения наблюдается в области высоких частот ($\kappa_0 > 8$) его значений для абсолютно жестких.

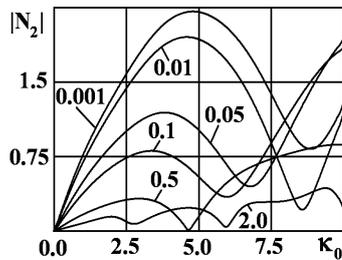


Рис.3. Зависимость $|N_2|$ от волнового числа при действии на включение цилиндрической волной сдвига

Fig. 3. The dependence $|N_2|$ on the wave number by the action to include a cylindrical wave shift

Что касается поведения $|N_1|$, то для упомянутого случая его значения меньше $|N_2|$ при тех же значениях волновых чисел. С уменьшением жесткости включения уменьшаются и значения $|N_1|$ возле него, но осложняется вид зависимости КИН от волнового числа.

С целью выяснения возможности рассмотрения включений большой жесткости, при реальных расчетах на прочность было проведено вычисление КИН для некоторых реальных материалов. Результаты этих расчетов приведены на рис.4.

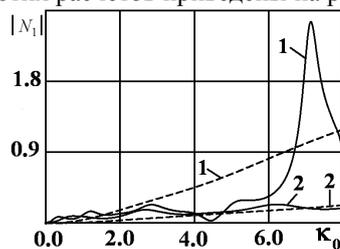


Рис.4. Зависимости коэффициентов интенсивности напряжений для некоторых реальных материалов

Fig. 4. Dependencies stress intensity factors for some real materials

Сплошные кривые построены при учете упругости включения, пунктирные в предположении, что включение является абсолютно жестким. Включение считалось стальным, а для матрицы допускали два вида материалов. Кривые 1 отвечают случаю, когда материал матрицы бетон, кривые 2 построенные в предположении, что материал матрицы свинец. Кривые на рис.4 показывают

зависимость $|N_1|$ от безразмерного волнового числа при действии на включение плоской продольной волной. Можно видеть, что учет упругости включения существенно влияет как на значение КИН так и на вид его зависимости от волнового числа. Сравнение кривых 1 и 2, которые отвечают близким значениям модулей упругости, ($e_0 = 0,071, e_0 = 0,08$) показывают, что концентрация напряжений возле включения существенно зависит и от отношения других физических постоянных – плотности и коэффициента Пуассона. При взаимодействии с плоской продольной волной наблюдаются волновые числа, при которых КИН имеет максимум и в котором его значения значительно превышают, те, что отвечают абсолютно жесткому.

ВЫВОДЫ

Таким образом, анализ численных расчетов показывает, что при росте жесткости включения значение КИН стремится, к тому, которую соответствует абсолютно жесткому. Но совпадение наблюдается при отношении модулей упругости порядка $10^{-4} - 10^{-5}$, которое не может быть реализовано для большинства материалов, применяющихся в деталях машин и сооружениях. Поэтому для точных расчетов на прочность необходимо учитывать упругие свойства включения.

Учет поворота сечения при изгибе включения, практически не влияет на значение КИН возле него при формулировке граничных условий на включении. Это дает возможность исследовать независимо концентрацию напряжений при изгибе и растяжении включения.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. **Михаськів В.В., Хай О.М. 1993.** Теорії прочності упругих тел з плоскими жорсткими включеннями в полі устоявихся динамічних навантаж. // *Машинознавство*. №3, 17-22. (Україна).
2. **Михаськів В.В., Калиняк О.И. 2005.** Нестационарні возмущення трьохмерної упругої матриці з жорстким дисковим включенням // *Фізико-хімічна механіка матеріалів*. 41, № 2. 7-15. (Україна).
3. **Datta S.K. 1970.** The diffraction of a plane compressional elastic wave by a rigid circular disk // *Quarterly of applied mathematics*. V.XXVIII, №1, 1-14.
4. **Kit H.S., Kunets Ya. I., Yemets V.F. 1999.** Elastodynamics scattering from a thinwallad inclusions of low rigidity// *Int. J. of Engineering Science*, v. 37. 331-343.
5. **Кот Г.С., Кунець Я.И., Михаськов В.В. 2003.** Динамічна концентрація напружень в неограниченному тілі з тонким упругим дискообразним включенням // *Доп. НАН України*. № 8. 41-44. (Україна).
6. **Кит Г.С., Кунець Я.И., Михаськів В.В. 2004.** Взаємодія стаціонарної хвилі з тонким дискообразним включенням малої жорсткості в

- упругом теле // Известия РАН. Механика твердого тела. № 5. 82–89.
7. **Гринченко В.Т., Мелешко В.В. 1981.** Гармонические колебания и волны в упругих телах. К.: Наук. думка,–283.
 8. **Перцев А.К., Платонов Э.Г. 1987.** Динамика оболочек и пластин. Л.: Судостроение. 316.
 9. **Попов Г.Я. 1999.** Построение разрывных решений дифференциальных уравнений теории упругости для слоистой среды с межфазными дефектами // Доклада РАН, т.364. №6. 759-763.
 10. **Александров В.М., Сметанин Б.И., Соболев Б.В. 1993.** Тонкие концентраторы напряжения в упругих телах. Г. :Наука, 224 .
 11. **Назарчук З.Т. 1989.** Численное исследование дифракции волн на цилиндрических структурах. К.: Наук. думка. 256.
 12. **Лехницкий С.Г. 1954.** Распределение напряжений в анизотропной пластинке с эллиптическим упругим ядром (плоская задача). Инженерный сборник, т. 19, 83-106.
 13. **Лехницкий С.Г. 1977.** Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука. 416.
 14. **Лехницкий С.Г., Солдатов В.В. 1961.** Влияние положения эллиптического отверстия на концентрацию напряжений в растягиваемой анизотропной пластинке. Изв. АН СССР. Отд-ние техн. наук. Механика и машиностроение, №1. С. 3-8.
 15. **Любчак В.А., Фильптинский Л.А. 1978.** Вторая краевая задача для упругой анизотропной среды, ослабленной криволинейными разрезами. Изв. АН СССР. Механика твердого тела, № 5. 98-102.
 16. **Мартьянович Т.Л. 1979.** К обоснованию решения плоской задачи теории упругости для анизотропной пластинки с криволинейным отверстием. Изв. АН СССР. Механика твердого тела, № 6. 146-151.
 17. **Мартьянович Т.Л. 1978.** Точное решение второй основной задачи для анизотропной пластинки с криволинейным отверстием. В кн.: Математические методы и физико-механические поля. Вып. 7. 32-38.
 18. **Мартьянович Т.Л. 1977.** Точное решение задачи об изгибе анизотропной пластинки с отверстием. Журнал прикл. мех. и техн. физ. № 5, 168-177.
 19. **Пелех Б.Л. 1965.** К определению коэффициентов концентрации при изгибе плит с отверстиями. Прикл. механика, №7. 139-143.
 20. **Пелех Б.Л., Лазько В.А. 1982.** Слоистые анизотропные пластины и оболочки с концентраторами напряжений. Киев: Наук, думка. 295.

symmetry passes through the center of the inclusion). Inclusion is assumed fully adhered to the matrix. The method of solution is based on the representation of the displacement of the reflected wave discontinuous solution of the equations of Lamé. This makes it possible after the implementation of the boundary conditions reduce the initial problem to a system of integral equations for voltage sags in the middle plane of the inclusions. After a series of transformations of this system of equations to a system of Fredholm integral equations of the second kind. The solution of this system is numerically collocation method. With the dependence of the solution found near a busy state of the switching frequency of the waves and the ratio of the elastic constants of the matrix and inclusions.

Key words: stress concentration, a circular elastic inclusion of axially symmetric wave.

**INTERACTION OF HARMONIC WAVES
WITH A THIN ELASTIC CIRCULAR INCLUSION
IN CONDITIONS CLUTCH FULL MATRIX**

Summary. The article describes the solution of the problem of determining the concentration of stresses near a thin elastic inclusion in the form of a circular disk, which is unlimited elastic body (matrix). On inclusion are axially symmetric harmonic elastic waves (the axis of