

MICHAŁ ZASADA

Ocena zgodności rozkładów pierśnic w drzewostanach jodłowych z niektórymi rozkładami teoretycznymi

The Assessment of the Goodness of Fit of the dbh Distributions
in Fir Stands to Some Theoretical Distributions

Wstęp

Od wielu lat naukowcy — leśnicy poszukiwali możliwości matematycznego ujęcia rozkładów różnych cech drzewostanów, szczególną wagę przywiązując do rozkładów pierśnic. Historycznie pierwszą funkcją używaną do opisu struktury grubości była krzywa wykładnicza zaproponowana w 1898 roku przez de Liocourta, która przez ponad pół wieku stosowana była m.in. do opisu i porównywania rozkładów pierśnic w drzewostanach różnowiekowych i mieszanych oraz planowania cięć w drzewostanach o strukturze zbliżonej do struktury stabilnych lasów naturalnych (12, 13, 15). W późniejszym okresie zaczęto stosować także inne funkcje, jak szeregi Grama-Charliera (2), krzywą wzrostu Pearla-Reeda, rozkład gamma (6), logarytmiczno-normalny (3), beta, Weibulla (1, 2, 5), SB Johnsona (9).

Ze względu na swoje zalety do modelowania rozkładów pierśnic najczęściej stosuje się rozkłady Weibulla, beta i SB Johnsona. Funkcje te są elastyczne i stosunkowo łatwo dokonać estymacji ich parametrów (2, 9, 14).

W literaturze polskiej prace dotyczące rozkładów pierśnic są nieliczne i tylko sporadycznie podejmują próby aproksymacji tych rozkładów za pomocą rozkładów teoretycznych. Gieruszyński (7) na przykład ogranicza się jedynie do stwierdzenia, że w drzewostanach świerkowych rozkłady pierśnic są zbliżone do normalnego. Szymański (19) stwierdza, że struktura grubości świerków u górnej granicy lasu układa się w typową krzywą dzwonową (binomialną) Queteleta, która wraz ze wzrostem wysokości położenia powierzchni badawczej nad poziom morza rozpląszcza się i przekształca w prawie jednostronną. Jaworski (10) porównuje rozkłady pierśnic drzewostanów jodłowych z rozkładem normalnym i Liocourta-Meyera oraz określa dla poszczególnych drzewostanów typ rozkładu Pearsona.

Pierwszą polską pracą, w której zaproponowano zastosowanie rozkładu teoretycznego do modelowania rozkładu pierśnic, była praca Bruchwalda (4). Funkcję gęstości prawdopodobieństwa opisanego w tej pracy podwójnego rozkładu normalnego oraz propozycje estymacji jego parametrów podał Siekierski (17).

Oddzielnym problemem jest porównanie zgodności różnych rozkładów teoretycznych z rozkładami pierśnic. W jednowiekowych drzewostanach sosnowych Nelson najlepsze wyniki uzyskał dla krzywej Pearla-Reeda (18), Hafley i Schreuder (9) dla rozkładu S_B Johnsona, von Gadov — dla rozkładu Weibulla (18), Siekierski — dla rozkładu S_B Johnsona, zaś w przypadku drzewostanów mieszanych — dla rozkładu S_B Johnsona i podwójnego rozkładu normalnego (18). W drzewostanach jodłowych Jaworski (10) stwierdził, że rozkłady pierśnic w drzewostanach jednopiętrowych w większości przypadków nie odbiegają od normalnego, zaś pozostałe badane drzewostany, szczególnie przerębowe, w większości reprezentują krzywe jednoboczne. Zagospodarowane drzewostany różnowiekowe charakteryzowały się dużą zmiennością rozkładów pierśnic, które odbiegały od już wymienionych rozkładów teoretycznych.

Celem niniejszej pracy było określenie stopnia zgodności rozkładów pierśnic w drzewostanach jodłowych z niektórymi rozkładami teoretycznymi oraz przydatności tych rozkładów do modelowania rozkładów pierśnic. Jest to pierwszy etap badań mających doprowadzić do zbudowania modelu rozkładu pierśnic dla drzewostanów jodłowych, który mógłby być elementem modelu wzrostu dla tego gatunku.

Materiał badawczy i metodyka badań

Podstawą analizy były dane zebrane na 84 powierzchniach badawczych założonych w drzewostanach jodłowych oraz mieszanych z przewagą jodły, zlokalizowanych w Górach Świętokrzyskich, Puszczy Świętokrzyskiej, Bieszczadach, Pogórzu Przemyskim, Pogórzu Dynowskim, Beskidzie Sądeckim, Średnim i Niskim. Udział jodły wyrażony w polu przekroju wynosił od 60,8 do 100%. Sześćdziesiąt trzy powierzchnie charakteryzowały się udziałem jodły ponad 90%. Wielkość powierzchni próbnych wahała się od 0,21 do 4 hektarów. Na powierzchniach tych pomierzono pierśnice wszystkich drzew grubszych niż 7 centymetrów i zestawiono je w postaci szeregów rozdzielczych o szerokości klasy 2 cm. Dla rozkładów pierśnic na poszczególnych powierzchniach określono parametry różnych rozkładów teoretycznych, osobno dla jodły i (jeżeli udział jodły był mniejszy, niż 90%) dla wszystkich gatunków łącznie. Parametry podwójnego rozkładu normalnego określono za pomocą drugiego i trzeciego momentu centralnego oraz na podstawie modalnej oszacowanej na podstawie średniej, mediany i dwóch pierwszych momentów z próby. Jeżeli metoda momentów nie daje rozwiązania, parametry rozkładu określono sposobem przybliżonym (17). Parametry rozkładu Weibulla określono na podstawie trzech pierwszych momentów zwykłych (5) z tym, że jeżeli otrzymana wartość parametru "a" była większa od dolnej granicy najniższej klasy w szeregu rozdzielczym, przyjmowano wartość równą tej granicy, a pozostałe parametry rozkładu określano na podstawie średniej arytmetycznej i wariancji z próby (16). Parametry rozkładu S_B Johnsona określono metodą momentów transformowanych wartości pierśnic. Parametry rozkładu beta określono metodą momentów, przy

czym za granice rozkładu przyjmowano dolną granicę najniższej i górną najwyższej klasy szeregu rozdzielczego.

Zgodność rozkładów pierśnic z rozkładami teoretycznymi badano za pomocą testu Kołmogorowa przy poziomie istotności $\alpha=0,05$. Dla poszczególnych powierzchni określono wartość statystyk D_n oraz λ . Obliczone wartości statystyki porównywano z wartością krytyczną, która nie jest zależna od liczebności próby. Dla każdej powierzchni określano również, który rozkładów teoretycznych charakteryzuje się największą zgodnością z rozkładem pierśnic, to znaczy który charakteryzuje się najmniejszą wartością statystyki D_n Kołmogorowa; rozkładowi temu przypisywano liczbę 1, zaś pozostałym — 0. Rozkład, którego suma rang jest największa, zaś średnia wartość statystyki Kołmogorowa najmniejsza, można uznać za stosunkowo najlepszy do opisu rozkładów pierśnic.

Wyniki

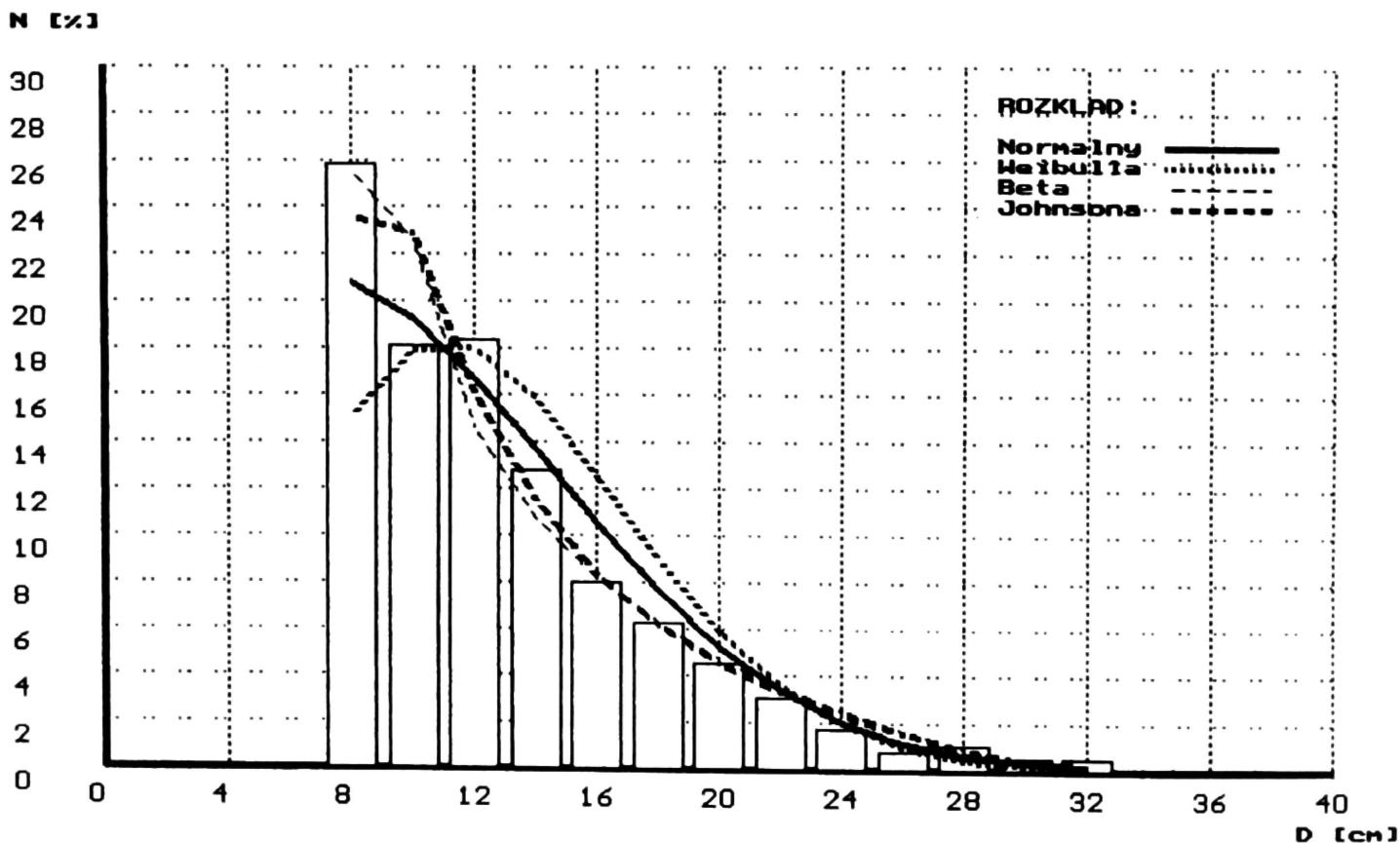
Rozkłady pierśnic badanych drzewostanów charakteryzują się dużą zmiennością i różnym charakterem, w zależności od fazy rozwoju drzewostanu (11). Co prawda badane obiekty nie mają z reguły charakteru pierwotnego czy naturalnego, ale również w zagospodarowanych drzewostanach stwierdzić można fazy rozwojowe odpowiadające fazom naturalnym. Spotyka się rozkłady zbliżone kształtem do normalnego (jak w drzewostanach jednopiętrowych fazy optymalnej), lecz równie często są one jednoboczne (jak w fazie odnowienia), nieregularne, multimodalne bądź zbliżone do jednostajnego (jak w fazie starzenia czy rozpadu).

Zastosowany test wykazał, że tylko w przypadku jednej z 84 badanych powierzchni nie uzyskano zgodności empirycznego rozkładu pierśnic jodeł z jakimkolwiek z badanych rozkładów teoretycznych. Dla podwójnego rozkładu normalnego, którego parametry oszacowano metodą momentów, hipotezę o zgodności rozkładu empirycznego z teoretycznym odrzucono w 9 przypadkach, dla podwójnego rozkładu normalnego z parametrami określonymi za pomocą momentów i modalnej szacowanej na podstawie średniej i mediany — w 62 przypadkach, dla rozkładu Johnsona — 14, rozkładu Weibulla — 23 i rozkładu beta — w 34 przypadkach. Podwójny rozkład normalny z parametrami określonymi metodą momentów okazał się najlepszy do opisu struktury grubości na 43 powierzchniach, przy zastosowaniu sposobu przybliżonego — na 3 powierzchniach, rozkład Johnsona charakteryzował się najniższą wartością statystyki D_n w 19 przypadkach, rozkład Weibulla — w 7 przypadkach i rozkład beta — w 12 przypadkach (tab. 1). Jednocześnie w 7 przypadkach

TABELA 1

Wartości statystyk D_n i λ oraz suma rang dla poszczególnych rozkładów (dane dotyczące tylko jodły)

Wartość	Norm. mom.	Norm. prz.	Johnsona	Weibulla	Beta
Suma rang	43	3	19	7	12
Śr. D_n	0,0306	0,1243	0,0368	0,0413	0,0441
Śr. λ	0,8503	3,7218	1,0199	1,2346	1,3663

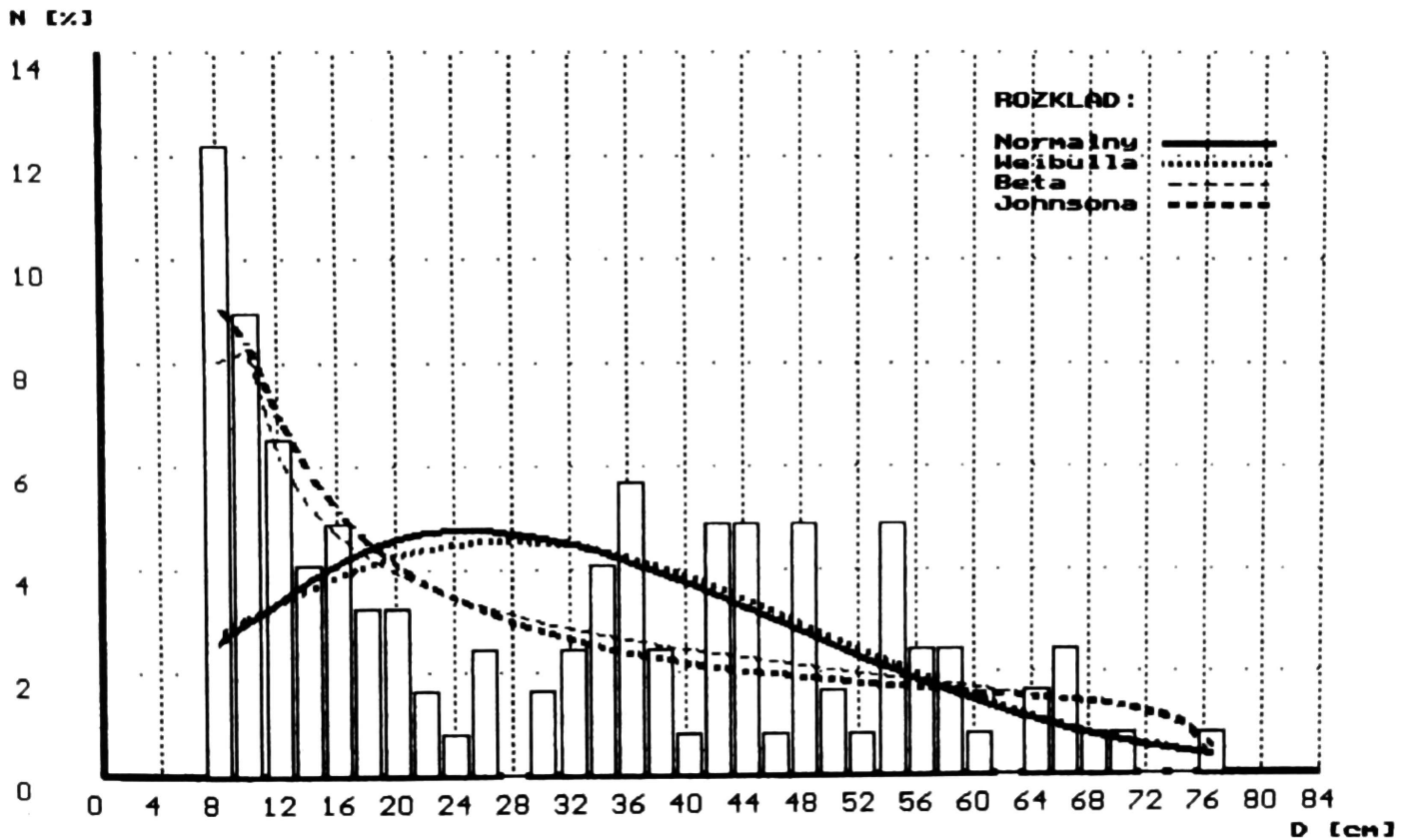


RYC.1. Dopasowanie rozkładów teoretycznych do jednobocznego rozkładu pierśnic w drzewostanie jodłowym

nie było możliwe określenie parametrów podwójnego rozkładu normalnego metodą momentów, co uznać należy za poważny mankament tego sposobu.

Dla poszczególnych rozkładów określono także średnie wartości statystyk D_n i λ (tab. 1). Najmniejszą średnią wartością statystyki D_n i λ charakteryzuje się podwójny rozkład normalny o parametrach określanych metodą momentów, największe wartości miary te przyjmują dla podwójnego rozkładu normalnego o parametrach określanych wzorami przybliżonymi. Rozkłady Johnsona, Weibulla i beta mają zbliżone wartości tych wskaźników z tym, że najlepiej wypadł tu rozkład Johnsona. Podwójny rozkład normalny najlepiej z badanych rozkładów teoretycznych opisuje rozkłady pierśnic w badanych drzewostanach, biorąc zaś pod uwagę średnie wartości statystyki należałoby unikać stosowania rozkładu podwójnego normalnego o parametrach określonych sposobem przybliżonym i rozkładu beta (tab. 1).

Analizując zgodność rozkładów empirycznych z różnego typu rozkładami pierśnic stwierdzono, że rozkłady jednoboczne są najbardziej zgodne z rozkładem Johnsona (ryc. 1). Jeżeli rozkład pierśnic jest bardzo nieregularny, multimodalny, wówczas najczęściej najlepszy okazuje się rozkład beta (ryc. 2). Podwójny rozkład normalny wykazuje największą zgodność z rozkładem pierśnic w drzewostanach charakteryzujących się strukturą pierśnic zbliżoną do struktury drzewostanów jednopiętrowych i jednogeneracyjnych (ryc. 3). Struktura taka nie świadczy o braku zróżnicowania wieku w obrębie drzewostanu, gdyż jodła tworzy drzewostany jednopiętrowe, o regularnej strukturze grubości nawet wówczas, gdy zróżnicowanie wieku jest znaczne, dochodzące nawet do 100 lat (8, 10). Posiadane dane



RYC. 2. Dopasowanie rozkładów teoretycznych do nieregularnego rozkładu pierśnic w drzewostanie jodłowym

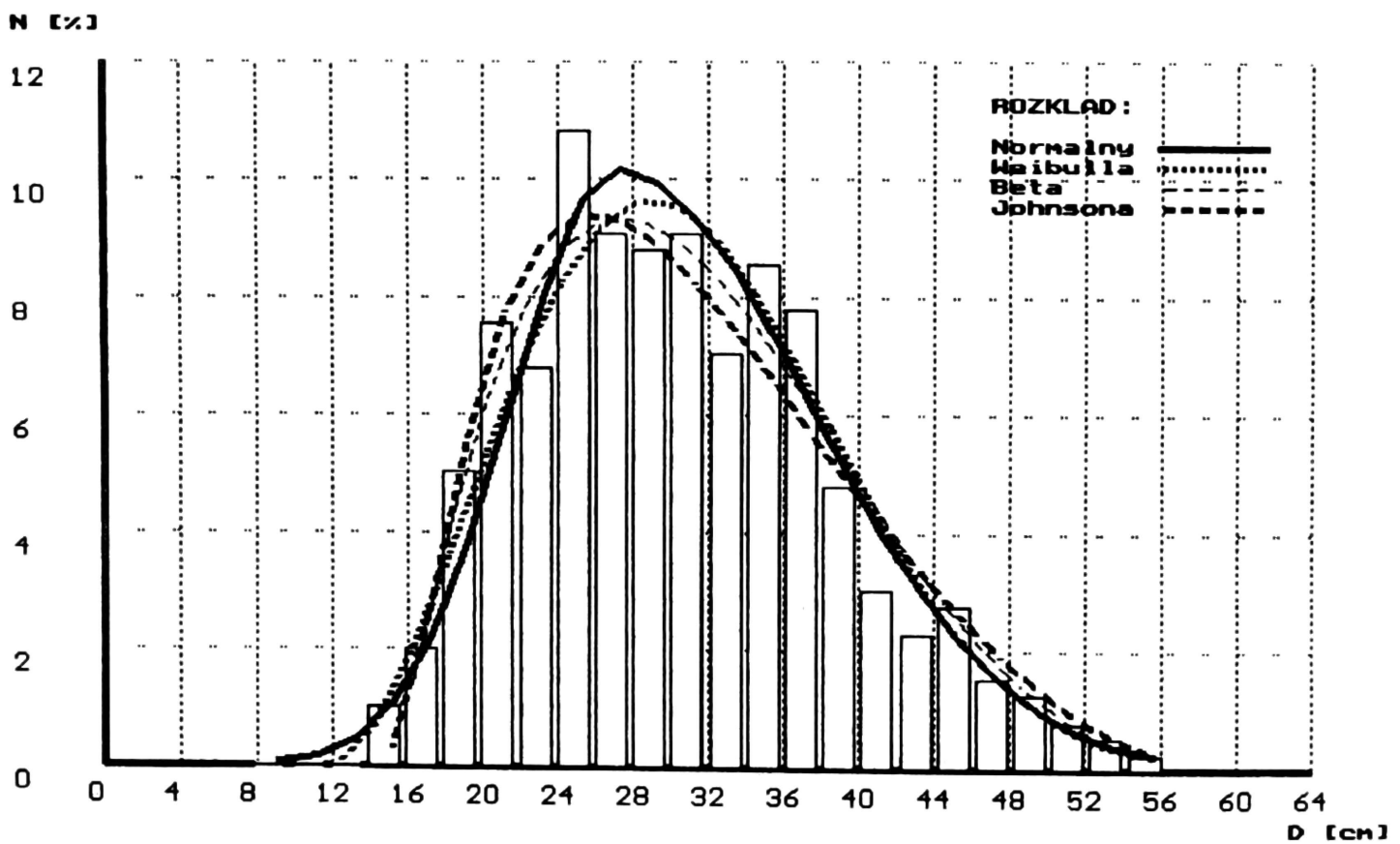
nie pozwoliły jednak na stwierdzenie, czy badane drzewostany charakteryzują się znacznym zróżnicowaniem wieku.

Analizując sumę rang jako miarę dopasowania rozkładu teoretycznego do rozkładów empirycznych w zależności od udziału jodły w składzie gatunkowym stwierdzono, że w litych drzewostanach jodłowych oraz w tych, gdzie udział jodły wynosi ponad 90%, podwójny rozkład normalny okazuje się zdecydowanie najlepszy. Dopiero gdy udział jodły spada poniżej 90%, przewaga ta zacierza się (tab. 2). Dlatego też dla 21 powierzchni z udziałem jodły mniejszym od 90% określono parametry poszczególnych rozkładów teoretycznych na podstawie danych dotyczących wszystkich gatunków łącznie. Stwierdzono, że hipotezę o zgodności rozkładu empirycznego z rozkładami teoretycznymi najczęściej odrzucano dla podwójnego rozkładu normalnego (niezależnie od sposobu określania parametrów tego rozkładu), najrzadziej zaś dla rozkładu Johnsona (7 powierzchni). Dla rozkładu

TABELA 2

Suma rang dla poszczególnych rozkładów w zależności od udziału jodły w składzie gatunkowym

Udział Jd [%]	Nor. mom.	Nor. prz.	Johnsona	Weibulla	Beta
100	11	0	5	1	1
90-100	23	3	13	2	4
<90	7	0	3	5	6



RYC. 3. Dopasowanie rozkładów teoretycznych do rozkładu pierśnic w drzewostanie jodłowym o strukturze jednopiętrowej

dów Weibulla i beta uzyskano porównywalne wyniki (niezgodność rozkładów w 10 i 9 przypadkach). Rozkład S_B Johnsona wypadł też najlepiej ze względu na średnie wartości statystyk D_n i λ . Z drugiej jednak strony — suma rang jest wyższa dla rozkładów Weibulla i beta (tab. 3). Świadczy to o tym, że co prawda dla tych rozkładów często uzyskujemy najniższą wartość statystyk Kołmogorowa, a więc największą zgodność rozkładów, jednak stosując rozkład Johnsona uzyskujemy wyniki bardziej wyrównane, pozwalające prawidłowo opisać strukturę grubości większej liczby drzewostanów.

Podsumowując uzyskane wyniki stwierdzono, że do modelowania rozkładów pierśnic w litych drzewostanach jodłowych zastosowanie może znaleźć podwójny rozkład normalny, choć liczyć się należy z tym, że nie w każdej fazie rozwoju drzewostanu jodłowego będzie

TABELA 3

Wartości charakteryzujące rozkłady pierśnic dla 21 powierzchni z udziałem jodły Z% z uwzględnieniem wszystkich gatunków

Wartość	Norm.mom	Norm.prz.	Johnsona	Weibulla	Beta
Suma rang	0	1	5	8	7
Suma D_n	1,711	3,519	1,415	1,622	1,451
Śr. D_n	0,081	0,168	0,067	0,077	0,069
Śr. λ	1,625	3,357	1,310	1,457	1,557

to rozwiązanie optymalne. W przypadku, gdy metoda momentów nie daje rozwiązania, wykorzystać można sposób przybliżony. Dla drzewostanów z udziałem jodły poniżej 90% najlepsze wyniki uzyskano dla rozkładu Johnsona, jednak nie można wskazać rozkładu, który można zastosować bez zastrzeżeń do modelowania struktury grubości w tego rodzaju drzewostanach. Aby uzyskać precyzyjniejszy obraz struktury pierśnic można by wybierać rozkład teoretyczny w zależności od fazy rozwojowej drzewostanu i udziału jodły w jego składzie gatunkowym, łączyć kilka rozkładów lub tworzyć model z segmentów rozkładów o różnych parametrach (6).

Wnioski

- Badane drzewostany jodłowe charakteryzują się bardzo zróżnicowanymi rozkładami pierśnic, mającymi różny charakter w zależności od fazy rozwojowej drzewostanu.
- Analiza wyników testu Kołmogorowa wykazała, że tylko w przypadku jednej z 84 badanych powierzchni nie uzyskano zgodności empirycznego rozkładu pierśnic z jakimkolwiek z badanych rozkładów teoretycznych przy poziomie istotności 0,05. Podwójny rozkład normalny z parametrami określanymi metodą momentów okazał się najlepszy do opisu struktury grubości na 43 powierzchniach, przy zastosowaniu przybliżonego wzoru na modalną — na 3 powierzchniach, rozkład Johnsona charakteryzował się najniższą wartością statystyki D_n w 19 przypadkach, rozkład Weibulla — 7 przypadkach i rozkład beta — w 12 przypadkach.
- Najniższą sumą statystyk D_n oraz najmniejszą średnią wartością statystyki D_n i λ charakteryzuje się podwójny rozkład normalny o parametrach określanych metodą momentów, najwyższe wartości miary te przyjmują dla rozkładu podwójnego normalnego o parametrach określanych wzorami przybliżonymi. Rozkłady Johnsona, Weibulla i beta mają zbliżone wartości tych wskaźników.
- Do modelowania rozkładów pierśnic w litych drzewostanach jodłowych zastosowanie może znaleźć podwójny rozkład normalny o parametrach szacowanych metodą momentów, zaś gdy sposób ten nie daje rozwiązania — sposobem przybliżonym. Dla drzewostanów z udziałem jodły poniżej 90% najlepsze wyniki uzyskano dla rozkładu Johnsona, jednak nie można wskazać rozkładu, który można zastosować bez zastrzeżeń do modelowania struktury grubości. Aby uzyskać precyzyjniejszy obraz struktury pierśnic możnaby wybierać rozkład teoretyczny w zależności od fazy rozwojowej drzewostanu i udziału jodły w jego składzie gatunkowym, łączyć kilka rozkładów lub tworzyć model z segmentów rozkładów o różnych parametrach.

*Z Katedry Produkcyjności Lasu
SGGW w Warszawie*

Literatura

1. **Amateis R.L., Burkhart H.E., Burk T.E.**, 1986: A ratio approach to predicting merchantable yields of unthinned loblolly pine plantations. *Forest Sc.* 32 (2):287–296
2. **Bailey R.L., Dell T.R.**, 1973: Quantifying diameter distributions with the Weibull function. *Forest Sc.* 19 (2): 97–104
3. **Bliss C.I., Reinker K.A.**, 1964: A log-normal approach to diameter distributions in even-aged stands. *Forest Sc.* 10 (3): 360–360
4. **Bruchwald A.** 1988: Simulation algorithm of the distribution of b.h. diameters of trees in pine stands. *Annals Warsaw Agricult. Univ. — SGGW-AR. For. and Wood Technol.* 37: 91–95
5. **Burk T.E., Newberry J.D.**, 1984: A simple algorithm for moment-based recovery of Weibull distribution parameters. *Forest Sc.* 30 (2): 329–332
6. **Cao Q.V., Burkhart H.E.**, 1984: A segmented distribution approach for modeling diameter frequency data. *Forest Sc.* 30 (1): 129–137
7. **Gieruszyński T.**, 1960: O zmienności cech taksacyjnych drzew w dojrzałych drzewostanach świerkowych. *Folia For. Pol. ser. A.* 2: 5-44
8. **Gieruszyński T.**, 1961: Zmienność elementów miąższości drzew w drzewostanach jodłowych Beskidu Sądeckiego. *Folia For. Pol. ser. A.* 7
9. **Hafley W.L., Schreuder H.T.**, 1977: Statistical distributions for fitting diameter and height data in even-aged stands. *Can. J. For. Res.* 7: 481–487
10. **Jaworski A.** 1979: Charakterystyka hodowlana wybranych drzewostanów z udziałem jodły (*Abies alba* Mill.) w Karpatach i Sudetach. *Acta Agrar. et Silv., Ser. Silvestris* XVIII: 19–60
11. **Jaworski A., Zarzycki K.**, 1983: *Ekologia*. W: *Jodła pospolita*. PWN, Warszawa - Poznań: 317-430
12. **Leak W.B.**, 1965: The J-shaped probability distribution. *Forest Sc.* 11 (4): 405–409
13. **Meyer H. A.**, 1952: Structure, growth and drain in balanced uneven-aged forests. *J.For.* 50 (2): 85–92
14. **Pearson E.S., Hartley H.O.**, 1966: *Biometrika tables for statisticians*. Vol.II. Third Edition, Cambridge University Press.
15. **Schmelz D.V., Lindsey A.A.**, 1965: Size-class structure of old-growth forests in Indiana. *Forest Sc.* 11 (3): 258–264
16. **Shifley S., Lentz E.**, 1985: Quick estimation of the three parameter Weibull to describe tree size distributions. *Forest Ecol. Mgmt.* 13: 195–203
17. **Siekierski K.** 1991: Three methods of estimation of the parameters in the double normal distribution and their applicability to modelling tree diameter distributions. *Ann. Warsaw Agricult. Univ. — SGGW-AR. For. and Wood Technol.* 42: 13–17

18. **Siekierski K.** 1992: Evaluation of the goodness of fit of some statistical distributions to tree diameter distributions. *Annals Warsaw Agricult. Univ. — SGGW. For. and Wood Technol.* 43: 7–14
19. **Szymański S.**, 1990: Analiza naturalnego boru świerkowego w pasie walki z kosodrzewiną u górnej granicy lasu na Pilsku. *Rocz. AR Pozn. CCVII Leśnictwo* 26: 111–128

Summary

The assessment of the goodness of fit of the dbh distributions in fir stands to some theoretical distributions

Determining the level of fit of dbh distributions in fir stands to some theoretical distributions, as well as of the utility of those distributions to modelling of dbh distributions were the goals of the work. Parameters of various theoretical distributions (binomial normal distribution, Weinbull's, Johnson's, and beta distributions) were defined for individual dbh distributions originating from 84 sample plots, separately for fir, and for all species altogether, the latter being valid if the share of fir was lesser than 90%. The goodness of fit of the fir dbh distributions to some theoretical distributions was searched through using the Kolmogorov test at $\alpha=0.05$ significance level.

It was found that binomial normal distribution could be used for modelling dbh distributions in single species fir stands, although an account should be taken on the fact, that this would not be an optimum solution in every developmental stage of fir stand. An approximate method can be used in the case when the momentum method does not give a solution.

The best results were got for the Johnson distribution for stands with the share of fir being below 90%, however no distribution can be pointed out without limitations as good enough for modelling the diameter structure in tree stands of such a kind. For to get a more precise picture of the dbh structure, a theoretical distribution could be chosen, depending on developmental stage of stand and the fir share in stand species composition, as well as some junctions of several distributions could be made, or a model could be set from segments of distributions with different parameters.