

LEPKOSPREŻYSTE CHARAKTERYSTYKI KORZENI BURAKÓW CUKROWYCH*

K. Gołacki

Katedra Podstaw Techniki AR, ul. Doświadczalna 50 A, 20-280 Lublin
e-mail: golacki@faunus.ar.lublin.pl

Streszczenie. W niniejszej pracy w oparciu o test relaksacji naprężeń przedstawiono zależności pomiędzy stanem naprężeń i odkształceń w czasie w próbkach korzeni buraków cukrowych odmian Oktawia i Janus. Dane doświadczalne uzyskano z dwóch niezależnych testów relaksacji naprężeń przeprowadzanych w warunkach stanu jednoosiowego odkształcenia i stanu jednoosiowego naprężenia próbki. W wyniku eksperymentów wyznaczono przebiegi w czasie modułów ścinania, ściśliwości objętościowej i współczynnika Poissona. Stwierdzono tendencję wzrostową modułów sprężystości próbek obu odmian korzeni wraz ze wzrostem prędkości deformacji wstępnej.

Słowa kluczowe: korzeń buraka cukrowego, relaksacja naprężeń, lepkosprężystość.

WPROWADZENIE

Korzenie buraków cukrowych z racji wysokiego poziomu turgoru ulegają licznym uszkodzeniom podczas operacji technologicznych takich jak: zbiór, czyszczenie, budowa pryzm, transport i odbiór w cukrowni. Korzenie poddawane są ściskaniu, zginaniu i udarom, które powodują pęknięcia, złamania, zgniecenia i otarcia ich powierzchni zewnętrznej.

Badania ostatnich lat pokazują, że zastosowanie nowoczesnych wielorzędowych kombajnów wyposażonych w wibracyjne wyorywacze polderowe przyczyniło się do zmniejszenia strat podczas zbioru. Jednakże w tym samym czasie wzrosły wymagania odnoszące się do stanu zanieczyszczenia surowca, co wymusiło zintensyfikowanie procesów czyszczenia i w konsekwencji wzrost ilości uszkodzeń korzeni. Obok wielu rodzajów uszkodzeń klasyfikowanych zwykle w oparciu o ich pole powierzchni i głębokość, w korzeniach powstają także uszkodzenia wewnętrzne.

* Praca finansowana w ramach projektu badawczego KBN 5 P06F 006 19.

Już niewielka ilość energii mechanicznej pochłonięta przez korzeń może spowodować degradację tkanek a następnie reakcje enzymatyczne, co powoduje straty cukru.

Wielkość strat cukru na różnych etapach zarówno hodowli buraka jak i jego produkcji jest znaczna, co było przedmiotem wielu badań [1,6]. Wydaje się, że poprawie technologii, pod kątem ograniczenia strat cukru począwszy od wyorywania korzeni a skończywszy na uzyskaniu krajanki, nie poświęca się dostatecznej uwagi [8].

W przypadku materiałów pochodzenia roślinnego o dużej zawartości wody, do których zalicza się korzeń buraka cukrowego charakterystyki lepkosprężyste są dobrym źródłem informacji pozwalającym przewidywać ich reakcje na obciążenia mechaniczne. Charakterystyki te mogą także służyć do weryfikacji innych testów a także oceny stopnia uszkodzeń wewnętrznych tkanek.

Dotychczasowe badania w tej dziedzinie opierały się na założeniu nieściśliwości materiału ($K = \infty$) lub założeniu stałej wartości modułu ściśliwości objętościowej K . Pozwoliło to na wyznaczenie jednoosiowych funkcji relaksacji. W niniejszej pracy w oparciu o trójwymiarową teorię lepkosprężystości przedstawiono zależności pomiędzy stanem naprężeń ściskających, ścinających i odkształceniem próbki w funkcji czasu. Dane doświadczalne uzyskano z dwóch niezależnych eksperymentów relaksacji naprężeń dokonywanych na próbkach z tego samego korzenia [5]. Próbki ściskano w warunkach stanu jednoosiowego odkształcenia i stanu jednoosiowego naprężenia, co umożliwiło wyznaczenie między innymi zmiennego w czasie współczynnika Poissona.

MODEL TEORETYCZNY MATERIAŁU LEPKOSPŘĘŻYSTEGO

Istnieje kilka równoważnych sposobów zapisu związków konstytutywnych dla materiałów wykazujących lepkosprężystość [3,4]. W dziedzinie czasu należą do nich równania całkowe i różniczkowe. Uogólniony stan naprężeń w materiale lepkosprężystym opisany tensorami σ_{ij} i odkształcenia ε_{ij} można zapisać przy użyciu składników reprezentujących ścinanie i wszechstronne ściskanie.

$$s_{ij} = \int_{-\infty}^t G_1(t - \tau) \cdot \frac{de_{ij}(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (1)$$

$$\sigma_{kk} = \int_{-\infty}^t G_2(t - \tau) \cdot \frac{d\varepsilon_{kk}(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (2)$$

gdzie: $G_1(t)$ i $G_2(t)$ to niezależne funkcje relaksacji przypisywane odpowiednio stanowi ścinania i stanowi wszechstronnego ściskania (lub rozciągania).

Składowe dewiatora stanu naprężenia i odkształcenia przedstawiają wzory:

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \cdot \delta_{ij} \sigma_{kk} \quad (3)$$

$$e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \cdot \delta_{ij} \varepsilon_{kk} \quad (4)$$

gdzie: σ_{ij} – tensor naprężenia, ε_{ij} – tensor odkształcenia, δ_{ij} – delta Kroneckera, σ_{kk} – pierwszy niezmiennik tensora naprężenia, ε_{kk} – pierwszy niezmiennik tensora odkształcenia.

Poddając transformacji Laplace’a równania (1) i (2) oraz wykorzystując twierdzenie o splocie funkcji otrzymujemy:

$$s_{ij}(s) = s \cdot G_1(s) \cdot e_{ij}(s) \quad (5)$$

$$\sigma_{kk}(s) = s \cdot G_2(s) \cdot \varepsilon_{kk}(s) \quad (6)$$

Natomiast na bazie równań (3) i (4) otrzymujemy:

$$s_{ij}(s) = \sigma_{ij}(s) - \frac{1}{3} \cdot \delta_{ij} \cdot \sigma_{kk}(s) \quad (7)$$

$$e_{ij}(s) = \varepsilon_{ij}(s) - \frac{1}{3} \cdot \delta_{ij} \cdot \varepsilon_{kk}(s) \quad (8)$$

Dla przypadku jednoosiowego stanu naprężenia w kierunku: σ_{11} występują następujące warunki brzegowe:

$$\sigma_{22} = \sigma_{33} = 0 \quad (9)$$

Upraszczając wzór (6) do przypadku jednoosiowego ściskania otrzymujemy:

$$\sigma_{11}(s) = s \cdot G_2(s) \cdot [\varepsilon_{11}(s) + \varepsilon_{22}(s) + \varepsilon_{33}(s)] \quad (10)$$

Z równań (3), (7) i (8) po uwzględnieniu warunków brzegowych (9) otrzymujemy:

$$\frac{2}{3} \sigma_{11}(s) = s \cdot G_1(s) \cdot \left[\frac{2}{3} \varepsilon_{11}(s) - \frac{1}{3} \cdot [\varepsilon_{22}(s) + \varepsilon_{33}(s)] \right] \quad (11)$$

Eliminując wyrażenie $\varepsilon_{22}(s) + \varepsilon_{33}(s)$ ze wzorów (10) i (11) uzyskuje się ostateczną zależność na naprężenie w warunkach jednoosiowego stanu naprężeń:

$$\sigma_{11}(s) = s \Phi(s) \varepsilon_{11}(s) \quad (12)$$

gdzie $\Phi(s)$ to transformata Laplace'a funkcji relaksacji naprężeń w warunkach jednoosiowego stanu naprężeń spełniająca zależność:

$$\Phi(s) = \frac{3 \cdot G_1(s) \cdot G_2(s)}{G_1(s) + G_2(s)} \quad (13)$$

Rozważając przypadek jednoosiowego stanu odkształceń tzn. przyjmując warunki brzegowe w postaci:

$$\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = 0 \quad (14)$$

równanie (6) przyjmuje postać:

$$\sigma_{11}(s) + \sigma_{22}(s) + \sigma_{33}(s) = s \cdot G_2(s) \cdot \varepsilon_{11}(s) \quad (15)$$

Z równań (3), (7) i (8) po uwzględnieniu warunków brzegowych (14) otrzymujemy:

$$\sigma_{11}(s) - \frac{1}{3} \cdot [\sigma_{11}(s) + \sigma_{22}(s) + \sigma_{33}(s)] = s \cdot G_1(s) \cdot \frac{2}{3} \cdot \varepsilon_{11}(s) \quad (16)$$

Redukując wyrażenie $\sigma_{22}(s) + \sigma_{33}(s)$ ze wzorów (15) i (16) uzyskuje się ostateczną zależność na naprężenie w warunkach jednoosiowego stanu odkształceń:

$$\sigma_{11}(s) = s \cdot X(s) \cdot \varepsilon_{11}(s) \quad (17)$$

gdzie $X(s)$ to transformata Laplace'a jednoosiowej funkcji relaksacji naprężeń w warunkach jednoosiowego stanu odkształceń spełniająca zależność:

$$X(s) = \frac{2 \cdot G_1(s) + G_2(s)}{3} \quad (18)$$

Zależność pomiędzy naprężeniem i odkształceniem dla ciała sprężystego można wyrazić za pomocą dwóch równań [4]:

$$s_{ij} = 2 \cdot G \cdot e_{ij} \quad (19)$$

$$\sigma_{kk} = 3 \cdot K \cdot \varepsilon_{kk} \quad (20)$$

gdzie: K – moduł odkształcenia objętościowego, G – moduł odkształcenia postacowego (ścianania).

W oparciu o teorię analogii pomiędzy lepkosprężystością i sprężystością [3], oraz wzory (5), (6), (19) i (20), odpowiedniki stałych G i K dla przypadku lepkosprężystego można przedstawić jako:

$$G(t) = \frac{G_1(t)}{2} \quad (21)$$

$$K(t) = \frac{G_2(t)}{3} \quad (22)$$

gdzie: funkcje czasu $G(t)$ i $K(t)$ to odpowiednio moduł ścinania i moduł odkształcenia objętościowego dla ciała lepkosprężystego.

Warunkiem obliczenia zmiennych w czasie modułów $K(t)$ i $G(t)$ jest znajomość funkcji relaksacji $G_1(t)$ i $G_2(t)$. W oparciu o wzory (13) i (18) możliwe jest wyznaczenie transformat Laplace'a tych funkcji z układu równań:

$$G_2(s) = 3 \cdot X(s) - 2 \cdot G_1(s) \quad (23)$$

$$G_1(s) = \frac{\left[\frac{\Phi(s)}{2} + \frac{3 \cdot X(s)}{2} \right] - \left[\left[\frac{\Phi(s)}{2} + \frac{3 \cdot X(s)}{2} \right]^2 - 4 \cdot X(s) \cdot \Phi(s) \right]^{\frac{1}{2}}}{2} \quad (24)$$

Wzór (24) jest jednym z dwóch pierwiastków równania kwadratowego powstałego po podstawieniu wzoru (18) do (13). Występujące we wzorach (23) i (24) funkcje $\Phi(s)$ i $X(s)$ to transformaty Laplace'a funkcji relaksacji naprężeń, które można uzyskać eksperymentalnie rejestrując siłę reakcji próbki w warunkach jednoosiowego stanu naprężeń i jednoosiowego stanu odkształceń.

Najprostsze rozwiązanie techniczne takiego eksperymentu to przeprowadzenie dwóch niezależnych testów relaksacji naprężeń próbek walcowych wyciętych z tego samego materiału. Jedna z nich ściskana swobodnie wzdłuż osi pomiędzy dwoma równoległymi płytkami daje możliwość wyznaczenia funkcji $\Phi(t)$. Druga ściskana w cylindrze zapobiegającym odkształceniom bocznym umożliwia uzyskanie funkcji $X(t)$.

Do poszukiwania oryginałów transformaty $G_1(s)$ - wzór (24) wykorzystano procedury opisane w pracy [7].

W oparciu o zasadę analogii pomiędzy sprężystością i lepkosprężystością oraz uogólnione prawo Hooke'a możliwe jest wyznaczenie współczynnika Poissona dla materiału lepkosprężystego ze wzoru:

$$v(s) = \frac{1}{4 \cdot s} \cdot \left[\frac{\Phi(s)}{X(s)} - 1 + \left[\left(\frac{\Phi(s)}{X(s)} - 1 \right)^2 - 8 \cdot \left(\frac{\Phi(s)}{X(s)} - 1 \right) \right]^{\frac{1}{2}} \right] \quad (25)$$

Do wyznaczenia oryginału powyższej transformaty zastosowano procedurę opisaną w pracy [7].

METODYKA BADAŃ EKSPERYMENTALNYCH

Badania eksperymentalne wykonano na próbkach korzeni buraków cukrowych dwóch odmian: Oktawia i Janus. Korzenie zebrane w październiku poddano próbom siedem dni po zbiorze. Z korzeni wycinano walcowe próbki w kierunku prostopadłym do osi w miejscu o największej średnicy. Próbki miały wysokość i średnicę równą 20 mm i były ściskane pomiędzy dwoma równoległymi płytkami z prędkościami $1,66 \cdot 10^{-4} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $8,33 \cdot 10^{-4} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ oraz $3,33 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Po uzyskaniu odkształcenia równego 4% (0,8 mm) przerywano ściskanie rejestrując malejącą siłę reakcji w czasie 120 sekund.

Próbki pochodzące z tego samego korzenia obciążano w dwóch różnych warunkach. Pierwszą ściskano swobodnie wzdłuż osi, co odpowiadało warunkom jednoosiowego stanu naprężeń. Drugą umieszczano w cylindrze ograniczającym odkształcenia boczne, co podczas jej ściskania wywoływało stan jednoosiowego odkształcenia. W ten sposób uzyskano dwa malejące przebiegi siły, które po uwzględnieniu kształtu i wymiarów próbek oraz prędkości deformacji wstępnej, pozwoliły na wyznaczenie dwu funkcji relaksacji $\Phi(t)$ i $X(t)$ analogicznych do występujących we wzorach (12) i (17). W czasie obliczeń przyjęto, że przebieg relaksacji naprężeń w obu próbkach da się opisać dwuelementowym (czteroparametrowym) modelem Maxwella o parametrach: E_1 , E_2 – współczynniki sprężystości i η_1 , η_2 – współczynniki lepkości dynamicznej [2].

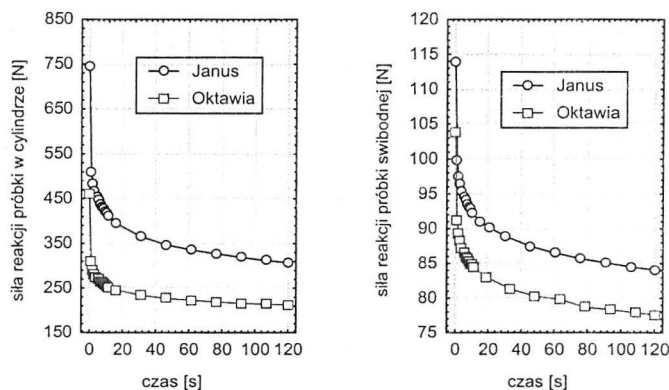
W dalszej kolejności poszukując oryginałów transformat Laplace'a obliczono zmienne w czasie moduły odkształcenia objętościowego $K(t)$ i postaciowego $G(t)$ oraz współczynnik Poissona $\nu(t)$ [7].

WYNIKI BADAŃ

Przykładowe przebiegi siły reakcji próbek będące bezpośrednimi wynikami przeprowadzonych eksperymentów przedstawiono na Rys. 1.

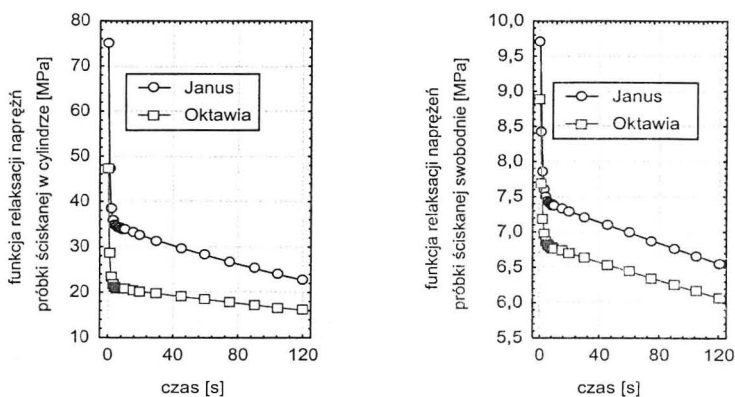
Maksymalna wartość siły reakcji próbek w cylindrach odkształconych o 4% przewyższała wielokrotnie analogiczne wartości siły dla próbek ściskanych swobodnie. Zjawisko to było zgodne z oczekiwaniami w związku z założoną

metodyką badań, a poza tym próbki świeżych korzeni charakteryzowały się wysokim turgorem. Po uwzględnieniu wymiarów próbki oraz kierunku i prędkości obciążania uzyskano funkcję relaksacji naprężeń ściskających dla obu rodzajów próbek i obu odmian. Przykładowe przebiegi funkcji dla próbek ściskanych swobodnie i w cylindrach prezentuje Rys. 2.



Rys. 1. Siły reakcji próbek ściskanych swobodnie i w cylindrach buraków odmian Janus i Oktawia uzyskane przy wstępnej prędkości deformacji $0,00083 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

Fig. 1. Reaction force for unconstrained and constrained samples of sugar beet roots Janus and Oktawia variety obtained at the rate of deformation equals 0.00083 m s^{-1} .



Rys. 2. Funkcje relaksacji naprężeń próbek ściskanych swobodnie i w cylindrach buraków odmian Janus i Oktawia uzyskane przy wstępnej prędkości deformacji $0,00083 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

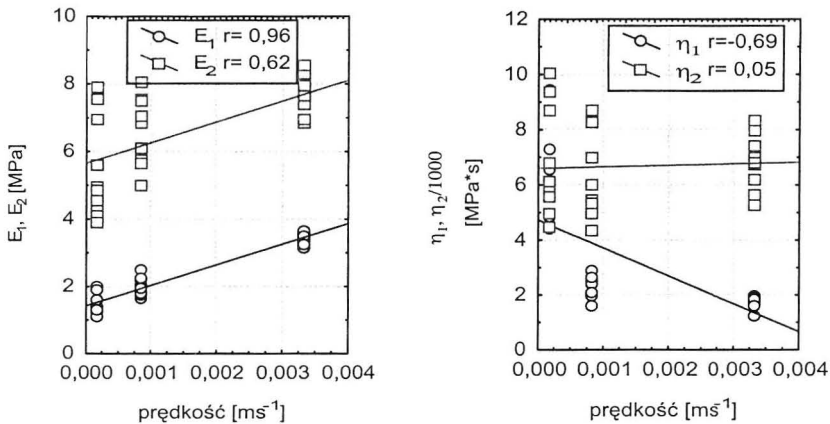
Fig. 2. Stress relaxation functions for unconstrained and constrained samples of sugar beet roots Janus and Oktawia variety obtained at the rate of deformation equals 0.00083 m s^{-1} .

Pomimo pozornego podobieństwa wykresów dla próbek ściskanych w cylindrach stwierdzono znacznie krótsze czasy relaksacji zastosowanego modelu Maxwella. Fakt ten może świadczyć o innej naturze procesów rozpraszania energii dla obu rodzajów testów.

Stwierdzono także, zarówno w przypadku próbek swobodnych jak i ograniczonych, wyższe wartości siły reakcji dla próbek korzeni odmiany Janus. Wpływ prędkości deformacji wstępnej na wartość parametrów przyjętego modelu w warunkach jednoosiowego stanu naprężeń dla obu odmian korzeni przedstawiono na Rys. 3 i 4.

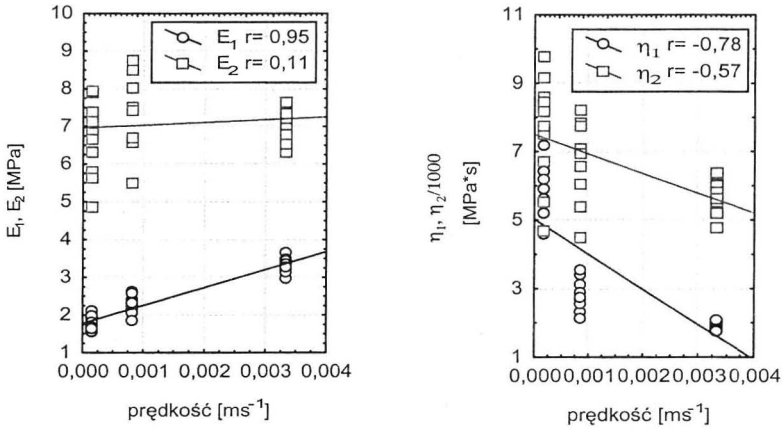
Chociaż zakres zastosowanych prędkości deformacji nie był szeroki, we wszystkich przypadkach stwierdzono tendencję wzrostową współczynników sprężystości E_i ze wzrostem prędkości deformacji. Potwierdza to zachowanie się próbek korzeni buraka zbieżne z typową reakcją ciała lepkosprężystego.

Na Rys. 5 i 6 przedstawiono analogiczne zależności dla próbek ograniczonych (stan jednoosiowego odkształcenia). W tym przypadku wzrost wartości współczynników sprężystości nie jest jednoznaczny. W związku z wystąpieniem dużych wartości naprężeń można przypuszczać, że w próbkach miało miejsce zniszczenie niektórych komórek lub struktur komórkowych i w konsekwencji inne warunki dla przepływu płynów.



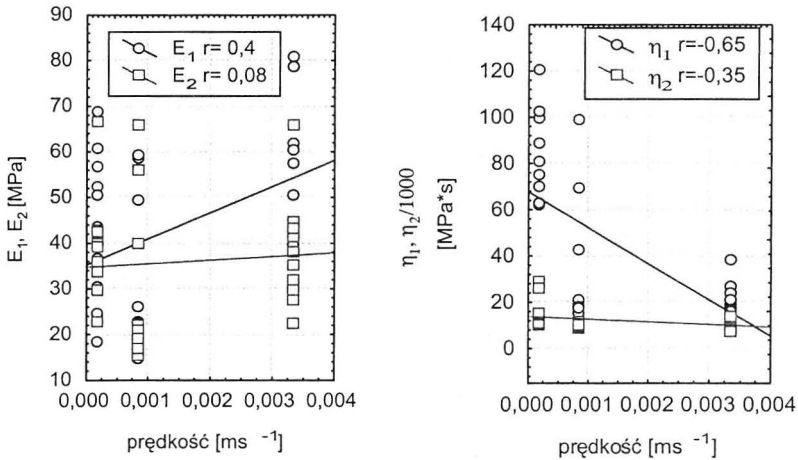
Rys. 3. Zależność współczynników E_i oraz η_i od prędkości deformacji dla próbek buraków odmiany Oktawia ściskanych swobodnie.

Fig. 3. Influence of the rate of initial deformation on coefficients E_i and η_i for unconstrained sugar beet samples Oktawia variety.



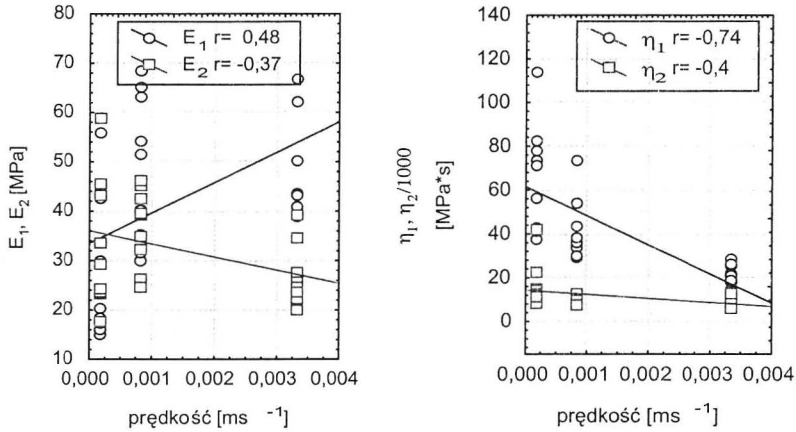
Rys. 4. Zależność współczynników E_i oraz η_i od prędkości deformacji dla próbek buraków odmiany Janus ściskanych swobodnie.

Fig. 4. Influence of the rate of initial deformation on coefficients E_i and η_i for unconstrained sugar beet samples Janus variety.



Rys. 5. Zależność współczynników E_i oraz η_i od prędkości deformacji dla próbek buraków odmiany Oktawia ściskanych w cylindrach.

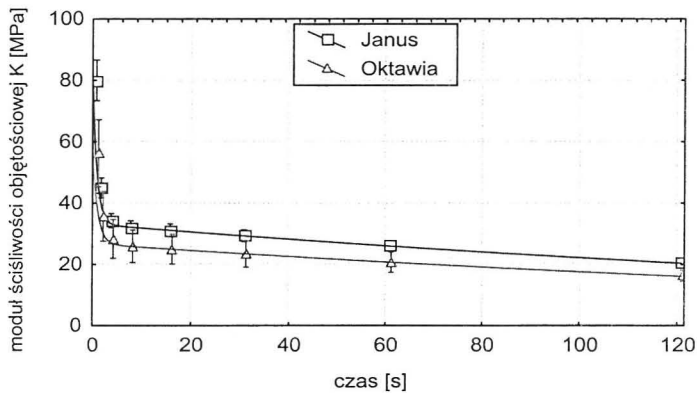
Fig. 5. Influence of the rate of initial deformation on coefficients E_i and η_i for constrained sugar beet samples Oktawia variety.



Rys. 6. Zależność współczynników E_i oraz η_i od prędkości deformacji dla próbek buraków odmiany Janus ściskanych w cylindrach.

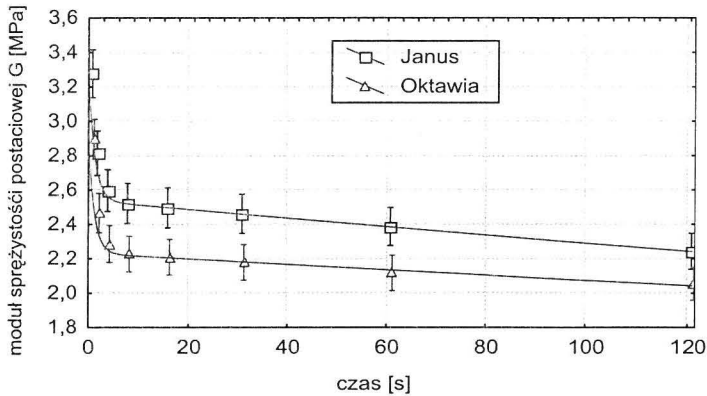
Fig. 6. Influence of the rate of initial deformation on coefficients E_i and η_i for constrained sugar beet samples Janus variety.

Efektem końcowym wykonanych doświadczeń i przeprowadzonych analiz teoretycznych było wyznaczenie zmiennych w czasie wartości modułów ściśliwości objętościowej $K(t)$, odkształcenia postaciowego $G(t)$ oraz współczynnika Poissona – Rys. 7, 8 i 9.



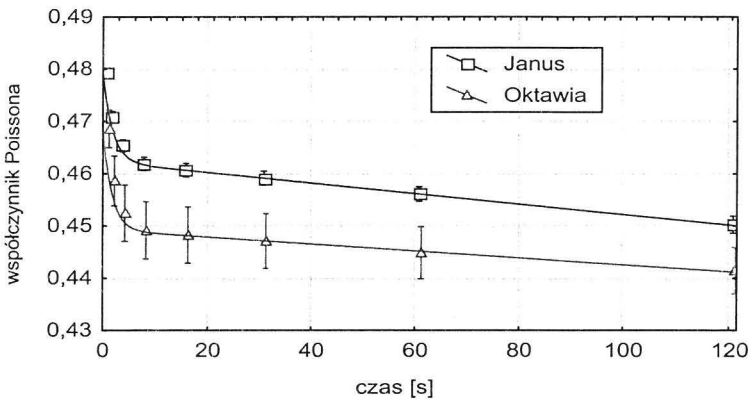
Rys. 7. Zmienność modułu ściśliwości objętościowej $K(t)$ próbek buraków odmian Janus i Oktawia. Prędkość deformacji wstępnej $0,00083 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

Fig. 7. Bulk modulus function $K(t)$ for sugar beet samples Janus and Oktawia variety obtained at the rate of deformation equals $0.00083 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.



Rys. 8. Zmienność modułu odkształcenia postaciowego próbek $G(t)$ buraków odmian Janus i Oktawia. Prędkość deformacji wstępnej $0,00083 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

Fig. 8. Shear modulus function $G(t)$ for sugar beet samples Janus and Oktawia variety obtained at the rate of deformation equals 0.00083 m s^{-1} .



Rys. 9. Zmienność współczynnika Poissona próbek buraków odmian Janus i Oktawia. Prędkość deformacji wstępnej $0,00083 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

Fig. 9. Poisson's ratio function for sugar beet samples Janus and Oktawia variety obtained at the rate of deformation equals 0.00083 m s^{-1} .

Stwierdzono bardzo wysokie wartości współczynnika Poissona obu odmian, które zawierały się w przedziale od 0,48 do 0,44. Tłumaczy to wysokie wartości siły reakcji, uzyskane dla próbek ściskanych w warunkach stanu jednoosiowego odkształcenia.

Wyznaczone przebiegi modułów $K(t)$, $G(t)$ mogą posłużyć do analizy reakcji korzeni buraka cukrowego na dowolne obciążenia przy użyciu metody elementów skończonych.

WNIOSKI

1. Przyjęty do opisu zachowania się próbek korzeni buraków cukrowych cztero-parametrowy model okazał się adekwatny i efektywny w zakresie użytych prędkości deformacji.
2. Przedstawione formuły modelu materiału lepkosprężystego mają charakter uniwersalny i pozwalają na opis zachowania się badanego materiału w dowolnym stanie naprężenia.
3. Wykorzystana w pracy procedura eksperymentalna jest zbieżna z wyprowadzeniem teoretycznym i łatwa do wykonania pod warunkiem przyjęcia właściwych parametrów testu oraz dysponowania parami próbek z tego samego materiału.
4. Stwierdzono tendencję wzrostową modułów sprężystości próbek obu odmian korzeni buraka cukrowego ściskanych swobodnie wraz ze wzrostem prędkości deformacji wstępnej.
5. Stwierdzono bardzo wysokie wartości współczynnika Poissona obu odmian korzeni, które w czasie trwania eksperymentu malały w granicach od 0,48 do 0,44.

PIŚMIENNICTWO

1. **Armstrong M., B. Hongnton:** Sugar beet storage trials: The results. *British Sugar*. 64, 3, 4–8, 1996.
2. **Chen, P. and R.B. Fridley:** Analytical method for determining viscoelastic constants of agricultural materials. *Transactions of the ASAE*, 15(6), 1103-1106, 1972.
3. **Christensen R.M.:** Theory of viscoelasticity, Introduction. Academic Press, New York, 1971.
4. **Flügge W.:** Viscoelasticity. Blaisdell Publishing Company. Waltham, Massachusetts. Toronto-London, 1967.
5. **Gołacki K., A.:** Some viscoelastic properties of sugar beet and carrot roots. *Proceedings of 3rd IFAC/CIGR Workshop on Control Applications in Post-Harvest and Processing Technology*, Tokyo, 223-228, 2001.
6. **Ruzbarsky J., Jecg I., Sarec O.:** Evaluation of the operation quality of six-row self-propelled sugar beet harvesters. *Zemledelska Technika*, 44, 1, 9-16, 1998.
7. **Stankiewicz A., Gołacki K.:** Metody wyznaczania oryginałów transformat Laplace'a wybranych postaci funkcji. *Prace nie publikowane*. 2002.
8. **Wiltshire I. I. I., Cobb A. H.:** Bruising of sugar beet roots and consequential sugar loss: current understanding and research needs. *Ann. Appl. Biol.*, 136, 159-166, 2000.

VISCOELASTIC CHARACTERISTICS OF SUGAR BEET ROOTS

K. Golacki

Department of Technical Sciences, University of Agriculture

ul. Doświadczalna 50 A, 20-280 Lublin

e-mail: golacki@faunus.ar.lublin.pl

Summary. On the base of stress relaxation test for sugar beet root samples the relationships between the state of strain and the stress in time was determined. The experiment consists of two independent stress relaxation tests, which were carried out for samples loaded in the state of uniaxial strain and the state of uniaxial stress. The results of the investigation are presented in the form of time functions of the shear modulus, the bulk modulus and Poissins ratio. It was shown that increase of initial rate of deformation causes the increase of modulus of elasticity of the samples.

Key words: sugar beet root, stress relaxation, viscoelasticity.