

Sylwester SMOLIK

Katedra Zastosowań Matematyki SGGW

Wpływ usłonecznienia na oscylacje temperatury gruntu

Wprowadzenie

W danym dniu każdego roku powtarza się kształt i długość drogi pozornego ruchu Słońca nad horyzontem. *Usłonecznieniem nazywamy czas, podczas którego do powierzchni terenu dochodzi bezpośrednio promieniowanie słoneczne, którego źródłem jest tarcza słoneczna.* W atmosferze występują jednocześnie zjawiska pochłaniania i rozpraszania promieniowania słonecznego. *Czas, podczas którego pomiędzy tarczą słoneczną i danym miejscem na powierzchni Ziemi nie było zachmurzenia nazywamy usłonecznieniem rzeczywistym.* Podlega on rejestracji i będziemy z niego korzystać przy dalszym modelowaniu. Promieniowanie słoneczne pochłaniane przez powierzchnię Ziemi jest zamieniane w energię cieplną, która przenika w głąb gruntu i do atmosfery oraz promieniuje do atmosfery. Te oscylacje temperatury gruntu zależą nie tylko od intensywności promieniowania słonecznego, ale i od współczynnika przewodnictwa cieplnego i pojemności cieplnej gruntu. A te z kolei zależą głównie od rodzaju, struktury i stosunków wodno-powietrznych

gruntu, czyli dla różnych gruntów kształtują się różnie. Zbadamy te procesy ilościowo na stacji meteorologicznej Warszawa-Bielany.

Opis zmienności średniej miesięcznej temperatury gruntu w Warszawie

Temperatura gleby jest decydującym czynnikiem w przezimowaniu ozimin, rozpoczęciu prac polowych, wznowieniu wegetacji na wiosnę i zakończeniu prac jesienią. W czasopismach specjalistycznych podaje się średnią miesięczną temperaturę gruntu na głębokości 5 cm w wybranych miejscowościach. Opiszemy jej roczną zmienność w Warszawie. Jest oczywiste, że parametr ten podlega okresowości rocznej, czyli charakteryzuje się sezonowością. Jego zmienność roczną możemy opisać za pomocą modelu regresji krzywoliniowej postaci:

$$g_t = s + A \cdot \sin(\omega t + \Theta) + E_t,$$

gdzie $\omega = 2\pi/T$ (1)
w którym t oznacza numer kolejnego miesiąca roku, g_t jest odpowiadającą mu

średnią miesięczną temperaturą gruntu na zadanej głębokości opisywanego posterunku obserwacyjnego, E_t jest błędem losowym obserwacji. Natomiast parametry strukturalne modelu s , A , T , Θ , w odpowiednio nazywamy: średnią temperaturą roczną, amplitudą, okresem, fazą początkową i pulsacją drgań harmonicznym (prędkością kątową lub częstością kołową). Parametry modelu (1) oszacowano metodą najmniejszych kwadratów w pracy (Smolik, 1995). W przypadku ogólnym jest to skomplikowany układ równań normalnych, służący do znajdowania niewiadomego okresu T badanego procesu na podstawie jego obserwacji. Przy dodatkowych ograniczeniach, obecnie w praktyce nie tak bardzo uciążliwych, sprowadzono go do bardzo prostego układu równań. Przytoczymy ostateczne wyniki uzyskanych tam oszacowań:

$$\hat{s} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n g_t; \quad \hat{\Theta} = \arctg \left[\frac{\sum_{t=1}^n g_t \cdot \cos \hat{w}t}{\sum_{t=1}^n g_t \cdot \sin \hat{w}t} \right]$$

$$\hat{A} = \frac{2}{n} \left[\cos \hat{\Theta} \cdot \sum_{t=1}^n g_t \cdot \sin \hat{w}t + \sin \hat{\Theta} \cdot \sum_{t=1}^n g_t \cdot \cos \hat{w}t \right] \quad (2)$$

Wzory (2) obowiązują, gdy dane empiryczne są kompletne, tzn. mają postać (t, g_t) dla $t = 1, 2, \dots, n$; oraz liczebność punktów empirycznych jest wielokrotnością okresu badanego procesu, tzn. $n = kT$. Opisując zmienność sezonową, gdy dysponujemy danymi comiesięcznymi, wtedy $T = 12$ oraz $\hat{w} = 2\pi/T = \pi/6$. Jeżeli dane mamy empiryczne z kompletnych lat, to liczebność próby n jest wie-

lokrotnością liczby 12, a więc warunki stosowalności wzorów (2) są spełnione. W tabeli 1 podano średnie miesięczne temperatury gruntu ($^{\circ}\text{C}$) na głębokości 5 cm w Warszawie w latach 1973–1987. Korzystając z zamieszczonych tam średnich miesięcznych wymienionego piętnastolecia, znajdujemy konieczne elementy do dalszych obliczeń:

$$\sum_{t=1}^{12} g_t = 104,53;$$

$$\sum_{t=1}^{12} g_t \cos \frac{\pi}{6} t = -52,9627;$$

$$\sum_{t=1}^{12} g_t \sin \frac{\pi}{6} t = -33,9417$$

(3)

Na podstawie przytoczonych wzorów (2), po zaokrągleniu przyjmujemy:

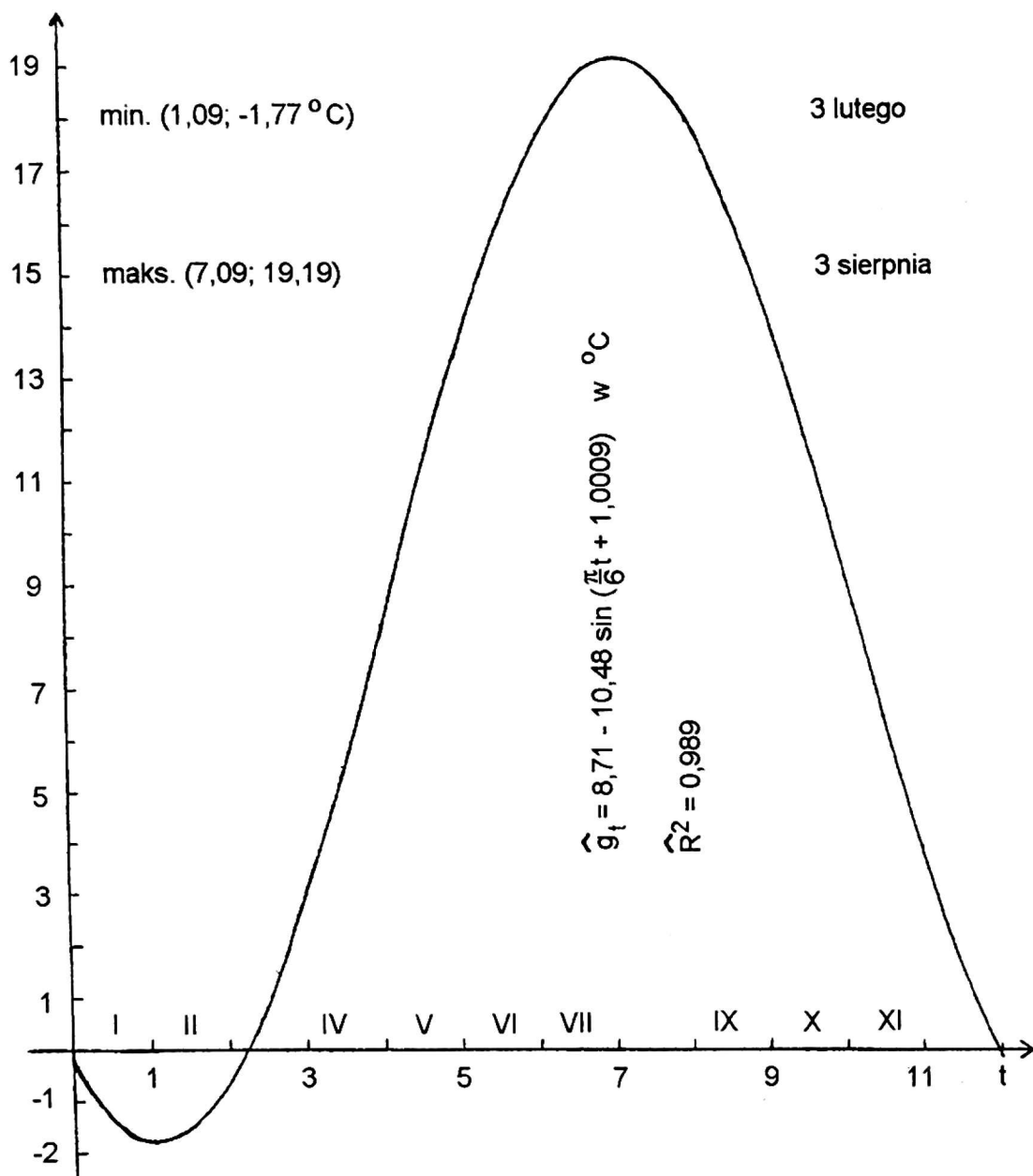
$$\hat{g}_t = 8,71 - 10,48 \sin \left(\frac{\pi}{6} t + 1,0009 \right) \text{ w } ^{\circ}\text{C} \quad (4)$$

w którym t oznacza kolejne miesiące roku. Po prostych zabiegach analitycznych wyznaczamy ekstremum tej funkcji: minimum zachodzi przy $t_1 \approx 1,09$ (ok. 3

TABELA 1. Średnia miesięczna i roczna temperatura gleby (w °C) na głębokości 5 cm pod ugiem na stacji Warszawa-Bielany w latach 1973-1987

Rok	Miesiąc												Średnia
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	
1973	-2,2	0,7	3,0	7,0	13,8	18,1	20,1	20,2	13,7	6,6	1,6	-0,4	8,52
1974	-1,1	1,3	3,2	7,5	12,8	16,3	16,9	19,2	14,7	6,8	3,0	1,8	8,53
1975	1,5	-0,5	3,5	6,9	15,7	18,2	22,0	21,1	16,4	8,5	2,3	0,5	9,68
1976	0,3	-2,3	-0,5	7,8	13,3	17,0	20,9	18,3	14,3	7,3	4,7	0,9	8,50
1977	-0,2	0,7	4,9	6,3	13,5	20,1	18,5	16,9	11,7	8,7	4,8	0,5	8,87
1978	-0,5	-0,3	2,1	6,1	13,0	17,7	17,8	17,1	11,5	8,5	5,0	-1,3	8,06
1979	-1,0	-1,2	1,0	6,5	16,5	22,9	17,1	17,5	14,6	6,5	2,9	2,0	8,78
1980	-1,5	-0,5	-0,1	6,8	11,2	16,9	17,5	17,7	13,5	8,3	2,8	1,0	7,80
1981	0,1	0,1	3,2	6,8	14,8	18,5	19,1	17,9	14,6	9,4	3,6	0,6	9,06
1982	-2,2	-1,8	1,6	5,9	14,8	18,0	21,5	21,1	16,1	9,5	4,1	1,3	9,16
1983	2,4	0,1	3,5	9,4	17,1	19,8	22,0	20,4	15,9	8,7	3,0	-0,2	10,18
1984	0,4	-1,0	0,6	8,6	14,1	15,9	16,9	19,8	13,7	9,7	2,6	-0,2	8,42
1985	-2,5	-2,7	1,0	8,0	15,1	16,0	18,7	18,8	12,7	8,4	1,8	2,0	8,11
1986	0,3	-0,8	1,4	8,2	15,9	18,5	19,5	18,3	11,5	8,2	4,5	0,9	8,87
1987	-0,8	-0,3	-0,4	6,5	13,3	16,5	19,6	16,2	13,2	8,5	4,1	1,2	8,13
Średnia	-0,47	-0,57	1,87	7,22	14,33	18,03	19,21	18,70	13,87	8,24	3,39	0,71	8,71

Źródło: Miesięczny Przegląd Agrometeorologiczny; opracowanie własne.



RYSUNEK. Opis zmienności średniej miesięcznej temperatury gruntu na głębokości 5 cm w Warszawie

lutego) i przyjmuje wartość $-1,77^{\circ}\text{C}$; maksimum przy $t_2 \approx 7,09$ (3 sierpnia) i przyjmuje wartość $19,19^{\circ}\text{C}$. Wykres tej zależności podano na rysunku. Dopasowanie wyznaczonego modelu (4) do danych empirycznych kształtuje się następująco: ocena współczynnika determinacji

$$\hat{R}^2 = 1 - \frac{\sum_{t=1}^{12} (g_t - \hat{g}_t)^2}{\sum_{t=1}^{12} (g_t - \bar{g})^2} =$$

$$= 1 - (7,5447/667,0423) = 0,989 \quad (5)$$

Współczynnik ten informuje, że wyznaczony model (4) tłumaczy (determinuje) ponad 98 procent zmienności badanej zmiennej losowej. Ocena błędu standardowego estymacji funkcji regresji (4) przyjmuje wartość:

$$\hat{s}_{g \cdot t} = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^n (g_t - \hat{g}_t)^2}{n - k}} =$$

$$= \sqrt{\frac{7,5447}{12 - 3}} = 0,92^{\circ}\text{C} \quad (6)$$

Z modelu (4) możemy odczytać terminy rozpoczynania odpowiednich prac polowych w opisywanej okolicy. I tak, przy sadzeniu ziemniaków zaleca się ustabilizowanej średniej dobowej temperatury gleby co najmniej 7°C. W okolicach Warszawy ma to miejsce (średnio biorąc) od dnia:

$(-7 + 8,71)/10,48\sin(\pi t/6 + 1,0009) \Rightarrow$
 $\Rightarrow t_1 = 3,775 \Rightarrow$ około 23 kwietnia. Podobnie wyznaczamy dni z temperaturą gruntu poniżej 0°C:

$0 = 8,71 - 10,48 \sin(\pi t/6 + 1,0009) \Rightarrow$
 $\Rightarrow (t_1 = 11,962 \text{ lub } t_2 = 2,215)$, czyli ma to miejsce od 29 grudnia do 6 marca – średnio biorąc.

Wpływ usłonecznienia na temperaturę gruntu

Termiczne sprzężenie atmosfery i gruntu nie jest procesem prostym, a sygnał temperaturowy przekazywany do gruntu bywa często przefiltrowaną już wersją procesów, którym poddana jest atmosfera. W tabeli 2 obliczono średnie miesięczne czasy trwania bezpośredniego promieniowania Słońca (w godzinach) w Warszawie w latach 1973–1987. Natomiast tabela 1 zawiera średnie miesięczne temperatury gruntu na głębokości 5 cm (w °C) na tej samej stacji obserwacyjnej w przytoczonym wyżej czasie. Zbierzmy najpotrzebniejsze wyniki razem w celu dalszych opracowań:

Gleba g_t °C	-0,47	-0,57	1,87	7,22
Usłonecznienie u_t	38,1	64,0	109,5	156,6
g_t °C	14,33	18,03	19,21	18,70
u_t	222,3	220,2	211,9	221,4
g_t °C	13,87	8,24	3,39	0,71
u_t	137,5	94,5	45,9	26,3

(7)

Zbadamy skorelowanie tych zmienionych losowych. W tym celu wykonujemy obliczenia pomocnicze:

$$\sum_{t=1}^{12} g_t = 104,53; \quad \sum_{t=1}^{12} u_t = 1548,2;$$

$$\text{var}(g) = \sum_{t=1}^{12} (g_t - \bar{g})^2 =$$

$$= \sum_{t=1}^{12} g_t^2 - \bar{g} \cdot \sum_{t=1}^{12} g_t = 667,0423;$$

$$\text{var}(u) = \sum_{t=1}^{12} (u_t - \bar{u})^2 = 64777,717;$$

(8)

$$\text{cov}(u, g) = \sum_{t=1}^{12} (u_t - \bar{u})(g_t - \bar{g}) =$$

$$= \sum_{t=1}^{12} u_t g_t - \bar{u} \cdot \sum_{t=1}^{12} g_t = 6021,541$$

Z przytoczonych w (7) par (u_t, g_t) wyników obserwacji wyznaczamy współczynnik korelacji z próby:

TABELA 2. Sumy miesięczne i roczne usłonecznienia (w godz.) na stacji Warszawa-Bielany w latach 1973-1987

Rok	Miesiąc												Suma
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	
1973	64	24	149	159	210	260	226	318	134	102	70	25	1741
1974	56	99	169	185	179	176	152	244	159	46	56	24	1545
1975	50	89	98	130	234	207	247	307	221	56	56	40	1735
1976	35	115	90	190	246	274	216	246	137	72	31	17	1669
1977	28	39	114	145	185	251	204	147	143	99	46	32	1433
1978	53	47	93	146	240	251	211	178	84	87	31	36	1457
1979	23	78	84	153	291	256	172	150	151	170	24	18	1570
1980	52	29	134	149	227	184	108	171	122	56	30	31	1293
1981	26	58	100	205	222	159	232	203	148	83	28	28	1492
1982	41	67	142	174	261	240	306	252	171	119	58	6	1837
1983	16	41	66	165	224	264	277	286	135	102	59	45	1680
1984	24	58	114	131	145	192	177	247	93	91	65	10	1347
1985	27	53	44	168	212	156	240	217	121	71	38	27	1374
1986	21	104	115	147	255	277	215	176	98	129	71	34	1642
1987	56	59	130	102	204	156	195	179	145	135	26	22	1409
Średnia	38,1	64,0	109,5	156,6	222,3	220,2	211,9	221,4	137,5	94,5	45,9	26,3	1548

Źródło: Miesięczny Przegląd Agrometeorologiczny, Promieniowanie Słoneczne; opracowanie własne.

$$r = \frac{\text{cov}(u,v)}{\sqrt{\text{var}(u) \cdot \text{var}(g)}} =$$

$$= \frac{6021,541}{\sqrt{64777,717 \cdot 667,0423}} = 0,916 \quad (9)$$

Sprawdzamy jego dodatnią istotność w populacji:

$$t_o = \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} \sqrt{n-2} =$$

$$= 7,2203 > 4,5869 = t_{0,001;10} \quad (10)$$

Stwierdzamy, że badane zmienne losowe są wysoce dodatnio skorelowane, a więc są zależne. Jest więc sens znajdowania między nimi związku liniowego

$$g = b_0 + b_1 u \quad (11)$$

Na podstawie zebranych danych we wzorze (8) otrzymujemy oszacowanie współczynników poszukiwanej prostej regresji:

$$\hat{b}_1 = \frac{\text{cov}(u,g)}{\text{var}(u)} = \frac{6021,541}{64777,717} = 0,093;$$

$$\hat{b}_0 = \bar{g} - \hat{b}_1 \bar{u} = -3,29 \quad (12)$$

Oszacowanie związku liniowego między badanymi zmiennymi losowymi w Warszawie przyjmuje postać:

$$\hat{g}_t = -3,29 + 0,093 \cdot u_t$$

dla $t = 1, 2, \dots, 12$ w °C (13)

Jego dopasowanie do danych empirycznych opisuje współczynnik determinacji. W rozpatrywanym zagadnieniu jego ocena kształtuje się następująco:

$$\hat{R}^2 = 1 - \left[\frac{\sum_{t=1}^n (g_t - \hat{g}_t)^2}{\sum_{t=1}^n (g_t - \bar{g})^2} \right] =$$

$$= \frac{\hat{b}_1 \cdot \text{cov}(u,g)}{\text{var}(g)} = 0,840 \quad (14)$$

Interpretuje się go jak następuje: znaleziony model liniowy (13) wyjaśnia (determinuje) około 84 procent zmienności średniej miesięcznej temperatury gleby na głębokości 5 cm w Warszawie. Zdarza się, że interesuje nas średni błąd szacunku wyznaczonej funkcji regresji (13), wtedy znajdujemy pierwiastek kwadratowy z nieobciążonej oceny odchyień od regresji:

$$\hat{s}_{gu} = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^n (g_t - \hat{g}_t)^2}{n-2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{\text{var}(g) - \hat{b}_1 \cdot \text{cov}(u,g)}{n-2}} = 3,27^\circ\text{C} \quad (15)$$

Mimo bardzo dobrego skorelowania badanych zmiennych losowych o dopasowaniu modelu (13) do danych empirycznych, tego powiedzieć nie możemy. Dlaczego tak jest, zostało wyjaśnione częściowo na początku tego podrozdziału – nie są to aż tak proste związki. Możemy spodziewać się lepszego dopasowania

wania, gdy uwzględnimy przesunięcie w czasie między usłonecznieniem a temperaturą gruntu. Uwzględniając zasadę, że najpierw Słońce grzeje, a potem wzrasta temperatura gruntu. Najmniejszym przesunięciem danych empirycznych w czasie, jakim dysponujemy, jest miesiąc, dlatego w tej konfiguracji je przeanalizujemy. Korzystając z danych (7), wykonujemy obliczenia pomocnicze:

$$\sum_{t=1}^{11} g_{t+1} = 105,0; \quad \sum_{t=1}^{11} u_t = 1521,9;$$

$$\sum_{t=1}^{11} u_t g_{t+1} = 19\,890,034;$$

$$\sum_{t=1}^{11} u_t^2 = 263\,829,63;$$

$$\sum_{t=1}^{11} g_{t+1}^2 = 1577,3648;$$

$$\text{var}(g) = 575,092; \quad \text{var}(u) = 53\,267,847; \quad (16)$$

$\text{cov}(u, g) = 5362,8067$. Wykorzystując wzory wcześniej przytoczone, badamy skorelowanie nowych zmiennych losowych:

$$r = 0,969; \quad t_0 = 11,7663 > 4,7809 = t_{0,001; 9} \quad (17)$$

Stwierdzamy wysoce istotne dodatnie skorelowanie badanych zmiennych losowych. Wyznamy między nimi prostą regresji w postaci:

$$g_{t+1} = b_0 + b_1 u_t \quad (18)$$

Oszacowanie jej parametrów jest następujące:

$$\hat{b}_1 = \frac{5362,8067}{53\,267,847} = 0,1007$$

$$\hat{b}_0 = 9,54 - 0,1007 \cdot 138,355 = -4,38 \quad (19)$$

Poszukiwany związek liniowy ma postać:

$$\hat{g}_{t+1} = -4,38 + 0,1007 \cdot u_t,$$

$$\text{dla } t = 1, 2, \dots, 11 \quad (20)$$

Dopasowanie do danych empirycznych modelu (20) kształtuje się następująco:

$$\hat{R}^2 = \frac{0,1007 \cdot 5362,8067}{575,092} = 0,939 \quad (21)$$

objaśnia więc prawie 94 procent zmienności średniej miesięcznej temperatury gleby. Średni błąd szacunku funkcji

$$\hat{s}_{gu} = \sqrt{\frac{575,092 - 0,1007 \cdot 5362,8067}{11 - 2}} = 1,97^\circ\text{C} \quad (22)$$

Łącząc rozumowanie dedukcyjne ze statystycznym, uzyskaliśmy bardzo prosty model (20) opisujący badany proces, jego dopasowanie do danych empirycznych też jest dobre. Należy pamiętać, że przytoczony opis dotyczy gleby pod ugiem. Rośliny uprawne i rozłożyste drzewa izolują grunt od ciepła słonecznego. Płynące wody podziemne także zaburza-

ją temperaturę przypowierzchniową. Ingerencja człowieka jeszcze bardziej komplikuje ten obraz. Wycinanie lasów i ekspansja terenów rolnych wystawia glebę na działanie promieni słonecznych. Wysuszenie i zasypywanie bagien eliminuje efekt chłodzenia wywołany parowaniem i przyczynia się do podgrzewania powierzchni. W podsumowaniu należy stwierdzić, że urbanizacja prowadzi do ocieplenia.

Literatura

- BAC S., KOŹMIŃSKI C., ROJEK M. 1993: *Agrometeorologia*. PWN, Warszawa.
- BAJKIEWICZ-GRABOWSKA E., MIKULSKI Z. 1993: *Hydrologia ogólna*. PWN, Warszawa.
- KOŹMIŃSKI C. 1981: *Temperatura gleby na głębokości 5 centymetrów w Polsce*. AR w Szczecinie; Inst. Uprawy, Nawoż. i Glebozn. w Puławach.
- KRÓLIKOWSKI C., STAJNIAK J. 1994 *Przypowierzchniowe zmiany temperatury Ziemi*. Przegląd Geologiczny, vol. 42, nr 10.
- KUZIEMSKA D. 1992: *O strukturze wahań temperatury powietrza w obecnym stuleciu na przykładzie danych z Warszawy*. Wiad. Inst. Meteorol. i Gospod. Wod. z. 4, Tom XV, XXXVI.
- Miesięczny Przegląd Agrometeorologiczny. 1974–1988.
- Promieniowanie Słoneczne. 1974–1988.
- RADOMSKI C. 1979: *Agrometeorologia*. PWN, Warszawa.
- SMOLIK S. 1995: *Uproszczona procedura estymacji wahań okresowych*. Przegląd Statystyczny, R XLII, z. 3–4.
- SMOLIK S. 1996: *Standardowy rok opadowy i termiczny Krakowa i Olsztyna*. Wiad. Inst. Meteor. i Gospod. Wod. nr 4.
- SZORNEL K. 1980: *Badanie związku między przebiegiem temperatury a doptywem radiacji*. Wiad. Inst. Meteor. i Gospod. Wod. z. 3–4; Tom VI, XXVII.
- ŻMUDZKA E. 1995: *Tendencje i cykle zmian temperatury powietrza w Polsce w latach 1951–1990*. Przegl. Geofiz., XL, z. 2.

Summary

Insolation Influence upon the Soil-Temperature Oscillation. The variation of mean temperature of soil during a month is identified by means of the following curvilinear regression model:

$g_t = s + A \cdot \sin(\omega t + \Theta) + \varepsilon_t$, where t expresses the successive months of the year, and the values of g_t are mean temperatures of soil at a selected depth. A method of estimation of its parameters was published elsewhere in a statistics paper. The model was used to identify the variation of mean temperature of soil at a depth of 5 cm in Warsaw during a month in a period of 1973 to 1987. The discussion shows strong correlation of the variation of mean temperature of soil at a depth of 5 cm in Warsaw during a month and the insolation of the respective location during the period under investigation, a month offset being employed for the values of the tested random variables. A straight regression line has been determined for the offset pairs of the values of the tested random variables. A good match of the model to the empirical data can be seen.

Author's address

S. Smolik

Agricultural University – SGGW

02-787 Warszawa ul. Nowoursynowska 166

Poland