

KRZYSZTOF JAROSZ, BRONISŁAW KŁAPEĆ

## Modelowanie wzrostu drzewostanów z wykorzystaniem funkcji Gompertza

Height growth modelling using the Gompertz function

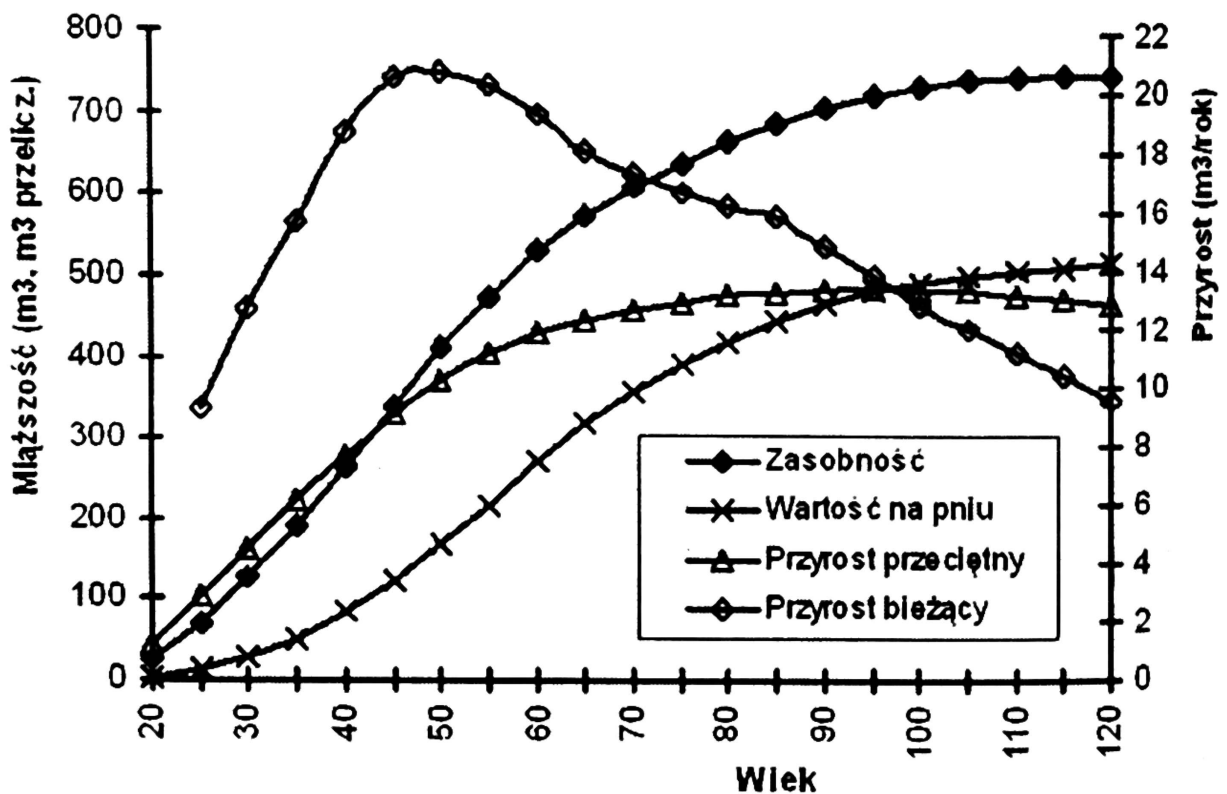
**Abstract.** The paper presents selected properties of the Gompertz function, which replaced the tables in the State Forest Information System (SILP), used among others to calculate mean height increment and stand volume. The approximation of the function using two methods was compared.

**Key words:** growth model, function approximation, SILP

### Wstęp

**W**zrost jest podstawową cechą systemów biologicznych - może występować zarówno na poziomie populacji, indywidualnego osobnika czy w obrębie organizmu. W badaniach i praktyce istnieje potrzeba syntezy obserwacji wzrostu czy porównań, przy zastosowaniu kilku parametrów. W takiej sytuacji niezastąpione stają się modele matematyczne, które mogą służyć do opisu trendu wzrostu organizmów żywych. W celu ułatwienia spojrzenia na te zmiany przyjmuje się, że tendencja rozwojowa może być opisana za pomocą pewnej funkcji, w której rolę zmiennej zależnej pełni wielkość obserwowanego w czasie zjawiska, a zmiennej niezależnej – czas. Tego rodzaju związek nazywamy funkcją trendu. Funkcja taka może mieć różny przebieg. Analiza procesów wzrostowych i przyrostowych pozwala zauważyć występowanie trzech rodzajów trendów, zilustrowanych na rycinie 1. Wzrost **logarytmiczny** charakteryzuje się początkowo wysokim tempem zmian, po czym stopniowo zmniejsza się, nie wykazując punktu przegięcia. Ma to miejsce np. przy przyroście przeciętnym drzewostanu. Inny charakter mają zmiany przyrostu bieżącego drzewostanu. Najpierw występuje wyraźna faza szybkiego przyrostu, po przekroczeniu której następuje spadek tempa. Wyraźnie można określić punkt, w którym występuje maksimum przyrostu. Taki rodzaj wzrostu można nazwać **dzwonowatym**. Z trzecim przypadkiem można się spotkać obserwując np. zasobność wyrażoną ilościowo lub wartościowo. Daje się zauważyć okres wolnego wzrostu, który następnie dość szybko przechodzi w bardzo intensywny, by wreszcie osłabić tempo. Krzywa obrazująca ten wzrost przypomina nieco rozciągniętą literę S i wykazuje dość wyraźnie punkt przegięcia, gdzie następuje

## 1 ha drzewostanu świerkowego - bonitacja I



RYC. 1. Ilustracja podstawowych rodzajów wzrostu drzewostanu

kulminacja tempa wzrostu – oddzielający część wklęsłą i wypukłą. Wzrost taki możemy nazwać **esowatym**.

Do niedawna podstawowym środkiem umożliwiającym prezentowanie wzrostu drzewostanów (wysokości, zasobności, wartości itp.) wraz z wiekiem były tablice zasobności. Taki sposób przedstawiania tempa rozwoju drzewostanów nie może obecnie sprostać szerokiemu zapotrzebowaniu, szczególnie z uwagi na konieczność korzystania z obliczeń komputerowych oraz niemożliwość bezpośredniego wykorzystania danych tablicowych do optymalizacji (brak możliwości różniczkowania). Z tych też względów wygodniej jest zastąpić dane tablicowe modelem matematycznym. Jego konstrukcja powinna charakteryzować się z jednej strony dużą dokładnością z drugiej zaś dużą prostotą. Modelując konkretne zagadnienie, sięga się najpierw do modeli już znanych, by je następnie modyfikować, a w ostateczności tworzyć nowe.

W literaturze przedmiotu, celem matematycznego ujęcia wspomnianych rodzajów wzrostu zaproponowano wiele funkcji. Z reguły każda z nich ma określone ograniczenia, co praktycznie przesądza o możliwości zastosowania. Na przykład jeśli funkcja w całej dziedzinie jest rosnąca, to szukanie jej ekstremum mija się z celem. Dlatego ważna jest znajomość własności funkcji, którą zamierza się zastosować.

### Niektóre własności funkcji Gomperta

Chociaż funkcja ta została zaproponowana przez Gomperta jeszcze w XIX wieku, to nadal jest jedną z najczęściej używanych przez matematyków funkcji opisujących zjawiska

wzrostu (Stanisz 1986). Spośród spotykanych w literaturze różnych wariantów zapisu, w niniejszej pracy zostanie przedstawiona funkcja Gompertza zaczerpnięta z pracy Smolika (1989), uzupełniona przez autorów o parametr  $d$ . Po wspomnianej modyfikacji jest ona definiowana następująco:

$$f(t) = ae^{-be^{-ct}} + d \quad [1]$$

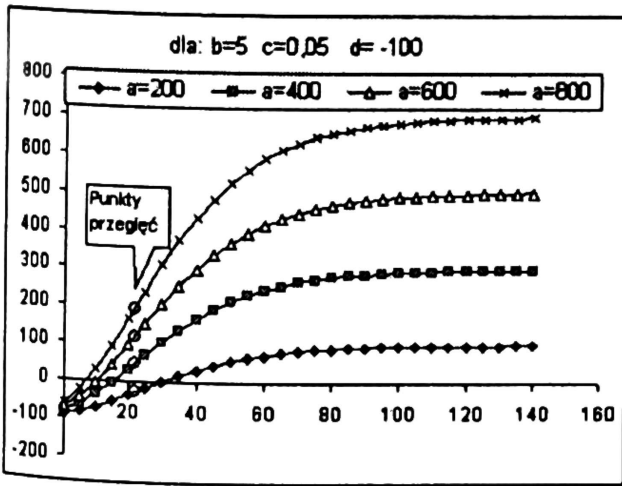
gdzie:

- $f(t)$  – badana wielkość (np. wysokość, miąższość) w wieku  $t$ ,
- $a, b, c, d$  – parametry funkcji,
- $e$  – stała (2,718282).

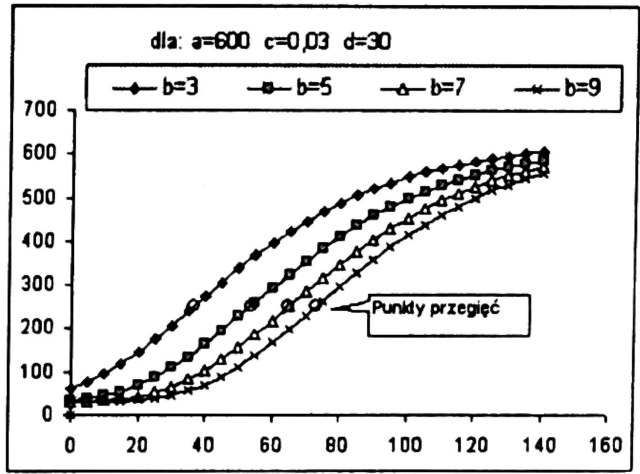
Ponieważ w praktyce jej postać wykładnicza określona wzorem (1) jest niewygodna w zapisie, można wykorzystać jej zapis linearny:

$$f(t) = a \exp(-b \exp(-ct)) + d \quad [2]$$

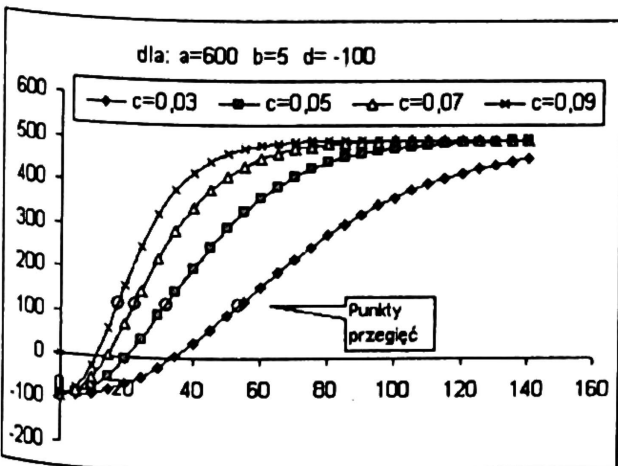
Korzystanie z funkcji Gompertza zalecane jest wówczas, gdy badane wielkości charakteryzują się najpierw etapem przyśpieszonego wzrostu, który następnie jest zwalniany. Literatura wskazuje, że z funkcji tej korzysta się szczególnie często gdy zachodzą następu-



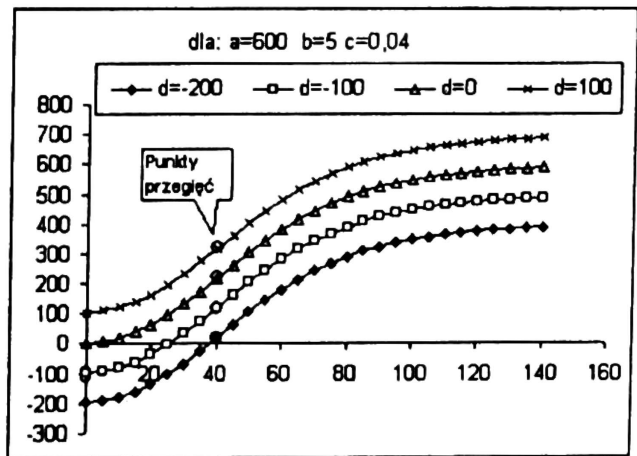
a



b



c



d

RYC. 2. Wpływ zmian wartości parametrów na przebieg wartości funkcji Gompertza

jące warunki:  $a > 0$ ,  $b > 1$ ,  $c > 0$ . Przy takich parametrach funkcja jest rosnąca do asymptoty poziomej  $y = a$  i ma punkt przegięcia o współrzędnych określonych wzorem:

$$t = \frac{\ln b}{c}; \quad y = \frac{a}{e} + d \quad [3]$$

Natomiast gdy spełnione są warunki:  $a > 0$ ,  $0 < b < 1$  i  $c < 0$  funkcja maleje, z zachowaniem punktu przegięcia określonego wzorem (3). Jak wspomniano, znajomość punktu przegięcia ma istotne znaczenie, gdyż określa wiek drzewostanu, kiedy następuje największe tempo wzrostu (lub spadku) funkcji.

Ze względów praktycznych ważna jest też znajomość wpływu zmian poszczególnych parametrów funkcji Gompertza na kształtowanie się jej wartości. Zostanie to przedstawione na przykładach zestawionych na rycinie 2. Jak widać, parametr  $a$  wyznacza asymptotę, do której zmierza maksymalna wartość funkcji (ryc. 2a). Zatem wraz ze wzrostem parametru asymptota przesuwana się w górę. Z kolei wzrost parametru  $b$  (ryc. 2b) powoduje, że punkt przegięcia (oznaczający np. maksimum przyrostu bieżącego) przesuwana się na późniejszy wiek drzewostanu. Daje się również zauważyć, że w całym zakresie danych im większy jest parametr  $b$  tym uzyskuje się mniejsze wartości funkcji. Z odwrotnym skutkiem niż przy  $b$  mamy do czynienia przy zwiększeniu parametru  $c$  (ryc. 2c).

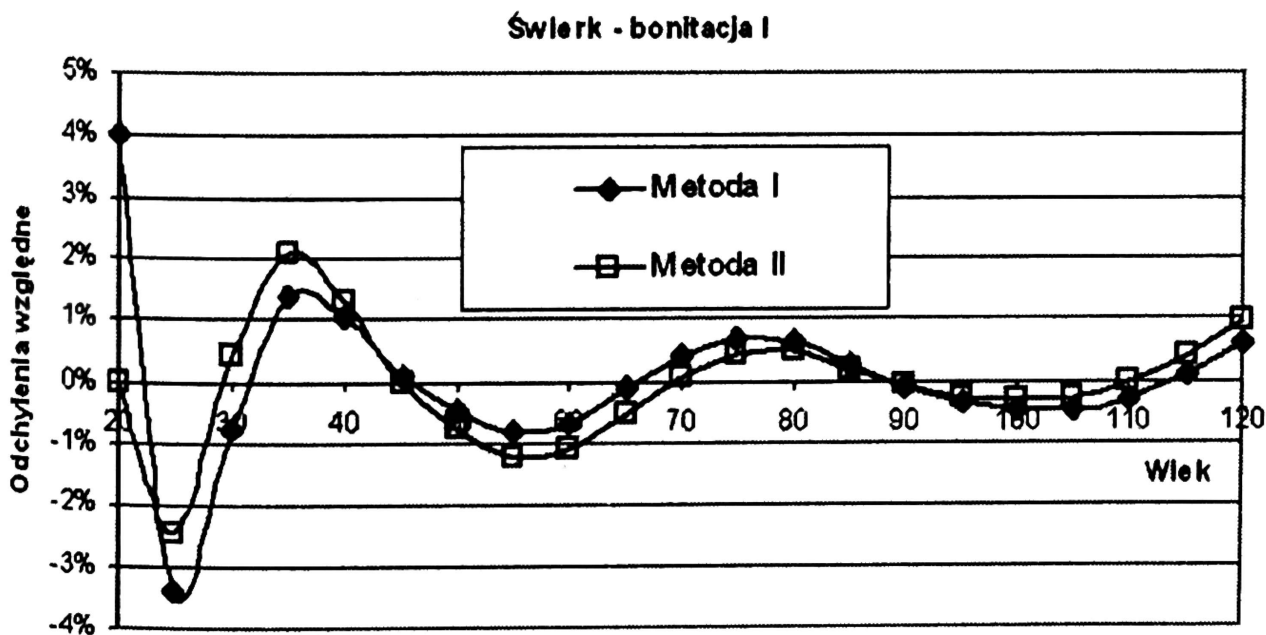
Wprowadzenie przez autorów do funkcji Gompertza stałej  $d$  (ryc. 2d), uzasadnione jest tym, że w przeciwieństwie do innych modeli, przy badaniu wzrostu drzewostanu należy uwzględniać fakt, że wartości niezerowe pojawiają się dopiero po przekroczeniu tzw. wieku granicznego. Na przykład przy zasobności grubizny pierwsze wartości niezerowe pojawiają się w wieku około 20 lat. W związku z tym zastosowanie dodatkowego parametru powoduje przesunięcie całej funkcji w dół lub w górę (w tym również jej asymptoty), przez co uzyskuje się szanse na lepsze dopasowanie funkcji do danych.

## Problemy praktycznego wykorzystania funkcji

Do aproksymacji parametrów funkcji Gompertza służy odpowiednie oprogramowanie. Można posłużyć się stosunkowo prostymi i łatwo dostępnymi narzędziami, takimi jak arkusz kalkulacyjny Excel z dodatkiem Solver, czy bardziej zaawansowanymi pakietami obliczeń matematycznych i statystycznych (np. pakietem Statistica®). Przystępując do aproksymacji zaleca się najpierw wstępnie oszacować przebieg linii trendu celem dobrania przybliżonych wartości początkowych parametrów funkcji. Trafne dobranie tych parametrów pozwala programowi łatwiej osiągnąć rozwiązanie optymalne. Problemy zbieżności procedur aproksymacji występują zwłaszcza wtedy, gdy parametry wykazują silną kowariancję, tj. wzrost jednego parametru może być rekompensowany spadkiem innego, bez wyraźnego wpływu na przebieg wartości funkcji. Zazwyczaj docelową miarą dopasowania jest minimalizacja odchyłeń (dodatnich i ujemnych), uzyskiwana metodą najmniejszych kwadratów. Kiedy w kolejnych iteracjach suma kwadratów odchyłeń zmniejsza się nieznacznie, procedura aproksymacji zatrzymuje się i podaje definitywne oszacowania wartości parametrów. W związku z tym przy różnych wartościach początkowych można teoretycznie uzyskać nieskończenie wiele rozwiązań tego samego modelu. Dobroć dopasowania modelu może być oceniana wartością nieliniowego współczynnika determinacji  $R^2$ . Jeśli

$R^2=1$ , krzywa przechodzi dokładnie przez wszystkie punkty pomiaru, co zdarza się rzadko. Zazwyczaj o dobrym stopniu dopasowania można mówić gdy  $R^2$  przekracza 0,98.

Należy zaznaczyć, że współczynnik determinacji służy tylko do zgrubnej oceny dobroci dopasowania. Każdorazowo należy oceniać błędy dopasowania w całym przebiegu krzywej. Jeśli okaże się że w pewnych przedziałach (lub punktach) dopasowanie to jest zbyt słabe należy dążyć do poprawienia wyniku, nawet kosztem ogólnego dopasowania. Z taką sytuacją zetknęliśmy się przy aproksymacji danych tablicowych. Fragment tych danych (Szymkiewicz 1966) dotyczących zasobności świerka bonitacji I, zamieszczono w tabeli. Mimo osiągnięcia najlepszego dopasowania całego przebiegu krzywej metodą najmniejszych kwadratów (MNK) stwierdzono, że rozkład różnic między wartościami tablicowymi a wartościami funkcji nie był całkowicie zgodny z oczekiwaniami – największe względne



RYC. 3. Odchylenia względne wartości funkcji Gompertza w stosunku do danych tablicowych w poszczególnych stopniach wieku drzewostanu świerkowego bonitacji I - przy zastosowaniu dwóch metod aproksymacji

odchylenia pojawiały się w młodym wieku drzewostanu. Jednym ze sposobów poprawy wyniku może być zmiana kryterium aproksymacji. W opisywanym przypadku można na przykład zastosować minimalizację średniego odchylenia względnego, które liczy się z poszczególnych odchyłeń, co wyrażają następujące wzory:

$$\Delta W = \frac{\sum_{i=1}^n |\Delta W_i|}{n} \rightarrow \min \quad [4]$$

$$\Delta W_i = \frac{W_{fun_i} - W_{tab_i}}{W_{tab_i}} \cdot 100 \quad [\%] \quad [5]$$

gdzie:

$W_{fun_i}$  – wartość otrzymana z funkcji Gompertza w  $i$ -tym stopniu wieku drzewostanu,

$W_{tab_i}$  – wartość tablicowa w  $i$ -tym stopniu wieku drzewostanu,

$n$  – liczba stopni wieku drzewostanu w tablicach.

TABELA

Porównanie wyników aproksymacji parametrów funkcji Gompertza opisującej zasobność drzewostanu świerkowego I bonitacji z zastosowaniem dwóch metod (opis w tekście)

Wiek (lata)	Zasobność tabel. (m <sup>3</sup> )	Metoda I (MNK)			Metoda II (MOW)		
		zasobność z funkcji (m <sup>3</sup> )	różnica zasobności (m <sup>3</sup> )	różnica zasobności (%)	zasobność z funkcji (m <sup>3</sup> )	różnica zasobności (m <sup>3</sup> )	różnica zasobności (%)
20	25	26,01	1,01	4,03	25,00	0,00	0,00
25	70	67,63	-2,37	-3,39	68,30	-1,70	-2,42
30	125	124,07	-0,93	-0,74	125,54	0,54	0,43
35	189	191,59	2,59	1,37	192,93	3,93	2,08
40	262	264,80	2,80	1,07	265,39	3,39	1,30
45	338	338,41	0,41	0,12	338,00	0,00	0,00
50	410	408,16	-1,84	-0,45	406,83	-3,17	-0,77
55	475	471,32	-3,68	-0,77	469,33	-5,67	-1,19
60	530	526,51	-3,49	-0,66	524,19	-5,81	-1,10
65	574	573,43	-0,57	-0,10	571,10	-2,90	-0,50
70	610	612,48	2,48	0,41	610,40	0,40	0,07
75	640	644,45	4,45	0,70	642,80	2,80	0,44
80	666	670,29	4,29	0,64	669,19	3,19	0,48
85	689	690,98	1,98	0,29	690,46	1,46	0,21
90	708	707,41	-0,59	-0,08	707,48	-0,52	-0,07
95	723	720,38	-2,62	-0,36	721,03	-1,97	-0,27
100	734	730,58	-3,42	-0,47	731,75	-2,25	-0,31
105	742	738,57	-3,43	-0,46	740,21	-1,79	-0,24
110	747	744,81	-2,19	-0,29	746,87	-0,13	-0,02
115	749	749,67	0,67	0,09	752,10	3,10	0,41
120	749	753,45	4,45	0,59	756,20	7,20	0,96
Suma kwadr. odchyień		155,72			208,62		
Odchylenie średnie (%)		0,81			0,63		
Parametry funkcji Gompertza		a=786,916; b=7,897; c=0,05129; d=-20,3788		a=798,423; b=7,380501; c=0,049908; d=-27,5888			

Zastosowanie kryterium minimalnego średniego odchylenia względnego (MOW) spowodowało zmianę w rozkładzie odchyłeń w kierunku większej dokładności w tych przedziałach wieku gdzie różnice były największe (ryc. 3, metoda II). Nastąpiło to jednak kosztem gorszego dopasowania w całym zakresie, o czym wymownie świadczy zwiększona aż o 34% suma kwadratów odchyłeń (tab.). Jednakże wspomniane modyfikacje kryterium pozwoliły uzyskać spadek błędu średniego z 0,81% do 0,63%. Wyraźniej zilustrowano to na rycinie 3, gdzie widać znacznie korzystniejszy rozkład odchyłeń względnych uzyskanych metodą II w młodszym wieku drzewostanu.

Przedstawiona funkcja Gompertza praktycznie już została wykorzystana w SILP. Najpierw zastosowano ją w pakiecie ACER, do określania zasobności w procedurze wyznaczania kolejności cięć drzewostanów. Ponieważ jej postać okazała się stosunkowo prosta, a uzyskane wyniki wystarczająco dokładne, wykorzystano ją w systemie LAS zamiast tablic zasobności, w procedurze rocznej aktualizacji stanu lasu, uwzględniającej przyrost zapasu i przeciętnej wysokości gatunków w drzewostanach (DGLP 2001). Wymagało to opracowania szeregu modeli dla ujęcia niezbędnych elementów wspomnianych tablic (Kłapeć, Niedziela 1993).

Wbudowanie w bazę danych systemu LAS funkcji Gompertza zamiast tablic, poza wygodą dla programistów, ma istotne znaczenie praktyczne. Istnieje bowiem możliwość aktualizowania parametrów funkcji w nadleśnictwach. Wskazówką do zmian mogą być lokalne charakterystyki drzewostanów, których trend rozwoju może znacznie odbiegać od modelu opartego na wspomnianych tablicach. Warunkiem jest jednak opracowanie przez nadleśnictwo nowych parametrów funkcji, które lepiej oddają dynamikę zmian zapasu rosnącego. Zalecana jest jednak daleko idąca ostrożność i staranne przetestowanie nowych parametrów przed wprowadzeniem do bazy i stosowania w procedurach aktualizacji rocznych.

*Katedra Urządzania Lasu, Geomatyki i Ekonomiki Leśnictwa SGGW  
02-528 Warszawa ul. Rakowiecka 26/30  
E-mail: krzys@robin.sggw.waw.pl, bronek@robin.sggw.waw.pl*

## Literatura

1. DGLP 2001: SILP – Podręcznik użytkownika. Zeszyt 24 – Aktualizacja stanu posiadania. Warszawa.
2. Kłapeć B., Niedziela A. 1993: Zestawienie i ocena współczynników funkcji wybranych cech taksacyjnych drzewostanów. Maszynopis w Katedrze Ekonomiki Leśnictwa SGGW. Warszawa.
3. Smolik S. 1989: Użyteczność modeli tendencji rozwojowej w prognozie rolniczej. Biuletyn Informacyjny Akademii Rolniczo-Technicznej w Olsztynie nr 27. Olsztyn.
4. Stanisław S. 1986: Funkcje jednej zmiennej w badaniach ekonomicznych. PWN. Warszawa.
5. Szymkiewicz B. 1966: Tablice zasobności i przyrostu drzewostanów. PWRiL, Warszawa.

## Summary

### Height growth modelling using the Gompertz function

Gompertz function frequently used in mathematics can quite precisely describe growth processes especially when this growth graphically has the form of the letter "S" (Fig. 1). The Gompertz function (formula 1) presented in the paper acquired a new form by adding a new parameter (d) which ensured better fitness in the case when the values under study occur at a given age of a stand. The authors presented the selected general properties of the function and illustrated the effect of changes of its parameters (Fig. 2). They demonstrated that approximation of the function using the least squares method (MNK) can lead to results, which are characterised with distinct relative deviations for stands at young age (Table 1). In such situation it is worthy to apply different criterion such as minimisation of the mean relative deviation (MOW – formula 4), which leads to the worsening of the global fitness yet, it can locally be more effective (Fig. 3). The application of the Gompertz function instead of the tables makes it easier for Forest Districts to introduce modifications to height growth and volume calculations. Serious discrepancies in calculation results with respect to the local dynamics in the growing stock prove the need to perform modifications.