

ANALIZA TEORETYCZNYCH MODELI PIERWSZEGO I DRUGIEGO OKRESU KONWEKCYJNEGO SUSZENIA WARZYW

Małgorzata Jaros

Katedra Inżynierii Procesów Rolniczych, Szkoła Główna Gospodarstwa
Wiejskiego

Synopsis: Przeprowadzono analizę wykorzystywania matematycznych modeli teorii konwekcyjnego suszenia produktów rolniczych do modelowania procesów suszenia warzyw. Uwzględniono przy tym fakt, że w procesie suszenia warzyw, o dużej początkowej zawartości wody, o wymianie wody z otoczeniem decydują zarówno zewnętrzne jak i wewnętrzne warunki wymiany. Wskazano na niejednoznaczność pojęcia zredukowanej zawartości wody.

Słowa kluczowe: suszenie, konwekcja, warzywa, matematyczny model, analiza modeli

Wykaz oznaczeń:

A	–	powierzchnia ciała	m
a_m	–	współczynnik dyfuzji masy	m^2/s
c	–	ciepło właściwe	J/(kgK)
α	–	współczynnik wnikania ciepła	$W/(m^2 \cdot K)$
M_s	–	masa absolutnie suchego ciała	kg
r	–	ciepło parowania wody	J/kg
u	–	zawartość wody w ciele	kg H ₂ O/kg s.m
u_0	–	początkowa zawartość wody	kg H ₂ O/kg s.m
u_r	–	równowagowa zawartość wody	kg H ₂ O/kg s.m
u_A	–	zawartość wody na powierzchni ciała	kg H ₂ O/kg s.m
U	–	zredukowana zawartość wody	kg/kg
t	–	temperatura ciała	°C
t_M	–	temperatura mokrego termometru ,	°C
t_p	–	temperatura suszącego powietrza	°C
ρ	–	gęstość mokrej masy produktu	kg/m ³
ρ_s	–	gęstość absolutnie suchej masy produktu	kg/m ³

τ	- czas suszenia	s
$A_1, A_2, B_n, C_n, K, K_1, K_2$	- współczynniki w modelach, zależne od własności suszonego ciała i warunków suszenia	
V	- objętość wilgotnego materiału	m^3

Wprowadzenie

Badania procesów konwekcyjnego suszenia produktów rolniczych na ogół rozpoczynają się badaniami kinetyki suszenia tych produktów. Obecny stan wiedzy wymaga, by wyniki tego etapu pracy przedstawiane były w postaci zweryfikowanych matematycznych modeli, wynikających z teorii wymiany ciepła i masy lub innej uznanej teorii naukowej.

W modelowaniu procesu konwekcyjnego suszenia warzyw, do opisu zmian zawartości wody podczas całego procesu suszenia, często wykorzystywana jest funkcja expotencjalna, której postać mają rozwiązania semi-empirycznych, różniczkowych modeli Lewisa. Funkcje te uważane są za matematyczne modele kinetyki suszenia, gdyż dają się potwierdzić empirycznie.

Czy ten sposób postępowania jest jednak formalnie poprawny?

Badania związane z matematycznym modelowaniem procesów konwekcyjnego suszenia produktów rolniczych rozpoczęły się, w latach sześćdziesiątych naszego stulecia, modelowaniem procesu suszenia ziarna zbóż przez Hustrilida i Flikke (1959), Pabisa i Hendersona (1961). Z powodzeniem wykorzystano w nich, istniejący aparat matematyczny, weryfikując rozwiązania równań wymiany ciepła i masy przedstawione w pracach Newmana, Sherwooda, Łykowa, jako modeli suszenia ziarn kukurydzy. W kolejnych latach udało się potwierdzić przydatność rozwiązań teoretycznych modeli wymiany do modelowania kinetyki suszenia różnych ziarn zbóż, nasion i innych produktów rolniczych. Nadal interesującym i nie do końca rozwiązaniem zagadnieniem pozostaje modelowanie procesu suszenia warzyw i owoców.

Analiza teretycznych modeli suszenia warzyw

Najczęściej cytowanym teoretycznym modelem suszenia ciał kapilarno porowatych w okresie malejącej szybkości suszenia, wykorzystywanym do analizy procesu suszenia różnych produktów rolniczych - w tym warzyw, jest model sformułowany na podstawie drugiego prawa Ficka, zapisywany w postaci równania:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \nabla(a_m \nabla u) \quad (1)$$

z warunkami: brzegowym i początkowym

$$\text{jeśli } \tau > 0 \text{ to } u_A = u_r, \quad u(\tau = 0, x, y, z) = u_0. \quad (2)$$

Model ten opisuje związek między zawartością wody u , w dowolnym punkcie suszonego ciała stałego, a czasem suszenia i współczynnikiem dyfuzji wody a_m , przy założeniu, że temperatura suszonego ciała nie zmienia się w czasie suszenia. Jeśli dodatkowo założy się, że zawartość wody w każdym punkcie suszonego ciała jest na początku procesu jednakowa, współczynnik dyfuzji wody jest stały, oraz że parametry otoczenia nie ulegają zmianie, można przedstawić go, po scałkowaniu, na przykład dla zagadnienia jednowymiarowego w następującej postaci sumy szeregu nieskończonego:

$$\frac{u - u_r}{u_0 - u_r} = A \cdot \sum_{n=1}^{\infty} [B_n \cdot \exp(C_n a_m \tau)] \quad (3)$$

W praktyce uwzględnia się jedynie skończoną, zależną od wartości liczby Fouriera dla wymiany masy, liczbę wyrazów sumy (Jaros, 1993). Do matematycznego modelowania procesów suszenia ciał stałych często są stosowane uproszczone matematyczne modele procesu suszenia wyprowadzone na bazie modelu (3). Uproszczenie do pierwszego lub sumy dwóch pierwszych wyrazów szeregu było uzasadnione szybką zbieżnością szeregu oraz przy braku dostępu do komputerów żmudnymi obliczeniami.

Semi-empiryczny model, stosowany do opisu procesów konwekcyjnego suszenia ziarna, warzyw i owoców, uwzględniający tylko pierwszy wyraz sumy tzw. model Lewisa, ma postać

$$\frac{u - u_r}{u_0 - u_r} = \exp(-K\tau) \quad (4)$$

Modyfikację modelu (4) zaproponował Page przedstawiając go w postaci

$$\frac{u - u_r}{u_0 - u_r} = \exp(-K\tau^n) \quad (5)$$

Aby uzyskać lepszą niż dla modelu (4) weryfikację empiryczną, Henderson zmodyfikował ten model dodając do jego lewej strony drugi składnik, wówczas

$$\frac{u - u_r}{u_0 - u_r} = A_1 \exp(-K_1\tau) + A_2 \exp(-K_2\tau) \quad (6)$$

Podobnie jak model (3) tak i jego uproszczone czy zmodyfikowane postacie (4), (5) i (6) mogą być wykorzystywane do modelowania procesu suszenia ciał kapilarno porowatych tylko w okresie malejącej szybkości suszenia, a dokładnie w okresie gdy o wymianie masy decydują jedynie warunki wewnętrzne czyli dyfuzja, charakteryzująca się stałą wartością współczynnika dyfuzji.

W przypadku suszenia ziarna, warzyw i owoców współczynnik dyfuzji wody w suszonych ciele jest zmienny i zależy od temperatury suszonego produktu i średniej zawartości wody, zatem podobieństwo tych procesów do teoretycznych procesów opisywanych wymienionych równaniami jest ograniczone, chociaż równania te dobrze weryfikują się empirycznie [Markowski i in, 1994 a, b]. Można zatem uznać, że jest zachowane tylko w odniesieniu do małych przedziałów

czasowych procesu suszenia.

Weryfikując modele drugiego okresu suszenia, autorzy badań niekiedy posługują się pojęciem zredukowanej zawartości wody, oznaczanej jako:

$$U(\tau) = \frac{u(\tau) - u_r}{u_0 - u_r}.$$

W wyrażeniu tym u_r oznacza równowagową zawartość wody dla suszonego produktu, stałą przy niezmiennych się warunkach zewnętrznych, natomiast u_0 oznacza stałą, początkową zawartość wody w suszonym produkcie. Założenie stałej (jednakowej) początkowej zawartości wody jest wymogiem formalnym, natomiast w praktyce oznacza ono, że można porównywać ze sobą jedynie wyniki pomiarów takich procesów suszenia, które dotyczyły próbek produktu o jednakowej początkowej zawartości wody. Jednakże posługiwanie się zredukowaną zawartością wody sprowadza dowolne wartości wyników pomiarów do wartości z przedziału $\langle 0,1 \rangle$ i pozornie umożliwia porównywanie między sobą procesów, które mogą być zupełnie różne. Inną negatywną konsekwencją niejednoznaczności określania wartości u_0 można wskazać przy wykorzystaniu modelu (3) do wyznaczenia wartości współczynnika dyfuzji masy. Otóż, jeśli chcemy wyznaczyć wartość a_m dla konkretnego materiału, wykorzystując model (3), w którym zachodzi funkcyjna zależność $U(\tau) = f(a_m, \tau)$, natomiast stwierdzamy, że materiał ten schnie w pierwszym oraz w drugim okresie, to musimy jednoznacznie określić moment, w którym rozpoczyna się drugi okres, bowiem tylko dla niego adekwatny jest model (3), z którego chcemy skorzystać. Jednoznaczne wskazanie takiej wartości, stałej dla danego produktu jest bardzo ważne, w przypadku warzyw jest jednak trudne ponieważ przejście między pierwszym i drugim okresem suszenia jest płynne - stanowi okres przejściowy.

Jeżeli chcemy wyznaczyć wartość współczynnika dyfuzji wody dla określonej zawartości wody należącej do zakresu typowego drugiego okresu suszenia, czyli gdy temperatura materiału jest stała, to logicznie wnioskując współczynnik ten powinien mieć jedną ustaloną wartość, niezależną od początkowej zawartości wody w danym produkcie. Okazuje się jednak, że wartości te są różne gdy u_0 nie jest stałe. Wyniki obliczeń pokazały, że gdy na przykład: $u_{01} < u_{02} < u_{03}$, natomiast $u_r = \text{const.}$ wówczas $U_{01} > U_{02} > U_{03}$, w konsekwencji przy $t = \text{const.}$: $a_m(u_{01}) < a_m(u_{02}) < a_m(u_{03})$.

Wartość u_0 w modelu (3) oznacza początkową zawartość wody dla okresu w którym, w danym produkcie, o wymianie masy decyduje proces dyfuzji. Dla ziarna, na przykład, powinna być to krytyczna zawartość wody.

Jeżeli w procesie suszenia istnieje okres w którym o wymianie masy decydują zewnętrzne warunki suszenia, to jeśli nie ulegają zmianie temperatura i wilgotność powietrza suszącego wówczas średnia temperatura ciała nie różni się od temperatury powierzchni i może być przyrównana do stałej temperatury mokrego termometru.

W procesach suszenia warzyw, mających dużą zawartość wody, temperatura

powierzchni suszonych obiektów przez długi czas procesu jest prawie stała i bardzo bliska temperaturze mokrego termometru. Fakt ten wskazuje na istnienie okresu, w którym o wymianie masy decydują zewnętrzne warunki suszenia - często nazywanym okresem stałej szybkości suszenia. Okres stałej szybkości suszenia dla niektórych warzyw można łatwo wskazać i należy uwzględnić w analizie procesu, dla niektórych można pominąć ze względu na krótki czas jego trwania, np. dla cebuli i czosnku [Jaros i in, 1994].

Jednakże, czas trwania okresu stałej szybkości suszenia nie powinien być utożsamiany z okresem, w którym o wymianie masy decydują zewnętrzne warunki suszenia. Uwzględniając zjawisko skurczu suszarniczego warzyw, obserwowane właściwie od początku procesu ich suszenia, zweryfikowano hipotezę, że pierwszy okres suszenia może charakteryzować się malejącą szybkością suszenia spowodowaną malejącą powierzchnią suszonego ciała [Pabis, 1994 a, b; Murakowski, 1994].

W związku z powyższym, matematycznym modelem tego okresu suszenia dla warzyw, dobrze weryfikującym się empirycznie jest otrzymane na podstawie bilansu cieplnego dla wilgotnego ciała stałego, umieszczonego w ośrodku gazowym o temperaturze wyższej niż temperatura ciała, czyli z równania:

$$\frac{dt}{d\tau} = -\frac{\alpha A}{cV\rho}(t - t_p) + \frac{r\rho_s}{c\rho} \cdot \frac{du}{d\tau} \quad (7)$$

przy odpowiednich założeniach, równanie chwilowej szybkości suszenia ciała stałego w postaci

$$\frac{du}{d\tau} = -\frac{\alpha \cdot A(u)}{r \cdot M_s}(t_p - t_M) \quad (8)$$

gdzie: $A(u) \neq \text{const}$ i jest uzależnione od skurczu suszarniczego.

Rozwiązanie równania (8) należy do klasy funkcji potęgowych istotnie różnej od klasy funkcji wykładniczych modelujących drugi okres suszenia.

Podsumowanie

W modelowaniu procesów suszenia warzyw, mających dużą zawartość wody, należy uwzględnić fakt, że o wymianie w nich wody z otoczeniem decydują zarówno zewnętrzne jak i wewnętrzne warunki suszenia. Wydaje się że jest merytorycznym błędem, opisywanie całego procesu konwekcyjnego suszenia warzyw funkcją wykładniczą (charakterystyczną dla modeli drugiego okresu suszenia), pomimo iż w niektórych przypadkach uzyskuje się dużą zgodność obliczeń takiej funkcji z wynikami eksperymentu. Nie można uważać jej za model strukturalny procesu konwekcyjnego suszenia warzyw, ponieważ nie jest spełniony warunek podobieństwa modelu do modelowanego procesu. Postać funkcji wykładniczej może mieć tzw. model informacyjny jakim jest formuła empiryczna.

Bibliografia

- Hustrild, A., A. M. Flikke. 1959. Theoretical drying curve for shelled corn. Trans. ASAE, No 2.
- Jaros, M. 1993. Analiza matematycznej postaci teoretycznego modelu suszenia cienkiej warstwy ziarna. RNR, t.79-C-2, 10-18.
- Jaros, M., M. Markowski, A. Kaleta. 1994. Matematyczne modelowanie procesu suszenia czosnku. Cz.II. Weryfikacja hipotezy istnienia I-go okresu suszenia czosnku. RNR, t.80-C-1, 20-29.
- Markowski, M., M. Jaros, A. Kaleta. 1994a. Matematyczne modelowanie procesu suszenia czosnku. Cz.III. Weryfikacja równań modelujących okres malejącej szybkości suszenia czosnku. RNR, t.80-C-1, 30-40.
- Markowski, M., M. Jaros, A. Kaleta. 1994b. Matematyczne modelowanie procesu konwekcyjnego suszenia buraków ćwikłowych. Cz.II. Modele. RNR, t.80 - C -1, 59-69.
- Murakowski, J. 1994. Matematyczny model kinetyki suszenia pieczarek w warunkach konwekcji naturalnej, RNR, t.80-C-1
- Pabis, S. 1994a. Rozkład zawartości wody w okresie stałej szybkości suszenia pojedynczego ciała stałego suszonego konwekcyjnie. Problemy Inżynierii Rolniczej, Nr 2.
- Pabis, S. 1994b. Uogólniony model kinetyki suszenia w pierwszym okresie warzyw i owoców. ZPPNR, z.417.
- Pabis, S., S. M. Henderson. 1961. Grain drying theory: II A critical analysis of the drying curve for shelled maize. J. Agric. Engng. Res., No.7.

M. Jaros

AN ANALYSIS OF THEORETICAL MODELS OF THE FIRST AND SECOND PERIOD OF CONVECTION DRYING OF VEGETABLES

Summary

Investigations of processes of convection drying of agricultural products begin, most often, with studies on the kinetics of drying of these materials. Present state of knowledge requires the presentation of the obtained results in the form of verified mathematical models, which result from a theory of heat and mass exchange or any other well-known scientific theory. This paper presents an analysis of application of mathematical models of convection drying theory of agricultural products, for modelling of vegetable drying processes. It was assumed that in drying processes of vegetables, having high initial water content, water exchange with ambient environment is conditioned by external and internal conditions of the exchange. Therefore, this process must be described with models of the first and second period of drying. It was also pointed out that the term „reduced water content” was not identical in meaning.