

Wiesław KOSIŃSKI

Katedra Geodezji i Fotogrametrii

Dokładność niwelacji trygonometrycznej wykonywanej przy użyciu dalmierza świetlnego

Wstęp

Wprowadzenie do praktyki geodezyjnej dalmierzy świetlnych pozwala zastosować niwelację trygonometryczną do wyznaczania wysokości punktów osnow pomiarowych. Uzupełniając pomiary poligonowe o dokładne pomiary kątów pionowych, możemy otrzymać niewielkim nakładem pracy wysokości punktów osnowy.

Podstawą do opracowania wielkoskalowej mapy sytuacyjno-wysokościowej jest założenie w terenie osnowy pomiarowej. Do niedawna jedyną możliwością wyznaczania wysokości punktów osnowy było stosowanie niwelacji geometrycznej. Wprowadzenie do praktyki geodezyjnej dalmierzy świetlnych dało możliwość zastosowania do wyznaczenia wysokości punktów osnowy niwelacji trygonometrycznej. Niwelacja trygonometryczna stosowana była do wyznaczania wysokości punktów niedostępnych, np. w górach lub przy pomiarze wysokich budowli. Przeszkodą bardziej powszechnego stosowania niwelacji trygonometrycznej była niemożliwość dokładnego pośredniego wyznaczania

odległości, co powodowało otrzymywanie mało dokładnych wyników. Możliwość wykonywania pomiarów odległości w łatwy sposób, z dokładnością do 1 cm znacznie rozszerzyło zakres stosowania niwelacji trygonometrycznej.

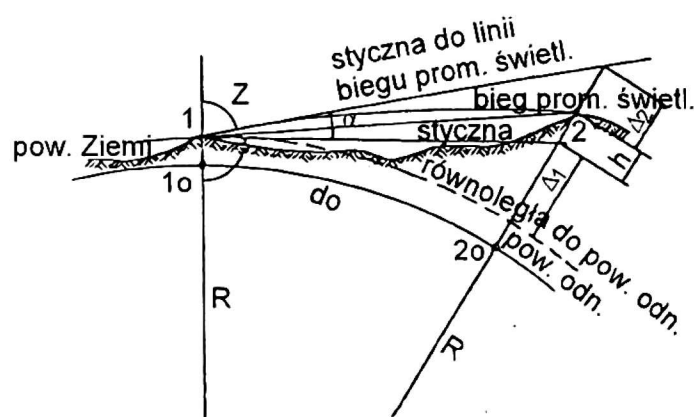
Wprawdzie należy się spodziewać, że dokładność niwelacji trygonometrycznej będzie zawsze niższa od dokładności niwelacji geometrycznej, to jednak istnieją przesłanki, że metodę tę będzie można stosować nie tylko do wyznaczania punktów szczegółowych, np. w tachimetrii, ale również do wyznaczania wysokości punktów osnowy. Wykorzystanie niwelacji trygonometrycznej do powyższego celu jest uzasadnione ekonomicznie. Przy pomiarach poligonowych wykonuje się pomiary kątów poziomych, długości boków oraz kątów pionowych, dla redukcji długości do poziomu. Dla niwelacji trygonometrycznej należy uzupełnić pomiar sytuacyjny dokładnym pomiarem kątów pionowych oraz pomiarem wysokości instrumentów i sygnałów. Zarówno pomiary kątów poziomych, jak i pionowych można wykonać tym samym instrumentem.

W trakcie wykonywania pomiarów szczegółowych często trzeba zakładać dodatkowe punkty osnowy. Jest to istotne przy wykonywaniu pomiarów tachimetrycznych. Zakładając osnowę w postaci ciągów poligonowych, można obejmować większe, niż robiono to dotychczas, obszary, na których następnie można zakładać wiele pojedynczych dodatkowych punktów osnowy określanych metodami biegunową i trygonometryczną. Wykorzystanie niwelacji trygonometrycznej do wyznaczania wysokości tych punktów pozwala na usprawnienie tych prac.

Przy niwelacji trygonometrycznej należy uwzględnić poprawki ze względu na kulistość Ziemi i refrakcję, jeżeli ich wartość jest większa niż dokładność pomiaru.

Elementy wchodzące do wyznaczenia różnicy wysokości pokazano na przekroju kuli ziemskiej (rys. 1). Wzory na wyznaczenie różnicy wysokości na kuli ziemskiej są następujące (Laudyn 1979):

$$h = d_o \left(1 + \frac{H \bar{s}r}{R} \right) \text{ctg}z + \frac{d_o^2 (1 - k)}{2R \cos^2 \alpha} + i_1 - w_2 \quad (1)$$



RYSYNEK. Niwelacja trygonometryczna na kuli

$$h = d_o \left(1 + \frac{H \bar{s}r}{R} \right) \text{tg} \alpha + \frac{d_o^2 (1 - k)}{2R \cos^2 \alpha} + i_1 - w_2 \quad (2)$$

gdzie:

z – kąt zenitalny,

α – kąt pionowy,

d – pozioma odległość między punktami na wysokości powierzchni odniesienia,

$H \bar{s}r$ – średnia przybliżona wysokość punktów 1 i 2 (odczytujemy z mapy),

R – średni promień Ziemi,

k – współczynnik refrakcji,

i – wysokość instrumentu na punkcie 1,

w – wysokość sygnału na punkcie 2.

Ponieważ wartość współczynnika refrakcji jako zależna od szeregu parametrów atmosferycznych jest zmienna w pewnym zakresie, należy tak przeprowadzić pomiary, aby współczynnik ten wyeliminować z obliczeń. Jest to możliwe wówczas, jeżeli na obydwu punktach 1 i 2 zostaną jednocześnie zmierzone kąty zenitalne z_1 i z_2 lub kąty pionowe α_1 i α_2 . Wówczas wzory na różnicę wysokości punktów 1 i 2 przy przyjęciu kuli jako powierzchni odniesienia będą miały postać (Laudyn 1979):

$$h = d_o \left(1 + \frac{H \bar{s}r}{R} \right) \text{tg} \frac{z_1 - z_2}{2} + \frac{1}{2} (i_1 - i_2 + w_1 - w_2) \quad (3)$$

$$h = d_o \left(1 + \frac{H \bar{s}r}{R} \right) \text{tg} \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} + \frac{1}{2} (i_1 - i_2 + w_1 - w_2) \quad (4)$$

W powyższych wzorach brak jest poprawek na kulistość ziemi i refrakcję. Korzystanie z tych wzorów możliwe jest tylko wówczas, gdy pomiar na obydwu punktach przeprowadzimy jednocześnie lub prawie jednocześnie. Stosując do pomiaru długości dalmierz elektroniczny, mierzymy skośną do poziomu odległość między punktem przecięcia osi obrotu instrumentu z osią celową a środkiem sygnału. W tym przypadku wzory na wyznaczanie przewyższenia między punktami 1 i 2 są następujące (Laudyn 1979):

$$h = d_{1-2} \frac{\cos z_1 - \cos z_2}{2} + \frac{1}{2} (i_1 - i_2 + w_1 - w_2) \quad (5)$$

$$h = d_{1-2} \frac{\sin \alpha_1 - \sin \alpha_2}{2} + \frac{1}{2} (i_1 - i_2 + w_1 - w_2) \quad (6)$$

Rozważania teoretyczne

Aby uzasadnić możliwość stosowania niwelacji trygonometrycznej, należy określić teoretyczną dokładność wyznaczania przewyższenia – h . Dla wyznaczenia błędu średniego przewyższenia należy zastosować wzór Gaussa na określenie błędu funkcji (Hausbrandt 1971). Po wyznaczeniu pochodnych cząstkowych, wstawieniu ich do wzoru i uporządkowaniu wyrazów otrzymujemy:

$$m_h = \pm \sqrt{\frac{1}{2} d_{\alpha}^2 m_{\alpha}^2 + \sin^2 \alpha m_d^2 + m_1^2} \quad (7)$$

Przy wprowadzeniu powyższego wzoru zastosowano następujące uproszczenia:

$$\cos \alpha_1 = \cos \alpha_2 = \cos \alpha$$

$$\sin \alpha_1 = -\sin \alpha_2 = \sin \alpha$$

$$m_{i_1} = m_{i_2} = m_{w_1} = m_{w_2} = m_i$$

d – odległość pozioma między punktami 1 i 2.

Dla realizacji powyższego wzoru, w celu otrzymania wartości m , przyjęto parametry dokładnościowe pomiaru możliwe do uzyskania teodolitem zaopatrzonym w dalmierz elektroniczny: błąd średni pomiaru odległości – 10 mm; błąd średni pomiaru kąta pionowego – $20''$; błąd średni pomiaru wysokości instrumentu i sygnału – 10 mm. Na tej podstawie obliczono teoretyczne błędy średnie przewyższeń przy przyjęciu kilku wariantów odległości i kątów pionowych. Wyniki obliczeń zestawiono w tabeli 1. Dla niewielkich kątów pionowych – do 10° , wielkość kąta nie wpływa na dokładność wyznaczenia przewyższeń.

Otrzymane wyniki są wprawdzie gorsze od możliwych do uzyskania za pomocą niwelacji geometrycznej, lecz dla zadań przedstawionych na wstępie są zupełnie wystarczające. Aby to potwierdzić, wyznaczmy błędy średnie wysokości punktów położonych w ciągu niwelacyjnym trygonometrycznym, dwustronnie nawiązanym długości 5 km. Odległość między punktami wynosi 500 m, a ich liczba 9. Błąd średni wyznaczenia przewyższeń według powyższych obliczeń wynosi około 1,5 cm. Średni błąd wysokości kolejnych punktów ciągu obliczamy na podstawie wzoru (1):

TABELA 1

α	d [m]	100	200	300	400	500	600	1000
	m _h [cm]							
1 ^g		1,02	1,09	1,20	1,34	1,49	1,67	2,44
3 ^g		1,03	1,10	1,20	1,34	1,50	1,67	2,44
5 ^g		1,03	1,10	1,20	1,34	1,50	1,67	2,44
10 ^g		1,04	1,11	1,21	1,34	1,50	1,67	2,44

TABELA 2

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
m _H [cm]	1,43	1,89	2,18	2,33	2,37	2,33	2,18	1,89	1,43

$$m_{H_i} = \pm m_h \sqrt{\frac{i(n+1-i)}{n+1}} \quad (8)$$

gdzie:

i – numer kolejnego punktu w ciągu,
 n – liczba wszystkich punktów w ciągu (bez punktów nawiazania).

Wyliczone wielkości m przedstawiono w tabeli 2.

Błąd średni wysokości wszystkich punktów liczymy na podstawie wzoru (Kosiński 1994):

$$m_H = \pm m_h \sqrt{\frac{n+2}{6}} \quad (9)$$

W tym przypadku $m = 2,03$ cm.

Otrzymane teoretycznie błędy średnie wysokości punktów wskazują na przydatność dla celów praktycznych tej metody określania wysokości punktów.

Prace doświadczalne

Aby uzyskać praktyczne potwierdzenie uzyskanych teoretycznie parametrów,

przeprowadzono pomiary doświadczalne pod Chęcunami na obszarze około 10 km². Założono osnowę sytuacyjno-wysokościową z przeznaczeniem jej do wykorzystania przy opracowaniach aerofotogrametrycznych oraz pomiarach sytuacyjno-wysokościowych. Osnowa ta jest w postaci sieci ciągów poligonowych nawiazanych do istniejących punktów państwowych. Ponadto wykonano pomiary niwelacji geometrycznej, na tyle dokładne, aby były materiałem bazowym, na podstawie którego można by ocenić wyniki uzyskane z niwelacji trygonometrycznej. Kąty poziome, kąty pionowe i odległości pomierzono teodolitem-dalniczką elektroniczną EOT-2000 Zeissa. Niwelację geometryczną wykonano niwelatorem samopoziomującym Ni 020A Zeissa. Kąty pionowe pomierzono obustronnie w niewielkim odstępie czasu, eliminując w ten sposób w bardzo dużym stopniu wpływ refrakcji pionowej i wpływ krzywizny Ziemi. Całkowitą eliminację wpływu refrakcji można osiągnąć

nać tylko w przypadku jednoczesnego pomiaru kątów pionowych na obydwu końcach boku, co w tym przypadku było niemożliwe, ponieważ do dyspozycji był tylko jeden instrument. W tym wypadku pomiar jednoczesny nie był konieczny, ponieważ odległości były stosunkowo niewielkie – od 120 do 628 m. Przy największej odległości – 628 m, całkowita poprawka za refrakcję, przyjmując $k = 0,13$, wynosi 4,05 mm. Redukcja wpływu refrakcji przy obserwacjach prawie jednoczesnych wynosi około 90%, a więc pozostałość w granicach 0,4 mm można w tym wypadku pominąć. Zarówno ciągi niwelacji trygonometrycznej, jak i geometrycznej wyrównano w stosunku do punktów nawiązania.

W tabeli 3 przedstawiono odchyłki uzyskane w 14 ciągach niwelacji geometrycznej, wagi tych ciągów i błędy średnie, które obliczono posługując się wzorem (10).

TABELA 3

Nr ciągu	Liczba stanowisk	Waga	Odchyłka [mm]	Błąd średni [mm]
1	17	0,6	-12	11,2
2	21	0,5	+14	12,3
3	6	1,7	+8	6,7
4	7	1,4	-4	7,3
5	10	1,0	0	8,7
6	59	0,2	+31	19,4
7	27	0,4	+24	13,7
8	57	0,2	-30	19,4
9	62	0,2	+1	19,4
10	59	0,2	+6	19,4
11	39	0,3	+5	15,9
12	4	2,5	+4	5,5
13	16	0,6	-8	11,2
14	9	1,1	+6	8,3

$$m_{h_i} = \pm \sqrt{\frac{[p_{vv}]}{p_i(n-1)}} \quad (10)$$

Wyniki te można uznać za dobre, jednak nie uzasadniają one przyjęcia tych danych jako bezbłędne przy porównaniu ich z wynikami niwelacji trygonometrycznej.

Błędy średnie przewyższeń wyznaczono na podstawie porównania ich z wynikami niwelacji geometrycznej. Utworzono 5 przedziałów w zależności od długości boków. Otrzymane wyniki przedstawiono w tabeli 4. Następnie porównano rzędne tych samych punktów otrzymanych przy zastosowaniu niwelacji trygonometrycznej i geometrycznej. Na podstawie obliczonych różnic wysokości wszystkich punktów otrzymano $m_H = \pm 3,2$ cm.

TABELA 4

Długości boków [m]	Liczba boków	Błędy średnie przewyższeń [cm]
100 – 200	7	1,8
200 – 300	12	2,4
300 – 400	22	2,8
400 – 500	28	2,7
500 – 630	16	2,9

Uzyskane praktycznie dokładności są gorsze od wyznaczonych na podstawie dociekań teoretycznych od 0,8 cm do 1,3 cm. Należy jednak pamiętać, że do porównania służyły jako wzorcowe wyniki niwelacji technicznej, które nie mogą być przyjęte jako bezbłędne. Otrzymane dokładności uwzględniają więc zarówno błędy niwelacji trygonometrycznej, jak i geometrii technicznej. Z tego powodu uzyskane dokładności należy uznać za

poprawne. Są one całkowicie wystarczające dla opracowania treści wysokościowej map wielkoskalowych sporządzanych jako podkłady dla prac projektowych.

Zakres wykorzystania niwelacji trygonometrycznej można więc rozszerzyć do sytuacji przedstawionej we wstępie do niniejszego opracowania.

Literatura

- HAUSBRANDT S. 1971: *Rachunek wyrównawczy i obliczenia geodezyjne*. Warszawa.
LAUDYN I. 1979: *Niwelacja trygonometryczna*. Warszawa.
KOSIŃSKI W. 1994: *Dokładność wyznaczania wysokości punktów w pojedynczych ciągach*

niwelacyjnych. Przegl. Nauk. Wydz. Mel. i Inż. Środ. Z. 6.

Summary

The accuracy of trigonometrical levelling with use the light stadia.

There has been considered the possibility of a broader usage of trigonometric levelling using electronic distance – measuring instrument, e.g. for the calculation of the height of geodetic control points. There have been presented theoretical reasoning and the results of terrain survey.

Author's address

W. Kosiński

Warsaw Agricultural University – SGGW

02-787 Warszawa, ul. Nowoursynowska 166

Poland