Maciej SKWARCZYŃSKI, Krystyna WOYCICKA
Katedra Zastosowań Matematyki SGGW
Department of Applied Mathematics WAU

O całkach holomorficznych względem parametru
On integrals holomorphic with respect to parameter

Wstęp

W teorii funkcji jednej zmiennej dużo miejsca zajmują całki z parametrem zespolonym. Najważniejszym przykładem jest podstawowy dla tej teorii **wzór całkowy Cauchy'ego.** Wciąż aktualnym przedmiotem badań jest **transformata Cauchy'ego** miary o zwartym nośniku w $\mathbf{R}^2$, por. Garnett (1972). Całka z jądrem e^{-tz} po (nieograniczonym) przedziale zmiennej t definiuje **transformatę Laplace'a**, bardzo przydatną w praktyce inżynierskiej. Jej znaczenie teoretyczne jest jeszcze większe: transformata Laplace'a wiąże analizę rzeczywistą i zespoloną. Dla fizyki matematycznej szczególne znaczenie ma tzw. zagadnienie Dirichleta, które w przypadku koła $\partial B(0, R)$ rozwiązuje całka z **jądrem Poissona** $\mathrm{Re}[(\xi + z)/(\xi - z)]$.

W konkretnych przypadkach funkcje holomorficzne (tzn. posiadające pochodną zespoloną) są często definiowane lub przedstawiane jako całki z parametrem zespolonym. Dotyczy to zwłaszcza przypadków szczególnie interesujących, tj. **funkcji specjalnych.** Przykładowo można tu wymienić definicje funkcji **gamma** i **beta Eulera** oraz przedstawienia całkowe **Hankela** (dla funkcji gamma), **Bessela** (dla funkcji cylindrycznej rzędu $n \in \mathbf{Z}$), **Sonina** (dla funkcji cylindrycznej dowolnego rzędu zespolonego). Ta sytuacja powoduje, że (zwłaszcza w aspekcie dydaktycznym) na uwagę zasługują warunki dostateczne, zapewniające holomorficzność całki z zespolonym parametrem. Twierdzenia te można zaliczyć do „matematycznego folkloru" gdyż w istniejącej literaturze podręcznikowej są formułowane rzadko i raczej fragmentarycznie. (Dla porządku wypada zaznaczyć, że to ostatnie stwierdzenie nie odnosi się do unikalnego ujęcia Schwartza (1972, tw. 115 s. 794). Jednym z powodów są zapewne względy historyczne. Nowoczesne pojęcie całki Lebesgue pojawiło się, gdy podstawy funkcji holomorficznych stanowiły już zakończoną (i tradycyjnie aprobowaną) całość. Dogodne wprowadzenie do całki Lebesgue'a (dla niematematyków) podaje Skwarczyński (1998).

Obecna notatka ma na celu przypomnienie jednego z warunków dostatecznych dla holomorficzności całki. Będziemy rozpatrywać otwarty podzbiór $\Omega_0 \subset C$ oraz abstrakcyjną przestrzeń T z miarą nieujemną μ. Symbolem $B(z, \delta)$ oznaczamy koło otwarte o środku z i promieniu δ. Powiemy, że podzbiór $\Omega_0 \subset \Omega$ leży **głęboko** w Ω, jeśli istnieje dodatnia liczba δ, taka że

$$\bigcup_{z \in \Omega_0} B(z, \delta) \subset \Omega \quad (1)$$

Będziemy mówić że funkcja $f : \Omega \times T \to \mathbf{C}$ ma na zbiorze T **majorantę** $g : T \to [0, +\infty)$, jeśli nierówność

$$|f(z, t)| \le g(t) \qquad (2)$$

zachodzi dla każdego $z \in \Omega$ i każdego $t \in T$.

Zachodzi

Podstawowe twierdzenie

Twierdzenie 1. Niech Ω będzie otwartym podzbiorem płaszczyzny zespolonej i niech (T, μ) będzie przestrzenią z miarą nieujemną. Rozpatrzmy funkcję $f : \Omega \times T \to C$ taką, że:

(i) dla każdego $t \in T$ funkcja $f(z, t)$ $z \in \Omega$ jest holomorficzna.

(ii) dla każdego $z \in \Omega$ funkcja $f(z, t)$ $t \in T$ jest całkowalna i w konsekwencji określona jest całka z parametrem.

$$I(z) = \int_T f(z, t)d\mu(t) \quad z \in \Omega \qquad (3)$$

(iii) istnieje całkowalna funkcja $g : T \to R$ będąca majorantą dla f na zbiorze T.

Wówczas:

1°. Dla każdego $n = 0, 1...$ i każdego otwartego zbioru Ω_0 leżącego głęboko w Ω istnieje stała M taka, że nierówność

$$\left| \frac{1}{z - z_0} \left[\frac{\partial^n f}{\partial z^n}(z, t) - \frac{\partial^n f}{\partial z^n}(z_0, t) \right] \right| \le Mg(t) \qquad (4)$$

zachodzi dla każdego $z_o \in \Omega_0$, każdego z dostatecznie bliskiego z_0 i każdego $t \in T$. W konsekwencji dla każdego $z_0 \in \Omega_0$

$$\left| \frac{\partial^{n+1} f}{\partial z^{n+1}}(z_0, t) \right| \le Mg(t) \quad t \in T \qquad (5)$$

2°. Dla każdego n = 0, 1,... i każdego $z \in \Omega$ funkcja $(\partial^n f/\partial z^n)(z, t$ jest całkowalna na T i zachodzi równość

$$I^{(n)}(z) = \int_T \frac{\partial^n f}{\partial z^n}(z, t)d\mu(t) \quad z \in \Omega \qquad (6)$$

W szczególności $I(\mathrm{z})$ $z \in \Omega$ jest funkcją holomorficzną.

3°. Jeśli koło $B(z_0, R)$ zawiera się w Ω, to dla każdego $n = 0,1,...$ zachodzi nierówność

$$\left| I^{(n)}(z_0) \right| \le \frac{n!}{R^n} \int_T g(t)d\mu(t) \qquad (7)$$

Dowód twierdzenia

Ad. 1°.

Z założenia Ω_0 leży głęboko w Ω, więc istnieje liczba δ spełniająca (1). Zbiór Ω_0 jest otwarty, więc

$$\bigcup_{z \in \Omega_0} \overline{B}(z, \delta) \subset \Omega \qquad (8)$$

Wybierzmy dowolny punkt $z_0 \in \Omega_0$. Dla z spełniających $|z - z_0| < \delta/2$ możemy różnicę pochodnych we wzorze (4) przedstawić za pomocą całki Cauchy'ego po okręgu $\gamma = \partial B(z_0, \delta)$

$$\frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\xi, t)}{(\xi - z)^{n+1}} - \frac{f(\xi, t)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi \tag{9}$$

Ponieważ

$$|(\xi - z_0)^{n+1} - (\xi - z)^{n+1}| = \tag{10}$$

$$= \left|(z - z_0)\sum_{j=0}^{n}(\xi - z_0)^j(\xi - z)^{n-j}\right|$$

$$\leq (n+1)(2\delta)^n|z - z_0|$$

a także $|\xi - z_0| = \delta$, $|\xi - z| > \delta/2$, więc z (iii) wynika, że lewa strona wzoru (4) nie przekracza liczby

$$\frac{(n+1)!}{2\pi}(2\pi\delta)\frac{(2\delta)^n g(t)}{\delta^{n+1}(\delta/2)^{n+1}} = Mg(t) \tag{11}$$

Nierówność (4) została wykazana. Przechodząc w nierówność (4) do granicy przy $z \to z_0$ otrzymujemy równość (5).

Ad. 2°.

Będziemy rozumować przez indukcję względem n. Przypadek $n = 0$ wynika bezpośrednio z definicji. Załóżmy, że teza jest prawdziwa dla ustalonego $n \geq 0$. Wybierzmy dowolny punkt $z_0 \in \Omega$ i otoczenie Ω_0 tego punktu leżące głeboko w Ω. Na mocy równości (5) funkcja $(\partial^n f/\partial z^n)(z, t)$ $t \in T$ jest całkowalna dla każdego $z \in \Omega_0$ i w szczególności jest całkowalna, gdy $z = z_0$.

Zgodnie z założeniem indukcyjnym iloraz różnicowy dla funkcji $I^{(n)}(z)$ można przepisać jako

$$\frac{I^{(n)}(z) - I^{(n)}(z_0)}{z - z_0} =$$

$$= \int_T \frac{\frac{\partial^n f}{\partial z^n}(z, t) - \frac{\partial^n f}{\partial z^n}(z_0, t)}{z - z_0} d\mu(t) \tag{12}$$

Wobec nierówności (4) udowodnionej w p. 1° można w równości (12) przejść do granicy przy $z \to z_0$ zgodnie z twierdzeniem Lebesgue'a o zbieżności majoryzowanej. W wyniku otrzymujemy równość

$$I^{(n+1)}(z_0) = \int_T \frac{\partial^{n+1} f}{\partial z^{n+1}}(z_0, t) d\mu(t) \tag{13}$$

Punkt $z_0 \in \Omega$ był wybrany dowolnie, więc w równości (13) można go zastąpić każdym punktem $z \in \Omega$. Zgodnie z zasadą indukcji równość (6) ma miejsce dla każdego n = 0, 1,...

Ad. 3°

Jeśli $r \in (0, R)$, to $\partial B(z_0, r) \subset \Omega$ i wobec nierówności Cauchy'ego-Hadamarda

$$\left|\frac{\partial^n f}{\partial z^n}(z_0, t)\right| \leq n!\frac{g(t)}{r^n} \tag{14}$$

Przechodzimy w nierówności (14) do granicy przy $r \to R$. Rezultat pozwala oszacować liczbę $I^{(n)}(z_0)$. Uwzględniając równość (6) otrzymujemy nierówność

$$|I^{(n)}(z_0)| \leq \int_T \frac{n!}{R^n} g(t) d\mu(t) \tag{15}$$

Jest to żądana nierówność (7). Tym samym twierdzenie 1 zostało udowodnione.

Uwagi dodatkowe

Uwaga 1. W dowodzie, szacując wyrażenie (4) wykorzystaliśmy wzór całkowy Cauchy'ego dla pochodnej n-tego rzędu z funkcji holomorficznej. Wzór ten można łatwo otrzymać przez obustronne różniczkowanie wzoru całkowego dla funkcji. Jednakże, aby uniknąć błędnego koła, należy postępować niezależnie od twierdzenia 1. Jest to łatwe, gdyż zbiór całkowania ma miarę skończoną, a od zespolonego parametru zależy jedynie elementarny czynnik $(\xi - z)^{-1}$. Odpowiednie rozumowanie zamieszczają standardowe podręczniki teorii funkcji, por. np. Hille (1965), tw. 7.5.3.

Uwaga 2. Jeśli osłabimy założenie (iii), żądając jedynie, by każdy punkt $z_0 \in \Omega$ miał otoczenie Ω_0 z (zależną od Ω_0) całkowalną majorantą $g : T \rightarrow \mathrm{R}$ dla funkcji $f : \Omega_0 \times T \rightarrow \mathrm{C}$, to w tezie twierdzenia 1 punkty 1° i 2° pozostaną nie zmienione. Jest to oczywiste, ponieważ istnienie i wartość pochodnej zespolonej jest własnością lokalną. Natomiast punkt 3° tezy twierdzenia należy uzupełnić zastrzeżeniem $B(x_0, R) \subset U_0$.

Uwaga 3. Równość w (15) może być osiągana. Tak jest np. w oczywistym przypadku, gdy $\Omega = B(z_0, R) = B(0, 1)$, $T = [0, 1]$, $\mu = \mathrm{m}$ (miara Lebesgue'a), $f(z, t) = tz^n$, $g(t) = t$. Wówczas obie strony (15) przyjmują wartość $n!/2$.

Uwaga 4. Jeśli $\mu(T) < +\infty$, a f jest funkcją ograniczoną przez K, to stała $g(t) \equiv K$ jest całkowalną majorantą dla f. Tym sposobem można otrzymać twierdzenie przytoczone przez Rudina (1986) (por. definicja 6.18 i ćwiczenie 16 w rozdz.10).

Przykłady zastosowania

1. **Transformata Laplace'a** oryginału h

$$\int_{(0,+\infty)} e^{-tz} h(t)dm(t) \qquad \mathrm{Re}\, z > \sigma \qquad (16)$$

Por. Ławrentiew, Szabat (1973) s. 495. Zakładamy jak zwykle, że istnieją stałe $A \in (0, +\infty)$ $s \in (-\infty, +\infty)$ takie, że oryginał h spełnia nierówność

$$|h(t)| \le Ae^{st} \qquad t \in [0, +\infty] \qquad (17)$$

Dla każdego $\varepsilon > 0$ z twierdzenia 1 wynika holomorficzność całki (16) w półpłaszczyźnie $\Omega = \{z \in \mathrm{C}; \mathrm{Re}\, z > s + \varepsilon\}$. Rzeczywiście, dla $z \in \Omega$

$$|e^{-tz} h(t)| \le e^{-t\mathrm{Re}\, z} Ae^{\sigma t} \le Ae^{-t\varepsilon} \qquad (18)$$

i bezpośredni rachunek pokazuje, że funkcja po prawej stronie nierówności (18) jest całkowalna na półprostej $[0, +\infty]$. Zatem transformata Laplace'a jest określona i holomorficzna w półpłaszczyźnie $\mathrm{Re}\, z > s + \varepsilon$. W konsekwencji (wobec dowolności ε) jest określona i holomorficzna w półpłaszczyźnie $\mathrm{Re}\, z > s$. Wynika stąd w dalszej kolejności, że transformata Laplace'a jest określona i holomorficzna w półpłaszczyźnie $\mathrm{Re}\, z > \sigma$ gdzie σ oznacza kres dolny stałych s występujących w jednej przynajmniej nierówności postaci (17). Jak wiadomo, liczba σ nazywa się **wykładnikiem zbieżności** oryginału h.

2. **Transformata Mellina** oryginału h

$$\int_{(0,+\infty)} t^{z-1} h(t)dm(t) \qquad \mathrm{Re}\, z > 0 \qquad (19)$$

Porównaj Mackey (1978) s. 330. Zakładamy, że na przedziale (0, 1) oryginał jest ograniczony przez stałą M; oraz, że na półprostej $[1, +\infty)$ funkcja podcałkowa w całce (19) jest całkowalna dla każdego $z \in \{\mathrm{Re}\, z > 0\}$. Rozpatrzmy dowolny pas $\Omega = \{\alpha < \mathrm{Re}\, z < \beta\}$ gdzie $0 < \alpha < \beta < +\infty$. W pasie tym funkcja podcałkowa ma na majorantę

$$g(t) = \begin{cases} Mt^{\alpha-1} & \text{dla } t \in (0, 1) \\ t^{\beta-1}|h(t)| & \text{dla } t \in [1, +\infty) \end{cases} \tag{20}$$

Funkcja (20) jest całkowalna na $(0 + \infty)$, więc transformata Mellina jest holomorficzna w Ω. W konsekwencji (dowolność α, β) jest ona holomorficzna w półpłaszczyźnie $\{\mathrm{Re}\, z > 0\}$.

3. **Funkcja gamma Eulera**

$$\Gamma(z) := \int_{(0, +\infty)} t^{z-1} e^{-t} dm(t) \qquad \mathrm{Re}\, z > 0$$

Por. Ławrientiew, Szabat (1973) s. 595. Jest to transformata Mellina dla $h(t) = e^{-t}$. Funkcja e^{-t} w oczywisty sposób spełnia założenia poprzedniego punktu (wystarczy zauważyć, że przy $t \to +\infty$ dąży do zera szybciej niż każdy jednomian).

4. **Funkcja beta Eulera**

$$B(z, w) := \int_{(0, 1)} t^{z-1}(1 - t)^{w-1} \tag{21}$$

gdzie $\mathrm{Re}\, z > 0$, $\mathrm{Re}\, w > 0$. Por. Ławrientiew, Szabat (1973) s. 598. Dla ustalonej wartości w jest to holomorficzna funkcja zmiennej z. Rzeczywiście, definiując Ω tak jak w punkcie 2, zauważamy, że funkcja podcałkowa ma $z \in \Omega$ całkowalną majorantę

$$g(t) := t^{\alpha-1}(1 - t)^{\mathrm{Re}\, w-1} \tag{22}$$

Stąd już łatwo wynika teza. Analogicznie dowodzimy, że funkcja (21) jest dla ustalonej wartości z holomorficzną funkcją zmiennej w.

5. **Funkcja cylindryczna rzędu** $n \in Z$

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{(0,2\pi)} \cos(nt - z \sin t)\, dm(t) \tag{23}$$

gdzie $z \in C$. Por. Ławrientiew, Szabat (1973) s. 419. Niech $\Omega \subset C$ będzie dowolnym ograniczonym zbiorem otwartym. Funkcja podcałkowa ma stałą (a więc całkowalną) majorantę. W samej rzeczy jako funkcja zmiennych (z, t) jest ona ciągła na $\overline{\Omega} \times [0, 2\pi]$, a w konsekwencji ograniczona (twierdzenie Weierstrassa). Stąd, już łatwo wynika, że $J_n(z)$ jest funkcją całkowitą.

6. **Holomorficzne całki typu Cauchy'ego**. Na zakończenie wspomnimy o przedstawieniach całkowych typu Cauchy'ego z zespolonym parametrem. Do najbardziej interesujących należą niewątpliwie przedstawienia Hankela i Sonina (por. Ławrientiew i Szabat, 1973), odpow. s. 598 i 640).

Zauważmy, że całkę Cauchy'ego można sprowadzić do całki po przedziale osi liczbowej. Holomorficzność tej ostatniej całki można już dowodzić za pomocą twierdzenia 1. W szczególności można w ten sposób wykazać, że przedstawienie całkowe Sonina określa dla każdego $\lambda \in C$ funkcję $J_\lambda(z)$, holomorficzną w prawej półpłaszczyźnie.

Literatura

GARNETT J. 1972: *Analytic Capacity and Measure*. Springer Lecture Notes #297.

HILLE E. 1965: *Analytic function theory*. Blaisdell, N.Y.

ŁAWRIENTIEW M., SZABAT B. 1973: *Mietody tieorji funkcij kompleksnowo pieremiennowo*. „Nauka", Moskwa.

MACKEY G.W. 1978: *Unitary group representations in physics, probability and number theory*. Benjamin, Reading.

RUDIN W. 1986: *Analiza rzeczywista i zespolona*. PWN, Warszawa.

SCHWARTZ L. 1972: *Analyse mathématique*. Tłum. ros. „Mir", Moskwa.

SKWARCZYŃSKI M. 1998: *Przystępny podręcznik matematyki. Cz. 1*, Wydaw. SGGW, Warszawa.

Summary

The authors indicate the need *in the didactic of mathematics* of a general theorem, which provides sufficient conditions for holomorphicity of integrals with complex parameter. A variant of such theorem (based on Lebesgue dominated convergence) is recalled. It is illustrated by a number of concrete applications to various integral representations.

Authors' address:
M. Skwarczyński, K. Woycicka
Warsaw Agricultural University – SGGW
02–787 Warszawa
ul. Nowoursynowska 166
Poland.