

**CHRIS J. CIESZEWSKI, MICHAŁ ZASADA****Model bonitacyjny dla sosny na podstawie tablic zasobności Szymkiewicza**

Site index model for Scots pine based on Szymkiewicz yield tables

**ABSTRACT**

Tested are three approaches to development of site dependent height age model based on published Scots pine tabular data. The approaches included fitting four-parameter modified Gompertz function individually to all site productivity classes; fitting a one-parameter anamorphic dynamic site index equation to all the data; and fitting a three-parameter polymorphic dynamic site index equation with variable asymptotes to all data. The common fit to all data was based on a base-age invariant approach, in which the site-specific parameters different for each of the site productivity classes are estimated simultaneously with the global model parameters that are common to all site productivities. The best model proved to be based on the polymorphic dynamic equation with variable asymptotes by Cieszewski [2001, Three methods of deriving advanced dynamic site equations demonstrated on Inland Douglas-fir site curves. *Can. J. For. Res.* 31(1): 165-173], which fitted the data best and provided one common model for all the site classes. The produced model was concluded to be superior to the other models and to the original tables. The presented approach is recommended for modeling of other stand growth attributes.

**KEY WORDS**

yield tables, site productivity, site index model, growth model, dynamic equations, initial condition models

**Wstęp**

Pierwotnie wzrost i zasobność drzewostanów były ustalane za pomocą tablic zawierających średnie wartości pomiarowe dla różnych klas bonitacji i wieku [np. Szymkiewicz 1971]. Tablice były pierwszymi powszechnie stosowanymi modelami wzrostu drzewostanów. Początkowo były one tworzone przez odręczne wyrównywanie danych za pomocą wykresów dla poszczególnych klas jakości siedliska, oznaczanych najczęściej symbolami [Graves 1910], jak na przykład I, II, III [np. Szymkiewicz 1971]. W późniejszym okresie krzywe wzrostu i zasobności przedstawiane były w postaci prostych równań matematycznych, ustalanych za pomocą podstawowych analiz statystycznych dla indywidualnych klas bonitacji [np. Bruchwald 1977, Socha 1997, Jarosz i Kłapeć 2002]. Obecnie wiele proponowanych na świecie modeli jest opartych na mniej lub bardziej skomplikowanych równaniach funkcji warunków początkowych z parametrami statystycznie oszacowanymi dla jednoczesnego dopasowania przebiegu wszystkich krzywych bez izolacji poszczególnych klas bonitacji. Modele te mogą być oparte na równaniach statycznych ze stałym wiekiem bazowym [np. Bruchwald 1988], lub na równaniach dynamicznych (z warunkami początkowymi) ze zmiennym wiekiem bazowym [np. Schumacher 1939, Bailey and Clutter 1974, Borders i in. 1984, Cieszewski i Bella 1989, Cieszewski i Bailey 2000, Cieszewski i Zasada 2002]. Początkowo modele z warunkami początkowymi były oparte na

**CHRIS J. CIESZEWSKI**

Warnell School of Forest Resources,  
University of Georgia,  
Athens, GA, 30602, USA  
<http://www.growthandyield.com/chris/>

**MICHAŁ ZASADA**

Samodzielny Zakład Dendrometrii  
i Nauki o Produktyności Lasu SGGW  
ul. Rakowiecka 26/30  
02-528 Warszawa  
[zasada@delta.sggw.waw.pl](mailto:zasada@delta.sggw.waw.pl)

funkcjach anamorficznym (proporcjonalnym) ze zmiennymi asymptotami, czyli posiadających taki sam kształt, skalowany w dół i w górę zależnie od klasy bonitacji siedliska [np. Schumacher 1939, Bailey and Clutter 1974, Bruchwald 1988]. W późniejszym okresie stosować zaczęto krzywe polimorficzne (nieproporcjonalne) o kształtach uzależnionych od klasy bonitacji siedliska, które miały na ogół jedną asymptotę [Stage 1963, Bailey i Clutter 1974]. Jednak najbardziej zaawansowane modele siedliskowe to równania dynamiczne, charakteryzujące się jednocześnie polimorfizmem i zmiennymi asymptotami [Cieszewski i Bella 1989, 1993, Cieszewski i in. 1999, Cieszewski 2000, 2001, 2002, Cieszewski i Bailey 2000, Cieszewski i Nigh 2002, Elfving i Kiviste 1997].

Początek rozwoju matematycznych modeli wzrostu w naukach przyrodniczych w Polsce sięga co najmniej lat czterdziestych ubiegłego wieku [Czarnowski 1948]. Matematyczne modele bonitacyjne, jako bardziej zaawansowana klasa modeli wzrostu, rozwijają się w Polsce od mniej więcej dwóch dekad [Bruchwald 1985, Bruchwald i in. 2000, Cieszewski i Zasada 2002 i wiele innych]. Jednakże pomimo ciągłego rozwoju modeli matematycznych i wielu zastrzeżeń co do dokładności stosowanych w praktyce tablic zasobności zestawionych przez Szymkiewicza dla warunków polskich [Szymkiewicz 1971, Bruchwald i in. 1979], tabele te są nadal powszechnie stosowane w polskim leśnictwie (np. do ustalania klas bonitacji siedliska) i nic nie wskazuje na to, że będą one wkrótce zapomniane czy porzucone. Nie oznacza to jednak, że jesteśmy obecnie w okresie przejściowym od używania tablic do używania modeli matematycznych, albo że natura leśników jest nieracjonalna, ale raczej, że obydwie formy modeli – tablice i równania – są użyteczne do innych zastosowań i w pewnym sensie wzajemnie się uzupełniają. Niemniej jednak modele matematyczne oferują więcej w użytkowaniu niż tablice, gdyż na przykład umożliwiają one dokładną nieliniową interpolację niemożliwą do wykonania w tablicach.

W niniejszej pracy przedstawiony został matematyczny model wzrostu wysokości dla sosny w postaci polimorficznego równania dynamicznego ze zmiennymi asymptotami, którego parametry zostały oszacowane przez jednoczesne dopasowanie krzywych do I, II, III i IV klasy bonitacji z tablic Szymkiewicza [1971]. Wybrane cztery klasy bonitacji są podstawowymi klasami spotykanymi w Polsce [Szymkiewicz 1949, Bruchwald i Kliczkowska 1997, 2000] i były dobrze reprezentowane przez dane pomiarowe [Szymkiewicz 1949]. Pozostałe dwie ekstremalne klasy (Ia i V) nie były użyte do ustalania parameterów modelu ponieważ klasa Ia nie była oparta na danych pomiarowych lecz na ekstrapolacji [Szymkiewicz 1949], a klasa V była oparta na minimalnej liczbie danych i przedstawia drzewostany nieistotne z punktu widzenia gospodarczego. Przedstawione zostało również porównanie proponowanego modelu z innymi modelami testowanymi na tych samych tablicach.

## Metodyka

Jedną z krzywych bardzo często stosowanych do matematycznego modelowania wzrostu jest funkcja Gomperta [1825]. Specjalnie do modelowania wzrostu drzewostanów na podstawie tablic zasobności oryginalna funkcja została zmodyfikowana przez Jarosza i Kłopcza [2002] przez dodanie parametru przecięcia osi pionowej:

$$Y = a_i \cdot e^{-b_i \cdot e^{-c_i t}} + d_i \quad [1]$$

gdzie:

$Y$  – wartość zmiennej zależnej (np. wysokości) w wieku  $t$ ,

$t$  – wiek (zmienna niezależna),

$a_i, b_i, c_i, d_i$  – parametry funkcji,

$i$  – kolejne klasy bonitacji.

Funkcja [1] jest funkcją dwuwymiarową, zdolną do opisanie tylko jednej krzywej dla dowolnego zestawu czterech parametrów. Tak więc do opisanie na przykład sześciu klas bonitacji, równanie [1] wymaga aż 24 parametrów, a do tego nie daje ono możliwości automatycznej nieliniowej interpolacji wartości między różnymi klasami bonitacji.

Bardziej zaawansowaną grupą modeli są równania z warunkami początkowymi. Równania takie są oparte na funkcjach trójwymiarowych, które z jednym zestawem parametrów mogą definiować nieskończoną ilość krzywych dla dowolnych klas, nieliniowej interpolacji między klasami oraz ekstrapolacji poza zasięg oryginalnych danych. Jak wspomnieliśmy we wstępie, najprostsze z tych modeli to modele anamorficzne (proporcjonalne). Anamorficzny, sześcioparametrowy model bonitacyjny dla polskiej sosny został oryginalnie zbudowany przez Bruchwalda [1988] i zmodyfikowany jako model dwuparametrowy przez Bruchwalda i innych [2000]. Cieszewski i Zasada [2002] wyprowadzili z tego modelu nowe, uogólnione jednoparametrowe równanie dynamiczne opisujące identyczne krzywe, które zostało użyte w tych badaniach jako drugi kandydat do przedstawienia wzrostu wysokości z rozważanych tablic:

$$Y = Y_{0i} \cdot \left( \frac{t \cdot (a + t_0)}{t_0 \cdot (a + t)} \right)^2 \quad [2]$$

gdzie:

- $Y$  – wartość zmiennej zależnej (np. wysokości) w wieku  $t$ ,
- $a$  – parametr,
- $t_0, Y_{0i}$  – warunki początkowe (wiek i wartość zmiennej zależnej  $Y$  dla klasy bonitacji „ $i$ ” w wieku  $t_0$ ); gdy  $t_0$  równe jest wiekowi bazowemu,  $Y_{0i}$  odpowiada indeksowi bonitacyjnemu.

Krzywe anamorficzne generowane przez wzór [2] charakteryzują się podobnym kształtem dla wszystkich klas bonitacji siedliska. Są one w istocie produktem jednej krzywej skalowanej w górę i w dół przez indeks bonitacyjny  $Y_{0i}$ .

Jako najbardziej zaawansowany model w niniejszej pracy przedstawione zostało trzyparametrowe równanie dynamiczne wyprowadzone przez Cieszewskiego [2001], charakteryzujące się polimorfizmem i zmiennymi asymptotami. Poniżej przedstawiona została postać tego modelu z parametrem „ $b$ ” zastąpionym wyrażeniem „ $e^b$ ”, co pozwoliło na łatwiejsze dopasowanie funkcji do danych:

$$Y = Y_{0i} \cdot \frac{t^j \cdot (t_0^j \cdot R + e^b)}{t_0^j \cdot (t^j \cdot R + e^b)} \quad [3]$$

gdzie:

$$R = -f + Y_{0i} + \sqrt{(-f + Y_{0i})^2 + \frac{2 \cdot Y_{0i} \cdot e^b}{t_0^j}} \quad [4]$$

zaś  $j, f$ , oraz  $b$  to parametry, a pozostałe symbole zostały zdefiniowane powyżej.

Dla każdej z opisanych tutaj funkcji [1], [2] i [3] ustalone zostały jej parametry przez wyrównanie danych dotyczących wzrostu wysokości drzewostanów sosnowych zawartych w tablicach Szymkiewicza (tablice A – silniejsze zabiegi pielęgnacyjne). Parametry modelu [1] ustalone zostały dla wszystkich klas bonitacji osobno, gdyż model ten nie może być bezpośrednio ekstrapolowany poza zakres istniejących klas, do których został dopasowany. Modele [2] i [3] mogą być natomiast automatycznie stosowane do dowolnej klasy bonitacji bez względu na to, do jakich klas zostały one dopasowane, na tej samej zasadzie, na jakiej model [1] dopasowany do kilku klas wieku może być stosowany dla dowolnego wieku. W związku z tym modele [2] i [3]

zostały dopasowane do danych z klas I, II, III, i IV, które były w oryginalnych tablicach jedynymi zbudowanymi na podstawie reprezentatywnych danych pomiarowych [Szymkiewicz 1949]. Jednakże pomimo pominięcia dwóch skrajnych klas podczas dopasowania modeli, modele te mogą być stosowane do predykcji wartości dla nich na zasadzie automatycznej ekstrapolacji.

Parametry takich modeli, jak równania [2] i [3] są na ogół estymowane przy użyciu jednego z dwóch sposobów. W prostszym przypadku  $Y_{0i}$  ma przypisane wartości pochodzące z pomiaru w wybranym wieku bazowym, które są traktowane jako bezbłędne [np. Curtis i in. 1974, Monserud 1984]. Jest to sposób najczęściej stosowany, chociaż może on powodować zniekształcenie kształtu krzywych przez arbitralny wybór wieku bazowego. Parametry tego typu modeli nazywane są w literaturze anglojęzycznej „base-age specific”, co można przetłumaczyć jako „pod wpływem wieku bazowego” lub „specyficzne dla wieku bazowego” z interpretacją, że są to „parametry obciążone błędem wynikającym z arbitralnego wyboru wieku bazowego”. Aby uniknąć tego problemu, Bailey i Clutter [1974] zaproponowali estymację parametrów sposobem, który nazwali „base-age invariant”, co może być przetłumaczone jako „niezmiennie przy różnym wyborze wieku bazowego” lub „niezależne od wyboru wieku bazowego”. Sedno takiego ustalania parametrów tkwi w szacowaniu wszystkich wartości  $Y_{0i}$  charakterystycznych dla każdej indywidualnej serii danych, równocześnie z szacowaniem parametrów modelu wspólnych dla wszystkich serii. Oznacza to w istocie, że indeks bonitacyjny (klasa bonitacji) staje się jednym z dodatkowych parametrów równania. Może być on nazwany zmiennym parametrem równania („varying parameter”), czyli jednym parametrem z różnymi wartościami dla różnych części danych. Metoda ta jest znacznie bardziej skomplikowana obliczeniowo, ale jest jednocześnie bardziej uzasadniona tak teoretycznie, jak i praktycznie [Cieszewski i in. 2000], i dlatego właśnie ona została użyta w niniejszej pracy.

Ponieważ wyrównanie funkcji dla tak niewielkiego materiału liczbowego, jaki stanowią tablice zasobności, jest stosunkowo proste, parametry oszacowane były za pomocą modułu Solver arkusza kalkulacyjnego Microsoft Excel, przy czym kryterium dopasowania funkcji była minimalizacja kwadratów odchylenia poszczególnych wartości tablicowych od linii regresji. Przy poszukiwaniu parametrów poszczególnych funkcji [2] i [3] na podstawie danych z tablic, wartości  $Y_{0i}$  (osobne dla każdej klasy bonitacji) były ustalane równocześnie z ogólnymi parametrami równania. Rozwiązanie takie zastosowano po to, aby wszystkie krzywe mogły przebiegać przez dane bez żadnych ograniczeń czy też większego wpływu jednych danych nad drugimi. W konsekwencji jednoparametrowy model [2] dopasowywany do danych z czterech klas bonitacji (I, II, III, i IV) wymagał ustalenia pięciu parametrów ( $a, Y_{0I}, Y_{0II}, Y_{0III}$  i  $Y_{0IV}$ ), a trzyparametrowy model [3] wymagał ustalenia siedmiu parametrów ( $j, f, b, Y_{0I}, Y_{0II}, Y_{0III}$  i  $Y_{0IV}$ ).

## Rezultaty

Oszacowane parametry zmodyfikowanej funkcji Gompertza dla wszystkich sześciu klas bonitacji (Ia – V) przedstawiono w tabeli 1.

Parametr  $a$  funkcji [2] oszacowany został na 29,2029 a wartości  $Y_{0I}, Y_{0II}, Y_{0III}$  i  $Y_{0IV}$  na odpowiednio 28,08; 24,02; 20,17 i 16,06. Parametry  $j, b$  oraz  $f$  funkcji [3] oszacowano odpowiednio na 1,44604; 10,1971011 i  $-5,15428$ , zaś  $Y_{0I}, Y_{0II}, Y_{0III}$  i  $Y_{0IV}$  na 28,08; 24,11; 20,32 i 16,29. Wynikowe krzywe bonitacyjne przedstawiono na wykresie (ryc. 1). Wykres zawiera również oryginalne dane tablicowe i krzywe dla klas bonitacji Ia i V (ryc. 1 – linie przerywane).

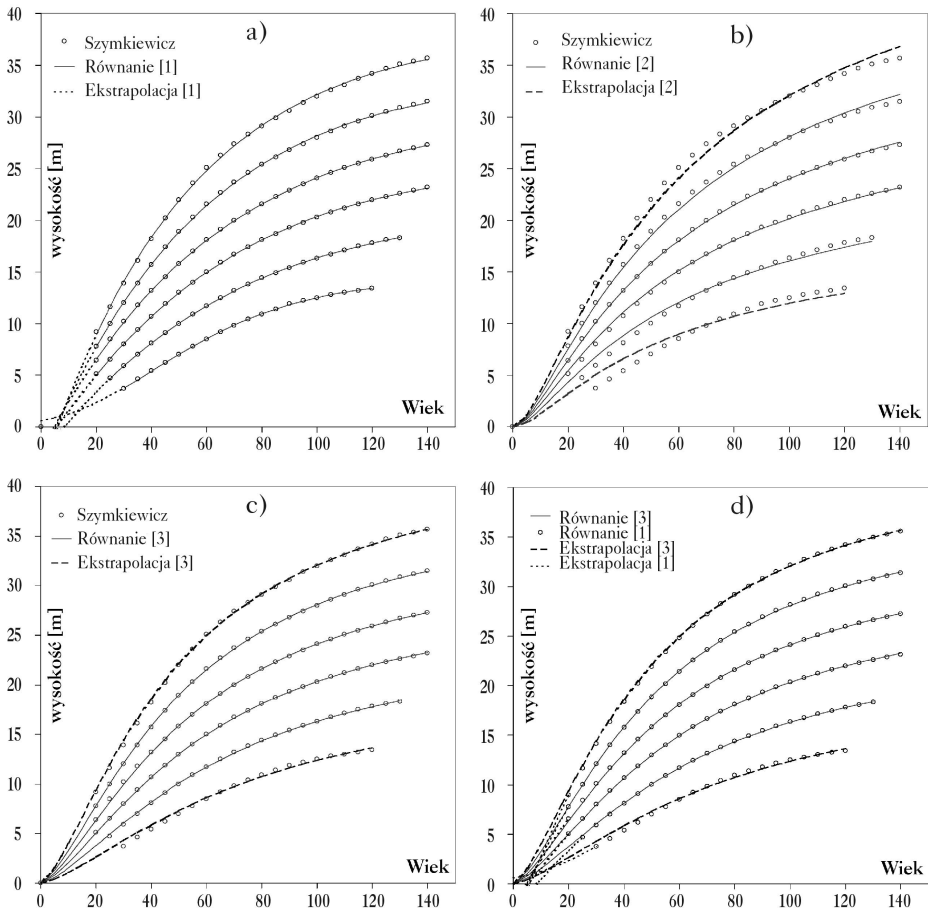
Wyniki dopasowania poszczególnych funkcji do danych dotyczących wzrostu wysokości na podstawie tablic zasobności przedstawiono w tabeli 2.

Błędy dopasowania (odchylenia resztowe) przedstawione zostały na rysunku 2 (ryc. 2).

Tabela 1.

Parametry funkcji [1] dla poszczególnych klas bonitacji  
Function [1] parameters for site quality classes

Klasa bonitacji	$a_i$	$b_i$	$c_i$	$d_i$
Ia	776,49445	0,057188	0,01946	-738,006
I	171,27213	0,246502	0,01931	-137,088
II	157,61078	0,232223	0,01751	-127,259
III	81,17226	0,425179	0,01804	-55,328
IV	78,56446	0,366910	0,01706	-57,156
V	14,39589	3,561638	0,03130	0,172



Ryc. 1.

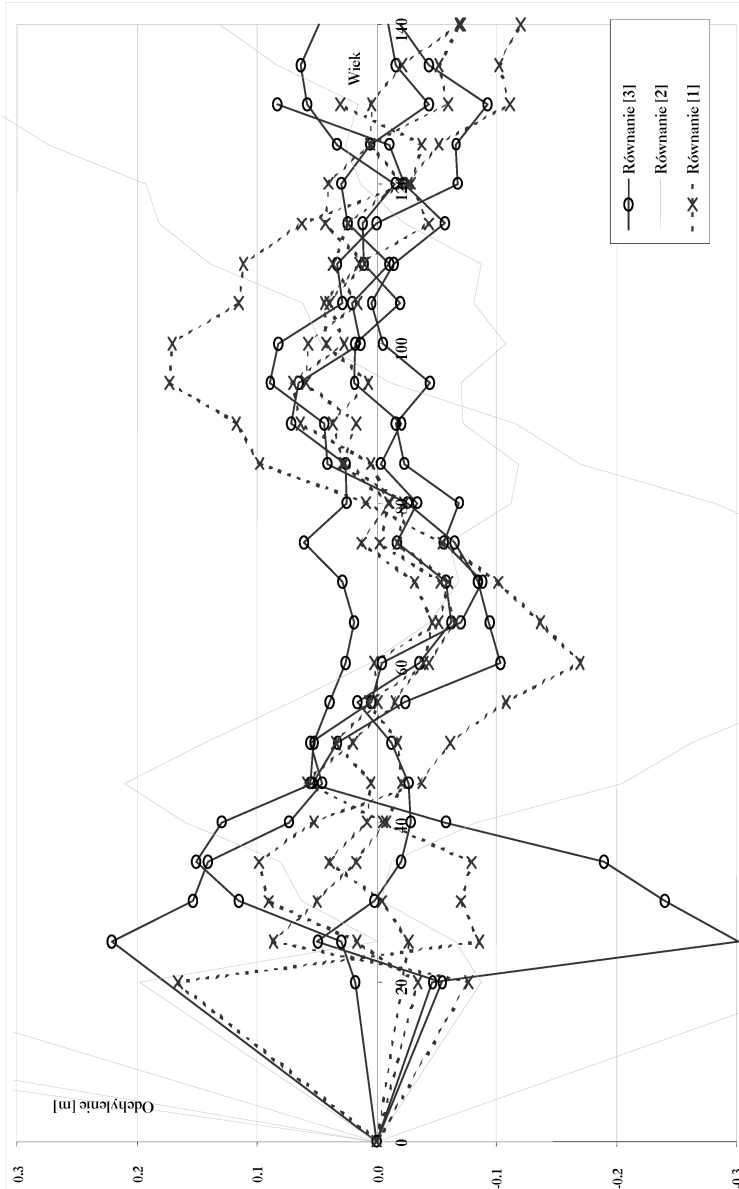
Dane dotyczące wzrostu wysokości z tablic Szymkiewicza dla sosny (symbole na rysunkach a, b, c) i krzywe bonitacyjne uzyskane na podstawie wyrównanych funkcji [1], [2] i [3] porównane z danymi (a, b i c) i między sobą (d)

Height growth data from yield tables by Szymkiewicz for pine (symbols in Fig a, b and c) and site quality curves obtained from smoothed functions [1], [2] and [3], compared with the data (a, b and c) and with themselves (d)

Tabela 2.

Wyniki dopasowania poszczególnych funkcji do danych tablicowych  
Results of fitting individual functions to data in the yield tables

	Funkcja [1]	Funkcja [2]	Funkcja [3]
Błąd standardowy	0,12	0,418	0,11
Suma kw. odchyleń	0,40	9,88	0,52
Zakres błędów	-0,17; +0,17	-0,55; +0,88	-0,30; +0,22
Śr. arytm. błędów	0,00	0,02	0,00



Ryc. 2.

Odchylenia resztowe poszczególnych funkcji w stosunku do danych tablicowych  
Residual deviation of individual functions in comparison with data in the yield tables

W celu sprawdzenia, czy dopasowanie poszczególnych funkcji nie zależy od jakości siedliska, przeprowadzono szczegółową analizę błędów w klasach bonitacji. Jej wyniki przedstawiono w tabeli 3.

**Tabela 3.**

Analiza błędów poszczególnych funkcji w klasach bonitacji  
Analysis of errors of individual functions in site quality classes

Funkcja	Błąd[m]	Klasa bonitacji					
		Ia	I	II	III	IV	V
[1]	Min.	-0,3	-0,2	-0,1	-0,1	-0,1	0,0
	Max.	+0,2	+0,2	+0,2	+0,1	0,0	0,0
	Śr.	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
[2]	Min.	-1,0	-0,5	-0,2	-0,2	-0,4	-0,6
	Max.	+1,1	+0,7	+0,3	+0,5	+0,9	+1,3
	Śr.	-0,2	-0,1	0,0	+0,1	+0,1	+0,1
[3]	Min.	-0,1	-0,1	-0,3	-0,1	-0,1	-0,3
	Max.	+0,5	+0,2	+0,1	+0,1	+0,2	+0,6
	Śr.	0,1	0,0	0,0	0,0	0,0	0,1

## Dyskusja

Modele przedstawione w niniejszej pracy są przykładami trzech (spośród wielu) faz ewolucji matematycznych modeli wzrostu wysokości. Funkcja Gompertza [1], dopasowana oddzielnie dla każdej klasy bonitacji, reprezentuje najprostszą metodę użycia modelu matematycznego do wyrównywania danych, która zastąpiła ręczne kreślenie krzywych i pozwoliła na automatyczną interpolację pomiędzy danymi z różnych klas wieku. Przy użyciu tej metody, dopasowane modele (np. model [1]) lepiej reprezentują prawdziwe dane od samych tablic, ponieważ przedstawiają one średnie kierunki wzrostu dla wszystkich klas wieku w modelowanych klasach bonitacji. Tablice Szymkiewicza w dalszym ciągu zawierają znaczny składnik losowy, który był wyrównany tylko częściowo przez uśrednienie wartości w indywidualnych klasach wieku i bonitacji, lecz nie pomiędzy tymi klasami. Każda tablicowa wartość reprezentuje informację uzyskaną na podstawie tylko jednej klasy wieku i bonitacji, podczas gdy każdy punkt krzywej dopasowanego modelu [1] jest wynikiem informacji z wszystkich klas wieku w danej klasie bonitacji. Interpolacja danych z tablic, na przykład pomiędzy wiekiem 40 i 50 lat, jest oparta tylko na informacji z tych dwóch klas wieku, podczas gdy taka interpolacja przy użyciu modelu [1] oparta jest na danych z wszystkich klas wieku. Ponieważ celem modelowania jest generalizacja informacji zawartej w danych pomiarowych i wyrównanie błędów przypadkowych, model matematyczny dopasowany do wszystkich obserwacji w danej serii jest z punktu widzenia statystycznego bardziej efektywny, niż tablice zawierające indywidualne podsumowania dla pojedynczych klas wieku i bonitacji.

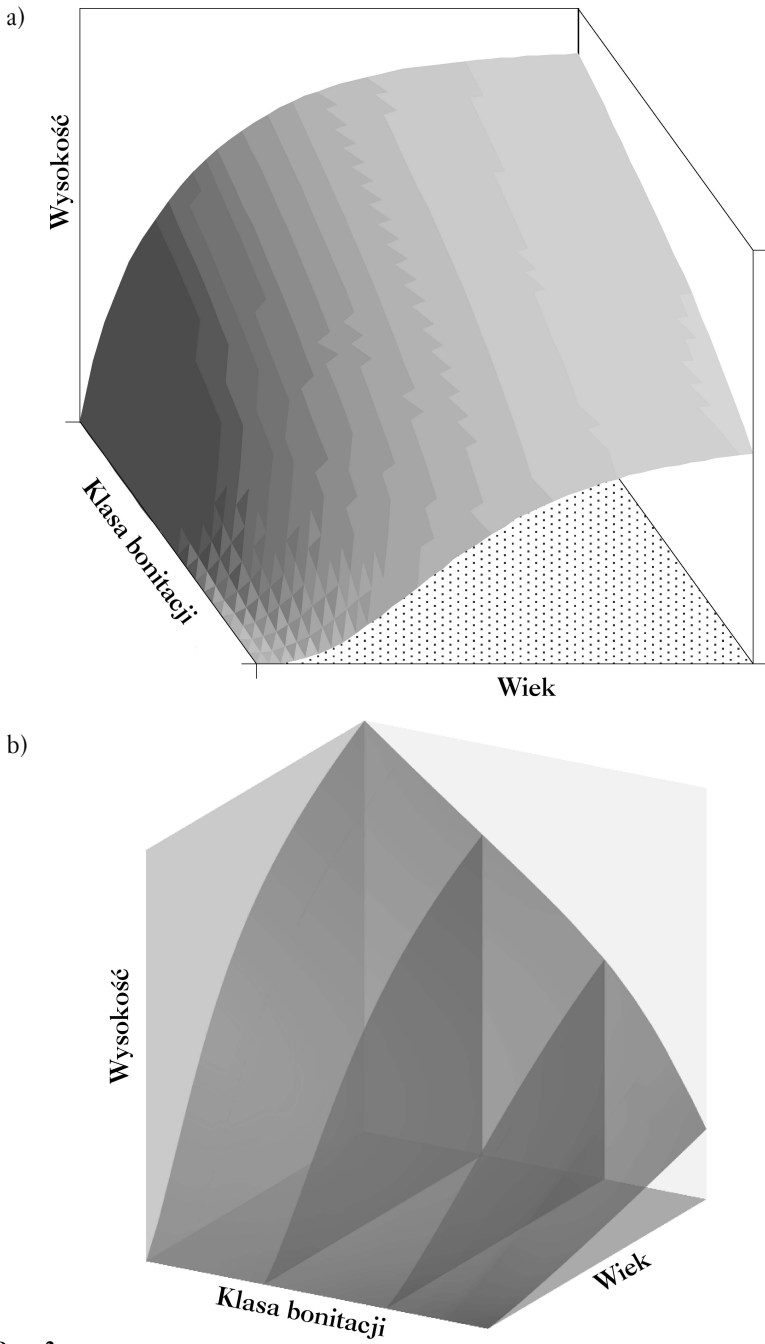
W pojedynczej klasie bonitacji indywidualne wartości tablicowe dla poszczególnych klas wieku mają się tak do modelu [1] dopasowanego do tej klasy bonitacji, jak poszczególne modele dopasowane indywidualnie do różnych klas bonitacji mają się do bardziej uogólnionego modelu dopasowanego równocześnie do wszystkich (lub prawie wszystkich) klas bonitacji i wieku. Model oparty na wspólnym opisie wszystkich pożądaných danych i dopasowany

równocześnie do wszystkich tych danych zawiera w każdym swoim punkcie informację uzyskaną na podstawie analizy całości danych i przez to jest lepszą reprezentacją modelowanego zjawiska, niż pojedyncze modele, chyba że nie jest on wystarczająco elastyczny do odpowiedniego opisanego modelowanego zjawiska. Przykładem niewystarczająco elastycznego modelu jest równanie [2]. Można je dopasować jednocześnie do wszystkich klas wieku i bonitacji, ale nie opisuje ono wystarczająco wiernie tych danych (tab. 2, ryc. 1). Suma kwadratów odchyłeń wartości tablicowych od linii regresji (kryterium dopasowania) jest w jego przypadku ponad dwudziestokrotnie większa, a błąd standardowy prawie 4 razy większy, od analogicznych wartości dla modelu [1]. Tę dysproporcję błędów nie mogą być zrekomensowane nawet przez ogromną różnicę w liczbie parametrów (24 w porównaniu z 5) pomiędzy tymi modelami.

Odwrotną sytuację obserwujemy w przypadku modelu [3], który dobrze opisuje dane (tab. 2, ryc. 1 i 2) i który jest najlepszym przykładem potwierdzającym to stwierdzenie o wyższości modeli całościowych nad częściowymi. Aby lepiej rozważyć tę tezę, zwróćmy uwagę na to, że model [1], który może reprezentować tylko jedną serię bonitacyjną dla dowolnego zestawu parametrów, został dopasowywany oddzielnie do poszczególnych sześciu klas bonitacji za pomocą 24 parametrów, a model [3] był dopasowany równocześnie do danych z czterech klas bonitacji za pomocą tylko siedmiu parametrów. Jednocześnie ten 24-parametrowy model [1] przedstawia tylko sześć krzywych i każdy punkt na każdej z tych krzywych zawiera informację opartą na osobnej analizie tylko jednej indywidualnej klasy bonitacji. Z drugiej strony 7-parameterowe równanie [3] modeluje nieskończoną ilość krzywych i każdy punkt na każdej z tych krzywych zawiera informację opartą na analizie wszystkich klas wieku i bonitacji, do których ta funkcja była dopasowana. Innymi słowy, równanie [3] modeluje nieliniową powierzchnię wzrostu wysokości w trójwymiarowej przestrzeni zdefiniowanej przez ciągłe wartości: wieku, klasy bonitacji i wysokości (ryc. 3a). Poszczególne krzywe wzrostu modelu [3] są zdefiniowane jako przecięcia jego trójwymiarowej powierzchni z płaszczyznami przedstawiającymi stałe wartości bonitacji dla wszelkich wartości wieku i wysokości (ryc. 3b). Równanie dynamiczne [3] jest modelem zależności między wysokością, wiekiem i produktywnością siedliska zdefiniowanego przez warunki początkowe. Model ten opisuje nie tylko zależność między wysokością i wiekiem, jak w przypadku modelu [1], ale również zależność między wysokością i produktywnością oraz wiekiem i produktywnością.

Pomimo, że model [3] nie był dopasowany do wartości z klasy „Ia”, może być on w praktycznym zastosowaniu użyty dla tej klasy z większą ufnością, niż model [1] dopasowany do niej. Uzasadnienie tego jest takie, że klasa Ia była pierwotnie stworzona przez ekstrapolację wartości z pozostałych klas [Szymkiewicz 1949] za pomocą metod uboższych, niż przedstawione w niniejszej pracy nowoczesne sposoby analizy matematyczno-statystycznej. Tak więc model [3] tylko pozornie reprezentuje klasę bonitacji Ia gorzej, niż model [1]. W rzeczywistości natomiast nie tylko jego przedstawienie tej klasy produktywności jest z pewnością lepsze, niż dostarczone przez model [1], ale w gruncie rzeczy jest ono najprawdopodobniej wręcz bardziej odpowiednie (lepiej reprezentujące rzeczywistość), niż same wartości tablic Szymkiewicza dla tej klasy. Innymi słowy, najprawdopodobniej model [3] opisuje klasę Ia tak, jakby była ona zbudowana na podstawie bezpośrednich danych pomiarowych, czyli podaje dane bliższe rzeczywistości, niż tablice ekstrapolowane przez Szymkiewicza. Stwierdzenie to odnosi się w pełni również do wszystkich innych wartości leżących między klasami „I” i „Ia”. Jednocześnie duże podobieństwo pomiędzy przewidywaniami modelu [3] dla klasy Ia i odpowiadającymi im wartościami tablicowymi jest potwierdzeniem dobrej ekstrapolacji wykonanej przez Szymkiewicza, co w tamtym okresie było trudnym problemem [Szymkiewicz 1948, 1949].





Ryc. 3.

Model [3] jako trójwymiarowa przestrzeń zdefiniowana przez ciągłe wartości wieku, klasy bonitacji i wysokości (ryc. 3a), która może być użyta do definiowania krzywych wzrostu poprzez przecięcie z płaszczyzną sieczną zdefiniowaną dla dowolnej stałej w klasie bonitacji (ryc. 3b).

Model [3] as a three-dimensional space defined by continuous values of age, site quality class and height (Fig. 3a) which can be used in defining height curves through the intersection with the secant plane defined for any constant in the site quality class (Fig. 3b)

Nie jest natomiast jasne w jakim stopniu wymienione stwierdzenie odnosi się do klasy V, reprezentowanej przez minimalną liczbę danych, które najprawdopodobniej pochodziły z drzewostanów różnowiekowych [Bruchwald i in. 1979]. Z drugiej jednak strony drzewostany w klasie bonitacji V są bez istotnego znaczenia gospodarczego. Według Bruchwalda i Kliczkowskiej [1997, 2000] średnia bonitacja drzewostanów sosnowych na bardzo słabym siedlisku (bór suchy) wynosi około 17 metrów (wysokość górna mierzona w wieku 100 lat), co odpowiada w przybliżeniu bonitacji IV. Stosunkowo mało prawdopodobne jest więc znalezienie drzewostanów gospodarczych należących do klasy V, która ma średnią wysokość około 12,5 metra w wieku 100 lat, i która według statystyk stanowi 2,3% ogólnej powierzchni leśnej w Lasach Państwowych [ZHL 1988]. Główne różnice modelu [3] w stosunku do wartości z klasy V występują dla wieku od 30 do 50 lat (ryc. 2c) podczas gdy przewidywania tego modelu dla wieku od 0 do 20 lat (dla wszystkich klas bonitacji) są znacznie rozsądniejsze, niż prognozy modelu [1] (por. ryc. 1a i ryc. 1c). Jednakże, jako że generalnie błędy modelu [3] są w granicach wartości błędów pomiarowych (tab. 3), model ten może być tak czy owak praktycznie akceptowalny dla klasy V i w związku z tym – również dla dowolnej interpolacji pomiędzy klasami IV i V.

Ogólnie rzecz biorąc wydaje się oczywiste, że model [3], dopasowany równocześnie do kilku klas bonitacji, powinien dawać większe błędy, niż model [1] dopasowany do każdej klasy osobno. Analogicznie model [1] dopasowany do wszystkich klas wieku w obrębie klasy bonitacji dawać będzie większe błędy, niż przy dopasowaniu tylko do ich części. Z tego też względu opieranie się wyłącznie na bezpośrednich wartościach błędów w analizie modeli może być bezpodstawne i mylące. Inne miary, np. błąd standardowy przewidywań, uwzględniający również liczbę szacowanych parametrów, są w tym przypadku znacznie bardziej uzasadnione. I tak model [3] ma mniejszy błąd standardowy, niż model [1] (tab. 2), chociaż ma on większą sumę kwadratów odchyień ze względu na jego dopasowanie do bardziej skomplikowanego zbioru danych, opisującego równocześnie wzrost dla różnych klas bonitacji zamiast pojedynczej serii wzrostu. W prostszym ujęciu oznacza to, że nawet gdyby obydwie modele opisywały te same relacje, model [3] z mniejszym błędem standardowym byłby bardziej parsymonijny, niż model [1]. Jednakże w przypadku porównania modeli [1] i [3], różnica w błędach standardowych nie odzwierciedla najistotniejszej przewagi równania [3] nad równaniem [1]. Przewaga ta jest zawarta głównie w tym, że model [3] opisuje ciągłą relację pomiędzy wzrostem, wiekiem i produktywnością siedliska zamiast tylko pojedynczej relacji pomiędzy wysokością i wiekiem dla pojedynczej serii wzrostu. Oznacza to, że nie tylko dopasowanie modelu [3] jest statystycznie lepsze, niż dopasowanie modelu [1], ale również to, że model [3] wyraża większy zasięg relacji pomiędzy większą liczbą zmiennych i opisuje modelowane zjawisko na podstawie większej liczby danych. Na dodatek model [3] jest biologicznie znacznie bardziej uzasadniony niż model [1], ponieważ model [1] przewiduje nierealne wartości dla młodych drzewostanów poniżej 20 lat (ryc. 1a), zaś model [3] przewiduje dla tych klas wieku sensowne wartości (ryc. 1c, d), które mogą być stosowane jako interpolacja modelu dla młodszych drzewostanów.

## Podsumowanie i wnioski

W niniejszej pracy przedstawione zostało porównanie różnych funkcji zastosowanych do opisu schematu zmian z wiekiem wysokości przeciętnej drzewostanów sosnowych zawartego w tablicach Szymkiewicza. Do analizy wybrane zostały funkcje reprezentujące różne podejście do modelowania bonitacji, indeksu bonitacyjnego i wzrostu wysokości:

- oddzielne równania dla poszczególnych klas bonitacji siedliska na przykładzie zmodyfikowanej przez Jarosza i Kłąpca [2002] funkcji Gomperta [1825],

- dynamiczne równanie anamorficzne wyprowadzone przez Cieszewskiego i Zasadę [2002] jako udoskonalenie modelu Bruchwalda dla sosny [Bruchwald 1985, 1988], oparte na funkcji Hossfelda [1822], i
- dynamiczne równanie polimorficzne ze zmiennymi asymptotami w postaci wyprowadzonej przez Cieszewskiego [2001] również z podstawowej funkcji Hossfelda [1822].

Dopasowanie modelu [1] Jarosza i Kłapcia [2002] do danych okazało się słabsze, niż dla modelu [3] (błąd standardowy większy, niż dla modelu [3] z powodu znacznie większej liczby parametrów). Ponadto, ze względu na utrudnioną interpolację między różnymi klasami bonitacji, rozwiązanie to nie stanowi optymalnego podejścia do modelowania krzywych wzrostu wysokości. Równanie dynamiczne [2] [Cieszewski i Zasada 2002] wykazuje wiele zalet w stosunku do oddzielnych krzywych wzrostowych dla każdej klasy bonitacji, ale jest zbyt mało elastyczne do wystarczająco dobrego opisu danych. Dynamiczne równanie polimorficzne ze zmiennymi asymptotami [3] [Cieszewski 2001] dało najlepsze rezultaty i najlepsze wyrównanie danych. Model [3] jest polecany do użytku w miejsce innych modeli będących substytutem tradycyjnych tablic Szymkiewicza [1971]. W pracy tej zostało również dowiedzione, że przewidywania proponowanego modelu powinny być dokładniejsze, niż oryginalne wartości zawarte w tablicach. Szczególnie wartości wysokości dla klasy bonitacji Ia pochodzące z modelu [3] mogą być bardziej odpowiednie, niż oryginalne wartości w tablicach Szymkiewicza dla sosny, które są oparte na ręcznej ekstrapolacji z pozostałych danych.

Proponowana metodyka jest zalecana do stosowania we wszystkich podobnych rozwiązaniach zastępujących zależności między różnymi cechami w istniejących tablicach oraz przy tworzeniu nowych modeli.

## Literatura

- Bailey R.L., Clutter J.L., 1974. Base-age invariant polymorphic site curves. *For. Sci.* 20: 155-159.
- Borders B.E., Bailey R.L., Ware K.D., 1984. Slash pine site-index from a polymorphic model by joining (splining) nonpolynomial segments with an algebraic difference method. *For. Sci.* 30: 411-423.
- Bruchwald A., 1977. Change in Top Height of Pine Forest Stands with Age. *Bull. Acad. Pol. Sc., Ser. Biol.*, 5: 335-342
- Bruchwald A., 1985: Model wzrostowy MDI-1 dla sosny. *Las Pol.* 9: 10, 15.
- Bruchwald A., 1988. Introductory program of the MDI-1 growth model for Scots pine. *Ann. Warsaw Agric. Univ. - SGGW-AR, For. and Wood Technol.*, 36: 3-9.
- Bruchwald A., Rymer-Dudzińska T., Dudek A., Wróblewski L., 1979. Ocena schematu Schwappacha i Płońskiego przebiegu z wiekiem średniej wysokości drzewostanów sosnowych. *Sylvan*, 3: 1-9.
- Bruchwald A., Kliczkowska A., 1997. Kształtowanie się bonitacji dla drzewostanów sosnowych Polski. *Prace IBL*, s. A, 838.
- Bruchwald A., Kliczkowska A., 2000. Kształtowanie się bonitacji dla drzewostanów sosnowych Polski. W: *Przestrzenne zróżnicowanie wzrostu sosny*. Fundacja Rozwój SGGW: 30-41.
- Bruchwald A., Michalak K., Wróblewski L., Zasada M., 2000. Analiza funkcji wzrostu wysokości dla różnych regionów Polski. W: *Przestrzenne zróżnicowanie wzrostu sosny*. Fundacja „Rozwój SGGW”: 84-91.
- Cieszewski C.J., 2000. Analytical Solution to the Generalized Log-Logistic Equation. *For. Sci.* 46: 291-296.
- Cieszewski C.J., 2001. Three methods of deriving advanced dynamic site equations demonstrated on Inland Douglas-fir site curves. *Can. J. For. Res.* 31 (1): 165-173.
- Cieszewski C.J., 2002. Comparing fixed- and variable-base-age polymorphic site equations having single versus multiple asymptotes. *For. Sci.* 48(1): 7-23.
- Cieszewski C.J., Bailey R.L., 2000. Generalized Algebraic Difference Approach: A New Methodology for Derivation of Biologically Based Dynamic Site Equations. *For. Sci.* 46:116-126.
- Cieszewski C.J., Bella L.E., 1989. Polymorphic height and site index curves for lodgepole pine in Alberta. *Can. J. For. Res.* 19: 1151-1160.
- Cieszewski C.J., Bella L.E., Walker D., 1999. Implementation of a base age invariant height model for lodgepole pine in company timber supply analysis. *For. Chron.* 75:1-3.
- Cieszewski C.J., Harrison M.W., Martin S.W., 2000. Examples of Practical Methods for Unbiased Parameter Estimation in Self-Referencing Functions. W: Cieszewski C.J. (Editor). 2000. *Materiały The First International Conference on Measurements and Quantitative Methods and Management*, Jekyll Island, Georgia, 17-18 listopada 1999.

- Cieszewski C.J., Nigh G., 2002. A Dynamic Equation for a Sitka Spruce Height-Age Model. *For. Chron.* 78(5): 1-5.
- Cieszewski C.J., Zasada M., 2002. Dynamiczna forma anamorficznego modelu bonitacyjnego dla sosny pospolitej w Polsce. *Sylwan*, 7: 17-24.
- Curtis R.O., Demars D.J., Herman F.R., 1974. Which dependent variable in site-index – height – age regression? *For. Sci.* 20: 74-87.
- Czarnowski M.S., 1948. Przyrost wysokości sosny pospolitej. *Kosmos*, 1948-1951-1952, 1-3: 283-317.
- Elfving B., Kiviste A., 1997. Construction of site index equations for *Pinus sylvestris* L. using permanent plot data in Sweden. *For. Ecol. Manag.* 98: 125-134.
- Gompertz B., 1825. On the nature of the function expressive of the law of human mortality, and a new mode of determining the value of live contingencies. *Phil. Trans. Roy. Soc.* 182, 513-585.
- Graves H.S., 1910. *Forest Mensuration*. John Wiley & Sons, New York, First Edition: 325-326.
- Hossfeld J.W., 1822. *Mathematik für Forstmänner, Ökonomen und Cameralisten*. Gotha, T. 4. Bd., S. 310.
- Jarosz K., Kłapeć B., 2002. Modelowanie wzrostu wysokości przy pomocy funkcji Gomperta. *Sylwan*, 4: 35-42.
- Monserud R.A., 1984. Height growth and site-index curves for inland Douglas-fir based on stem analysis data and forest habitat type. *For. Sci.* 30: 943-965.
- Schumacher F.X., 1939. A new growth curve and its application to timber yield studies. *J. For.* 37: 819-820.
- Socha J., 1997. Matematyczne ujęcie bonitacji siedliska. *Sylwan*, 2: 31-36.
- Stage A.R., 1963. A mathematical approach to polymorphic site index curves for grand fir. *For. Sci.* 9: 167-180.
- Szymkiewicz B., 1948. Niektóre zagadnienia dotyczące tablic zasobności drzewostanów sosnowych. *Prace IBL*, s. A., 54.
- Szymkiewicz B., 1949. Rozszerzenie tablic zasobności Schwappacha dla sosny o klasę Ia. *Sylwan* 3-4.
- Szymkiewicz B., 1971. Tablice zasobności i przyrostu drzewostanów ważniejszych gatunków drzew leśnych, zestawione na podstawie tablic niemieckich, radzieckich i polskich. PWRiL Warszawa.
- ZHL 1998. *Zasady Hodowli Lasu*. Wydanie V znowelizowane. Ministerstwo Rolnictwa i Gospodarki Żywnościowej, PWRiL Warszawa.

## SUMMARY

## Site index model for Scots pine based on Szymkiewicz yield tables

Different functions used for the description of the pattern of changes in the mean height of pine stands over time included in the yield tables by Szymkiewicz were compared in the paper. The functions representing different approaches to modelling site quality, site index and height growth were selected for the analysis:

- a separate equations for individual site quality classes on the example of the Gompertz function [1825] modified by Jarosz and Kłapeć [2002],
- a dynamic anamorphic equation proposed by Cieszewski and Zasada [2002] as a modification of the Bruchwald model for pine [Bruchwald 1985, 1986, 1988] based on the Hossfeld function [1822] and
- a dynamic polymorphic equation with variable asymptotes in the form also derived from the Hossfeld function [1822] by Cieszewski [2001].

Fitting the model [1] of Jarosz and Kłapeć [2002] to the data appeared to be weaker than that for the model [3] (standard error greater than that for the model [3] with the higher number of parameters). Besides, due to difficult interpolation between various site quality classes, this solution is not an optimal solution to modelling the height growth curves. The dynamic equation [Cieszewski and Zasada 2002] has many advantages as compared with the separate growth curves for individual site quality classes, but it does not show sufficient flexibility to obtain an efficient data description. The dynamic polymorphic equation with variable asymptotes [3] [Cieszewski 2001] proved the most desirable evenness of data. The model [3] is recommended for use to replace other models being alternative to the traditional Szymkiewicz yield tables [1952, 1971]. The paper proves that the predictions of the proposed mode should be more precise than the original values contained in the tables. The height values for the „Ia” site quality class deriving from the model [3] should be particularly more suitable than the original values in the Szymkiewicz yield tables for pine as being based on manual extrapolation with other data.