

## DRGANIA PŁYT NA PODŁOŻU LEPKOSPĘŻYSTYM

Justyna Sobczak-Piąstka, Adam Podhorecki

**Streszczenie:** Przedmiotem pracy są drgania płyt cienkich opartych na podłożu lepkospężystym. Równania różniczkowe cząstkowe opisujące drgania płyty cienkiej i równania różniczkowe modelujące podłoże lepkospężyste sprowadzono do równań pracy wirtualnej, a następnie rozwiązano dwiema metodami numerycznymi – metodą elementów skończonych (MES) i metodą Zienkiewicza-Wooda (SSpj). W celu ilustracji poprawności zaproponowanej metodyki rozwiązania został napisany program komputerowy. Przy jego użyciu wykonano obliczenia i przeprowadzono analizę otrzymanych wyników.

**Słowa kluczowe:** płyta, drgania, podłoże lepkospężyste

### WSTĘP

Problematyka współpracy konstrukcji budowlanej z podłożem ma swoje znaczące miejsce w literaturze naukowej. Złożoność tego zagadnienia wynika z braku jego jednoznacznego przedstawienia w postaci równań i związków matematycznych. Powoduje to, że stosuje się różnego rodzaju modele fenomenologiczne do opisu zwłaszcza oddziaływania podłoża.

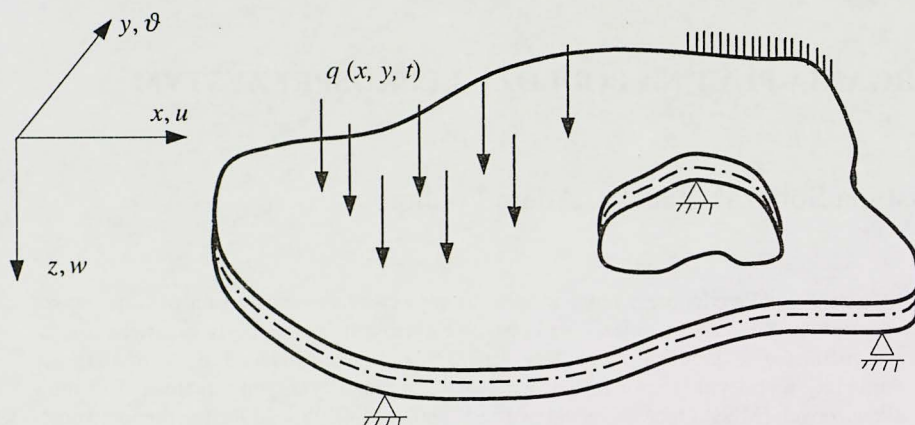
W pracy rozważa się drgania płyty cienkiej opartej na podłożu lepkospężystym. Równania różniczkowe cząstkowe opisujące dynamikę płyty cienkiej i równania różniczkowe modelujące podłoże lepkospężyste sprowadzono do równań pracy wirtualnej i następnie rozwiązano dwiema metodami numerycznymi – metodą elementów skończonych (MES) i metodą Zienkiewicza-Wooda (SSpj). Wynikiem ostatecznym rozwiązania są pola przemieszczeń, odkształceń i naprężeń. Ważnym elementem rozwiązania jest ustalenie obszaru kontaktu płyty z podłożem w przypadku występowania więzów jednostronnych.

### RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE PŁYTY OPARTEJ NA PODŁOŻU LEPKOSPĘŻYSTYM

Rozpatruje się płytę cienką spoczywającą na wieloparametrowym podłożu lepkospężystym (rys. 1). Podłoże może być niejednorodne, nieciągłe i może charakteryzo-

---

wać się więzami jednostronnymi. Kształt płyty i warunki brzegowe mogą być dowolne. Na płytę działa obciążenie poprzeczne dowolnie zmienne w czasie  $t$ . Płyta wykonana jest z materiału liniowo-sprężystego.



Rys. 1. Rozważana płyta cienka oparta na podłożu lepkosprężystym  
Fig. 1. Considered thin plate on viscoelastic basis

Płytę rozpatruje się w ramach klasycznej teorii płyt cienkich [Kączkowski 1980]. W takim przypadku znane jest równanie różniczkowe opisujące ruch przy wykorzystaniu momentów:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + \frac{h^3}{12} \rho \left( \frac{\partial^2 \ddot{w}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}}{\partial y^2} \right) - \rho h \ddot{w} + q - r = 0 \quad (1)$$

$$x, y \in \Omega, t \in \langle 0, \infty \rangle, \ddot{w} \equiv \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

gdzie:

$$\begin{aligned} M_x &= M_x(x, y, t) = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ M_y &= M_y(x, y, t) = -D \left( \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ M_{xy} &= M_{xy}(x, y, t) = -D (1 - \nu) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \end{aligned} \quad (2)$$

$M_x$  i  $M_y$  oznaczają momenty zginające, a  $M_{xy}$  – moment skręcający;  $w = w(x, y, t)$  jest funkcją ugięcia płyty,  $q = q(x, y, t)$  – znana funkcja obciążenia poprzecznego,

$r = r(x, y, t)$  – nieznana funkcja odporu (reakcja) podłoża,  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$  – sztywność

giętna płyty, natomiast  $E$ ,  $\rho$ ,  $\nu$  opisują stałe materiałowe,  $h$  to grubość płyty, a  $\Omega$  – powierzchnia środkowa płyty. Równanie (1) uzupełniają warunki brzegowe oraz warunki początkowe, podawane najczęściej w postaci:

$$\begin{aligned} w(x, y, t = 0) &= w^o(x, y) \\ \dot{w}(x, y, t = 0) &= \dot{w}^o(x, y) \end{aligned} \quad (3)$$

### RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE PODŁOŻA LEPKOSPŘĘŻYSTEGO

Istnieje wiele modeli ośrodków lepkosprężystych, na przykład modele różniczkowe, modele całkowe [Derski i Ziemia 1968, Gryczmański 1995, Olszewska i in. 2000]. W pracy przyjmuje się model różniczkowy. Aby uchwycić ważne zjawiska reologiczne, takie jak pełzanie i relaksacja, tworzy się złożone i rozbudowane równania różniczkowe. Znane i stosowane modele lepkosprężyste można opisać jednym równaniem różniczkowym zawierającym związek między reakcją podłoża  $r(x, y, t)$  i ugięciem płyty  $w(x, y, t)$  oraz pochodnymi tych funkcji:

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^s \frac{\partial^i}{\partial t^i} \frac{\partial^j}{\partial x^j} \frac{\partial^k}{\partial y^k} (\alpha_{ijk} r) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^s \frac{\partial^i}{\partial t^i} \frac{\partial^j}{\partial x^j} \frac{\partial^k}{\partial y^k} (\beta_{ijk} w) \quad (4)$$

$$x, y \in \Omega, t \in < 0, \infty)$$

gdzie  $\alpha_{ijk} = \alpha_{ijk}(x, y, t)$  i  $\beta_{ijk} = \beta_{ijk}(x, y, t)$  oznaczają parametry funkcyjne podłoża wyznaczane doświadczalnie. W przypadku podłoża jednorodnego parametry  $\alpha_{ijk}$  i  $\beta_{ijk}$  nie zależą od współrzędnych  $x$ ,  $y$  i wtedy równanie (4) przyjmie prostszą postać:

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^s \frac{\partial^i}{\partial t^i} (\alpha_{ijk} \frac{\partial^j}{\partial x^j} \frac{\partial^k}{\partial y^k} r) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^s \frac{\partial^i}{\partial t^i} (\beta_{ijk} \frac{\partial^j}{\partial x^j} \frac{\partial^k}{\partial y^k} w) \quad (5)$$

Gdy podłożo będzie dodatkowo inwariantne, czyli niezmiennie w czasie, to równanie (5) ulegnie dalszemu uproszczeniu:

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^s \alpha_{ijk} \frac{\partial^i}{\partial t^i} \frac{\partial^j}{\partial x^j} \frac{\partial^k}{\partial y^k} r = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^s \beta_{ijk} \frac{\partial^i}{\partial t^i} \frac{\partial^j}{\partial x^j} \frac{\partial^k}{\partial y^k} w \quad (6)$$

Jeżeli stosować będziemy model jednoparametrowy w przestrzeni, tzn. że rozważane funkcje mają własność:

$$w(x, y, t) \neq 0, \quad r(x, y, t) \neq 0, \quad \frac{\partial^s w}{\partial x^s} = \frac{\partial^s w}{\partial y^s} = 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial^s r}{\partial x^s} = \frac{\partial^s r}{\partial y^s} = 0 \quad \text{dla} \quad s \geq 1 \quad (7)$$

i model wieloparametrowy w czasie, to wtedy równanie (6) przyjmie znaną postać:

$$\sum_{i=0}^n \alpha_i \frac{\partial^i}{\partial t^i} r = \sum_{i=0}^n \beta_i \frac{\partial^i}{\partial t^i} w \quad (8)$$

lub

$$\alpha_0 r + \alpha_1 \dot{r} + \alpha_2 \ddot{r} + \dots + \alpha_n r^{(n)} = \beta_0 w + \beta_1 \dot{w} + \beta_2 \ddot{w} + \dots + \beta_n w^{(n)} \quad (9)$$

Do dalszych rozważań przyjmuje się model lepkosprężysty opisany równaniem różniczkowym zwyczajnym (9). Do jednoznacznego rozwiązania takiego równania potrzebne są warunki brzegowe i warunki początkowe. Warunki brzegowe formułuje się tak, jak dla rozwiązania równania różniczkowego płyty (1). Warunki początkowe są bardziej złożone. Niech przedmiotem naszych rozważań będzie na przykład równanie (9) zapisane dla  $n = 2$ :

$$\alpha_0 r + \alpha_1 \dot{r} + \alpha_2 \ddot{r} = \beta_0 w + \beta_1 \dot{w} + \beta_2 \ddot{w} \quad (10)$$

Warunki początkowe stanowią związki (3) oraz:

$$\begin{aligned} r(x, y, 0) &= r^0(x, y) \\ \dot{r}(x, y, 0) &= \dot{r}^0(x, y) \end{aligned} \quad (11)$$

Dodatkowo warunki (11) muszą mieć taką postać, aby równanie (10) było spełnione w chwili  $t = 0$ :

$$\begin{aligned} \alpha_0 r(x, y, 0) + \alpha_1 \dot{r}(x, y, 0) + \alpha_2 \ddot{r}(x, y, 0) &= \\ = \beta_0 w(x, y, 0) + \beta_1 \dot{w}(x, y, 0) + \beta_2 \ddot{w}(x, y, 0) \end{aligned} \quad (12)$$

Po wykorzystaniu oznaczeń użytych w relacjach (3) i (11) otrzymujemy:

$$\alpha_0 r^0 + \alpha_1 \dot{r}^0 + \alpha_2 \ddot{r}^0 = \beta_0 w^0 + \beta_1 \dot{w}^0 + \beta_2 \ddot{w}^0 \quad (13)$$

## RÓWNANIA PRAC WIRTUALNYCH

Zastosowanie MES do rozwiązania równań różniczkowych (1) i na przykład (10) wymaga przejścia ze sformułowania lokalnego do globalnego (całkowego). W tym celu zastosowano metodę wariacyjną, wykorzystując zasadę pracy wirtualnej. Wszystkie wielkości występujące w równaniach (1) i (10) są funkcjami ciągłymi i dostatecznie gładkimi (istnieją pochodne cząstkowe wymaganego rzędu). Wariację funkcji  $w(x, y, t)$  oznaczamy symbolem  $\delta w(x, y, t)$ . Rozważamy klasę dowolnych przemieszczeń  $w + \delta w$  zgodnych z więzami płyty (geometrycznymi warunkami brzegowymi), co prowadzi do zanikania wariacji przemieszczeń  $\delta w$  na części powierzchni brzegowej z ograniczeniami przemieszczeń.

Na bazie równania (1) tworzymy wyrażenie globalne słuszne dla dowolnego czasu  $t$ :

$$\iint_{\Omega} \delta w \left[ \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + \frac{h^3}{12} \rho \left( \frac{\partial^2 \ddot{w}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}}{\partial y^2} \right) - \rho h \ddot{w} + q - r \right] d\Omega = 0 \quad (14)$$

które po przekształceniach sprowadza się do równania pracy wirtualnej płyty w postaci:

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \left[ \delta \left( \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \right) M_x + \delta \left( \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} \right) M_{xy} + \delta \left( \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \right) M_{xy} + \delta \left( \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \right) M_y - \delta w \rho h \ddot{w} + \right. \\ \left. + \frac{h^3}{12} \rho \delta w \left( \frac{\partial \ddot{\varphi}_x}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{\varphi}_y}{\partial y} \right) + \delta w (q - r) \right] d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

gdzie

$$\varphi_x = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \varphi_y = \frac{\partial w}{\partial y} \quad (16)$$

Po wprowadzeniu oznaczeń (16) równania (2) opisujące momenty przyjmują postać:

$$\begin{aligned} M_x &= -D \left( \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \right) \\ M_y &= -D \left( \nu \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \right) \\ M_{xy} &= -\frac{D}{2} (1 - \nu) \left( \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (17)$$

Analogicznie równanie (10) w postaci globalnej przyjmie postać:

$$\iint_{\Omega} \delta w (\alpha_0 r + \alpha_1 \dot{r} + \alpha_2 \ddot{r} - \beta_0 w - \beta_1 \dot{w} - \beta_2 \ddot{w}) d\Omega = 0 \quad (18)$$

Jest ono równaniem pracy wirtualnej podłoża lepkosprężystego.

## ROZWIĄZANIE NUMERYCZNE DRGAŃ PŁYTY OPARTEJ NA PODŁOŻU LEPKOSPŘĘŻYSTYM

### Zastosowanie metody elementów skończonych (MES)

W MES rozpatrywany obszar płyty (rys. 2a) zostaje myślowo podzielony na skończoną liczbę podobszarów, tzw. elementów skończonych (ES) (rys. 2b). Dla każdego ES (rys. 3) dokonuje się opisu pól przemieszczeń w zależności od parametrów (przemieszczeń) węzłowych:

$$\begin{aligned} w^e(x, y, t) &= \underline{\Phi}_i^{ew}(x, y) \underline{x}_i^e(t), & \varphi_x^e(x, y, t) &= \underline{\Phi}_i^{e\varphi_x}(x, y) \underline{x}_i^e(t) \\ \varphi_y^e(x, y, t) &= \underline{\Phi}_i^{e\varphi_y}(x, y) \underline{x}_i^e(t) \end{aligned} \quad (19)$$

gdzie  $\underline{x}_i^e = [w_i^e, \varphi_{xi}^e, \varphi_{yi}^e]^T$  jest wektorem przemieszczeń ES w węźle  $i$ , a  $\underline{\Phi}_i^{ew}$ ,  $\underline{\Phi}_i^{e\varphi_x}$ ,  $\underline{\Phi}_i^{e\varphi_y}$  to macierze kształtu zawierające funkcje przestrzenne,  $i = 1, 2, \dots, n$  – liczba węzłów w ES.

W taki sam sposób opisujemy inne wielkości, na przykład:

- pochodną przemieszczeń względem czasu

$$\dot{w}^e = \frac{\partial^2 w^e}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\underline{\Phi}_i^{ew} \underline{x}_i^e) = \underline{\Phi}_i^{ew} \frac{\partial^2 \underline{x}_i^e}{\partial t^2} = \underline{\Phi}_i^{ew} \underline{\ddot{x}}_i^e(t) \quad (20)$$

- reakcję (odpór) podłoża

$$r^e(x, y, t) = \underline{\tilde{\Phi}}_i^e(x, y) \underline{y}_i^e(t) \quad (21)$$

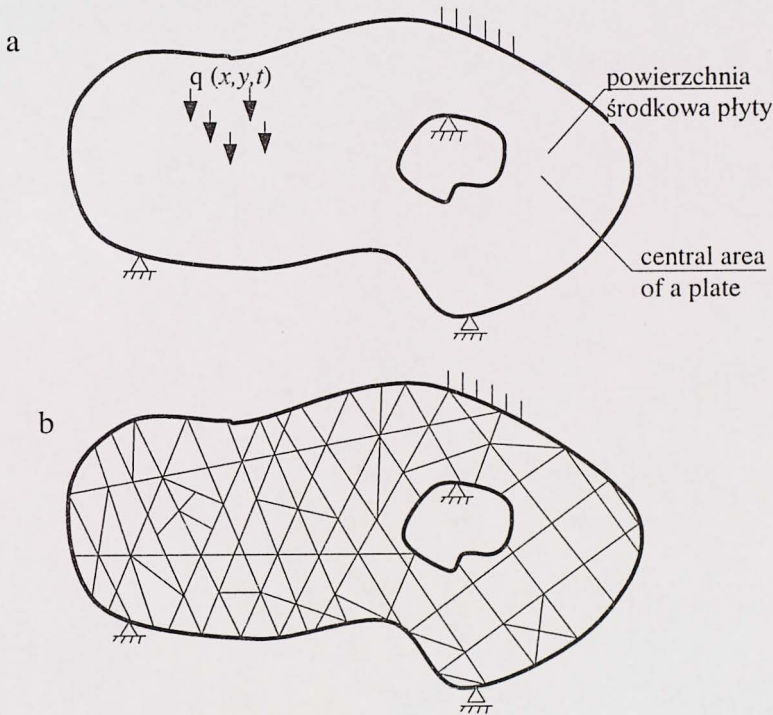
gdzie  $\underline{y}_i^e$  jest wektorem zawierającym siły węzłowe ES w węźle  $i$ , natomiast  $\underline{\tilde{\Phi}}_i^e$  jest funkcją kształtu zawierającą funkcje przestrzenne,  $i = 1, 2, \dots, n$  – liczba węzłów ES,

- momenty zginające i skręcające

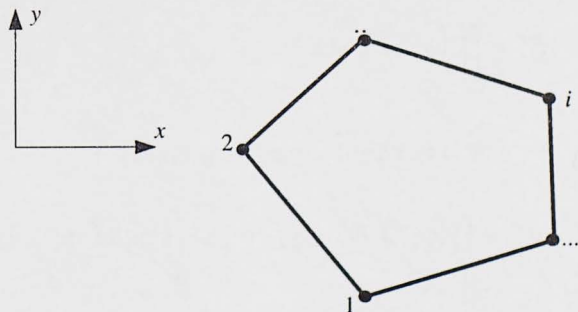
$$M_x^e = -D^e \left( \frac{\partial \varphi_x^e}{\partial x} + \nu^e \frac{\partial \varphi_y^e}{\partial y} \right) = -D^e \left[ \left( \frac{\partial \underline{\Phi}_i^{e\varphi_x}}{\partial x} \right) + \nu^e \left( \frac{\partial \underline{\Phi}_i^{e\varphi_y}}{\partial y} \right) \right] \underline{x}_i^e$$

$$M_y^e = -D^e \left( \nu^e \frac{\partial \varphi_x^e}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_y^e}{\partial y} \right) = -D^e \left[ \nu^e \left( \frac{\partial \Phi_i^{e\varphi_x}}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial \Phi_i^{e\varphi_y}}{\partial y} \right) \right] \underline{x}_i^e \quad (22)$$

$$M_{xy}^e = -\frac{D^e}{2} (1 - \nu^e) \left( \frac{\partial \varphi_x^e}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y^e}{\partial x} \right) = -\frac{D^e}{2} (1 - \nu^e) \left[ \left( \frac{\partial \Phi_i^{e\varphi_x}}{\partial y} \right) + \left( \frac{\partial \Phi_i^{e\varphi_y}}{\partial x} \right) \right] \underline{x}_i^e$$



Rys. 2. Rozważana płyta: a – schemat statyczny płyty, b – dyskretyzacja powierzchni środkowej płyty  
 Fig. 2. Considered plate: a – static scheme of a plate, b – discretisation of central area of a plate



Rys. 3. Element skończony płyty  
 Fig. 3. Finite element of a plate

Po opisanju funkcji przemieszczeń i sił przemieszczeniami węzłowymi dla każdego ES, podstawiamy te związki do równań prac wirtualnych (15) i (18). Po agregacji macierzy otrzymujemy równania ruchu w postaci:

$$\underline{M} \underline{\ddot{x}} + \underline{K} \underline{x} + \underline{W} \underline{y} - \underline{F} = \underline{0} \quad (23)$$

$$\underline{W} (\alpha_0 \underline{y} + \alpha_1 \underline{\dot{y}} + \alpha_2 \underline{\ddot{y}}) - \underline{V} (\beta_0 \underline{x} + \beta_1 \underline{\dot{x}} + \beta_2 \underline{\ddot{x}}) = \underline{0}$$

gdzie:

- macierz bezwładności mas ES

$$\underline{M}_{ik}^e = \rho \iint_{\Omega^e} \left\{ \left( \underline{\Phi}_i^{ew} \right)^T \frac{h^2}{12} \left[ \left( \frac{\partial \underline{\Phi}_i^{e\varphi_x}}{\partial x} \right)^T + \left( \frac{\partial \underline{\Phi}_i^{e\varphi_y}}{\partial y} \right)^T \right] \right\} \underline{\Phi}_k^{ew} d\Omega \quad (24)$$

- macierz sztywności ES

$$\begin{aligned} \underline{K}_{ik}^e = & D^e \iint_{\Omega^e} \left( \frac{\partial \underline{\Phi}_i^{e\varphi_x}}{\partial x} \right)^T \left( \frac{\partial \underline{\Phi}_k^{e\varphi_x}}{\partial x} + \nu^e \frac{\partial \underline{\Phi}_k^{e\varphi_y}}{\partial y} \right) d\Omega + \\ & + D^e (1 - \nu^e) \iint_{\Omega^e} \left( \frac{\partial \underline{\Phi}_i^{e\varphi_x}}{\partial x} \right)^T \left( \frac{\partial \underline{\Phi}_k^{e\varphi_x}}{\partial y} + \frac{\partial \underline{\Phi}_k^{e\varphi_y}}{\partial x} \right) d\Omega + \\ & + D^e (1 - \nu^e) \iint_{\Omega^e} \left( \frac{\partial \underline{\Phi}_i^{e\varphi_x}}{\partial y} \right)^T \left( \frac{\partial \underline{\Phi}_k^{e\varphi_x}}{\partial y} + \frac{\partial \underline{\Phi}_k^{e\varphi_y}}{\partial x} \right) d\Omega + \\ & + D^e \iint_{\Omega^e} \left( \frac{\partial \underline{\Phi}_i^{e\varphi_y}}{\partial y} \right)^T \left( \nu^e \frac{\partial \underline{\Phi}_k^{e\varphi_x}}{\partial x} + \frac{\partial \underline{\Phi}_k^{e\varphi_y}}{\partial y} \right) d\Omega \end{aligned} \quad (25)$$

- wektor obciążeń węzłowych ES

$$\underline{F}_i^e = \iint_{\Omega^e} \left( \underline{\Phi}_i^{ew} \right)^T q d\Omega \quad (26)$$

- macierze charakteryzujące geometrię ES

$$\underline{W}_{ik}^e = \iint_{\Omega^e} \left( \underline{\Phi}_i^{ew} \right)^T \tilde{\underline{\Phi}}_k^e d\Omega, \quad \underline{V}_{ik}^e = \iint_{\Omega^e} \left( \underline{\Phi}_i^{ew} \right)^T \underline{\Phi}_k^{ew} d\Omega^e \quad (27)$$



– wektory odpowiednio przemieszczeń i sił ES w węzle  $i$

$$\underline{x}_i^e = [w_i^e, \varphi_{xi}^e, \varphi_{yi}^e]^T, \quad \underline{y}_i^e = [y_i^e, m_i^{ex}, m_i^{ey}]^T \quad (28)$$

Równania sprzężone (23) można zapisać w formie zintegrowanej:

$$\underline{M} \underline{\ddot{x}} + \underline{C} \underline{\dot{x}} + \underline{K} \underline{x} = \underline{P} \quad (29)$$

gdzie:

$$\underline{M} = \begin{bmatrix} \underline{M} & \underline{0} \\ -\underline{\beta}_2 \underline{V} & \underline{\alpha}_2 \underline{W} \end{bmatrix}, \quad \underline{C} = \begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{0} \\ -\underline{\beta}_1 \underline{V} & \underline{\alpha}_1 \underline{W} \end{bmatrix}, \quad \underline{K} = \begin{bmatrix} \underline{K} & \underline{W} \\ -\underline{\beta}_0 \underline{V} & \underline{\alpha}_0 \underline{W} \end{bmatrix} \quad (30)$$

$$\underline{P} = \begin{bmatrix} \underline{F} \\ \underline{0} \end{bmatrix}, \quad \underline{x} = \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{y} \end{bmatrix}, \quad \underline{\dot{x}} = \begin{bmatrix} \underline{\dot{x}} \\ \underline{\dot{y}} \end{bmatrix}, \quad \underline{\ddot{x}} = \begin{bmatrix} \underline{\ddot{x}} \\ \underline{\ddot{y}} \end{bmatrix}$$

Jest to układ równań różniczkowych zwyczajnych względem czasu. Do jednoznacznego rozwiązania tego układu potrzebne są warunki początkowe (3), (11), (13).

### Zastosowanie metody Zienkiewicza-Wooda (SSpj)

Do rozwiązania układu równań różniczkowych zwyczajnych, niejednorodnych (29) stosuje się numeryczną metodę całkowania bezpośredniego Zienkiewicza-Wooda (SSpj). Przy zastosowaniu metod numerycznych układ równań różniczkowych przekształca się w warstwowe układy równań algebraicznych, co przy znanych warunkach początkowych zawsze prowadzi do procedury rekurencyjnej. W metodzie SSpj parametr  $j$  oznacza rząd równania różniczkowego, a  $p \geq j$  – liczbę wyrazów rozwinięcia funkcji w szereg potęgowy, w rozważanym przypadku  $\underline{x} = \underline{x}(t)$ . Na przykład, jeżeli zastosujemy wariant metody SS22, to wzory rekurencyjne mają następującą postać [Zienkiewicz i in. 1984, Podhorecki 1997]:

$$\begin{aligned} \underline{\alpha}^i &= [\underline{M} + \Delta t \underline{\Theta}_1 \underline{C} + \frac{1}{2} (\Delta t)^2 \underline{\Theta}_2 \underline{K}]^{-1} [\underline{\Theta}_1 \underline{x}^{i+1} + (1 - \underline{\Theta}_1) \underline{x}^i - \underline{C} \underline{\dot{x}}^i - \underline{K} (\underline{x}^i + \Delta t \underline{\Theta}_1 \underline{\dot{x}}^i)] \\ \underline{x}^{i+1} &= \underline{x}^i + \Delta t \underline{\dot{x}}^i + \frac{1}{2} (\Delta t)^2 \underline{\alpha}^i \\ \underline{\dot{x}}^{i+1} &= \underline{\dot{x}}^i + \Delta t \underline{\alpha}^i \end{aligned} \quad (31)$$

$i = 0, 1, 2, \dots, T$ ,  $\Delta t$  – przedział czasu (krok całkowania)

Aby obliczenia rekurencyjne były bezwarunkowo stabilne, to parametry metody  $\underline{\Theta}_i$  muszą spełniać następujące ograniczenia [Zienkiewicz i in. 1984, Podhorecki 1997]:

$$\underline{\Theta}_1 \geq 0,5, \quad \underline{\Theta}_2 \geq \underline{\Theta}_1 \quad (32)$$

Obliczenia rekurencyjne przeprowadza się według następującego schematu:

1.  $i = 0$  (pierwszy krok, procedura startowa).

Znane są warunki początkowe  $\underline{x}^0 = \tilde{x}^0$ ,  $\dot{\underline{x}}^0 = \tilde{\dot{x}}^0$  oraz obciążenia  $\underline{\mathcal{R}}^0, \underline{\mathcal{R}}^1$ . Obliczamy kolejno na podstawie wzorów (31):  $\underline{\alpha}^0, \underline{x}^1, \dot{\underline{x}}^1$ .

2.  $i = 1$  (drugi krok).

Znane są parametry  $\underline{x}^1, \dot{\underline{x}}^1$  obliczone w chwili  $i = 0$  oraz obciążenia  $\underline{\mathcal{R}}^1, \underline{\mathcal{R}}^2$ . Obliczamy kolejno na podstawie wzorów (31):  $\underline{\alpha}^1, \underline{x}^2, \dot{\underline{x}}^2$ .

3.  $i = 2$  (trzeci krok).

Znane są parametry  $\underline{x}^2, \dot{\underline{x}}^2$  obliczone w chwili  $i = 1$  oraz obciążenia  $\underline{\mathcal{R}}^2, \underline{\mathcal{R}}^3$ . Obliczamy kolejno na podstawie wzorów (31):  $\underline{\alpha}^2, \underline{x}^3, \dot{\underline{x}}^3$ .

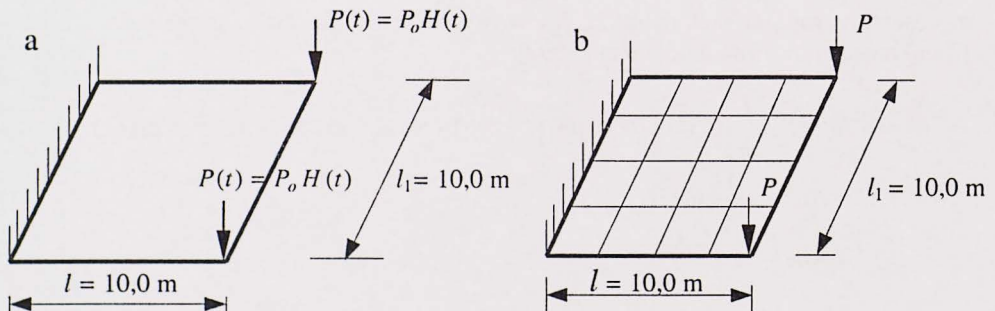
4.  $i = 3$  (czwarty krok).

... itd.

W przypadku występowania więzów jednostronnych, w każdym kroku rekurencyjnym należy dokonać iteracji w celu ustalenia obszaru kontaktu płyta – podłoże.

## PRZYKŁADY OBLICZEŃ

Rozpatrujemy płytę o wymiarach  $l = l_1 = 10$  m i  $h = 1$  m, utwierdzoną na jednym z boków (rys. 4a) i obciążoną w dwóch punktach siłami Heaviside'a  $P(t) = P_o H(t)$ , gdzie:  $P_o = 1000$  N,  $H(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } t \geq 0 \\ 0 & \text{dla } t < 0 \end{cases}$ . Płytę wykonano z betonu zbrojonego o parametrach  $\rho = 25\,000$  kg  $\cdot$  m<sup>-3</sup>,  $E = 30 \cdot 10^9$  Pa,  $\nu = 1/6$ .



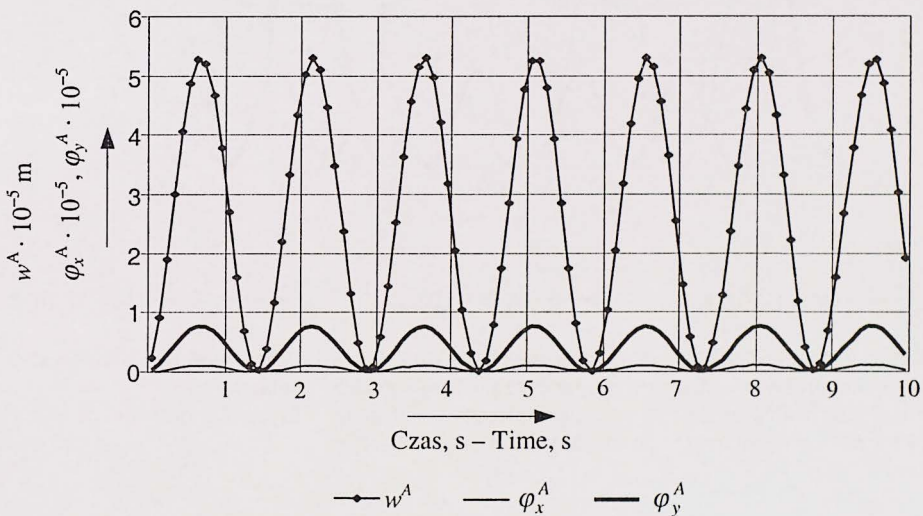
Rys. 4. Płyta rozważana w przykładzie: a – schemat statyczny płyty, b – dyskretyzacja powierzchni środkowej płyty

Fig. 4. A plate considered in the case: a – static scheme of a plate, b – discretisation of central area of a plate

Przyjmujemy podział płyty na 16 elementów skończonych o kształtach prostokątnych i węzłach w narożach (rys. 4a). Płyta będzie rozpatrywana najpierw jako konstrukcja nie spoczywająca na podłożu, a następnie jako oparta kolejno na podłożu o modelu sprężystym Winklera oraz na podłożu lepkosprężystym według modelu Kelvina-Voigta i Zenera. Obliczenia wykonano dla przedziału czasu  $\Delta t = 0,01$  s oraz dla parametrów metody  $\Theta_1 = 0,5$  i  $\Theta_2 = 1,0$ .

### Płyta bez podłoża

Z otrzymanych wyników wybieramy do analizy przemieszczenia punktu A (rys. 5), a na wykresie (rys. 6) pokazano odkształconą postać płyty po 30 jednostkach czasu, czyli dla  $t = 30 \cdot \Delta t = 30 \cdot 0,01 = 0,3$  s.



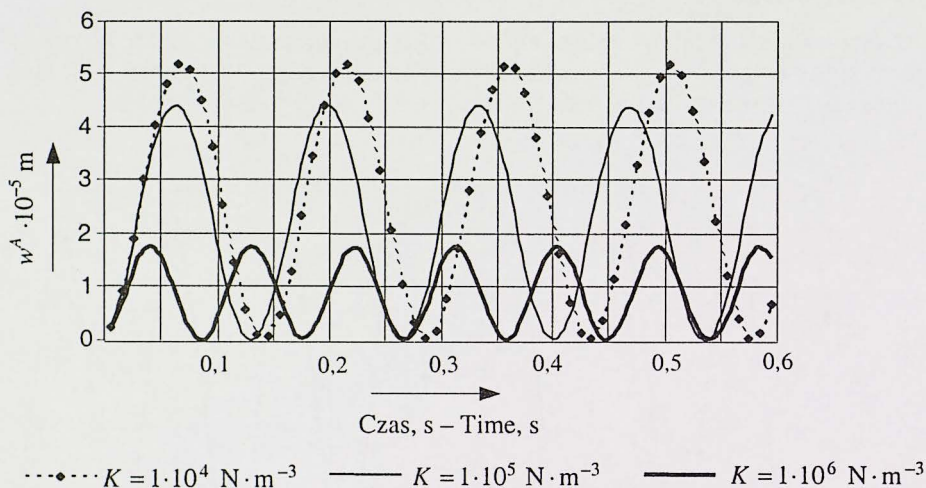
Rys. 5. Zmienność przemieszczeń punktu A płyty w czasie  
Fig. 5. Variability of displacements of plate's point A in time



Rys. 6. Odkształcona postać powierzchni środkowej płyty w chwili  $t = 0,3$  s  
Fig. 6. Deformed form of central area of a plate at time  $t = 0,3$  s

### Płyta oparta na podłożu o modelu Winklera

Z otrzymanych wyników wybieramy do analizy ugięcie punktu A (rys. 7). Przyjmujemy, że wartość współczynnika sprężystości  $K$  narasta od wartości  $K_0 = 0$ , co  $(\Delta K)^i$ , gdzie  $i = 1, 2, \dots, 8$ , aż do wartości  $\beta_0 = K = 3 \cdot 10^8 \text{ N}\cdot\text{m}^{-3}$  ( $\Delta K = 10 \text{ N}\cdot\text{m}^{-3}$ ).



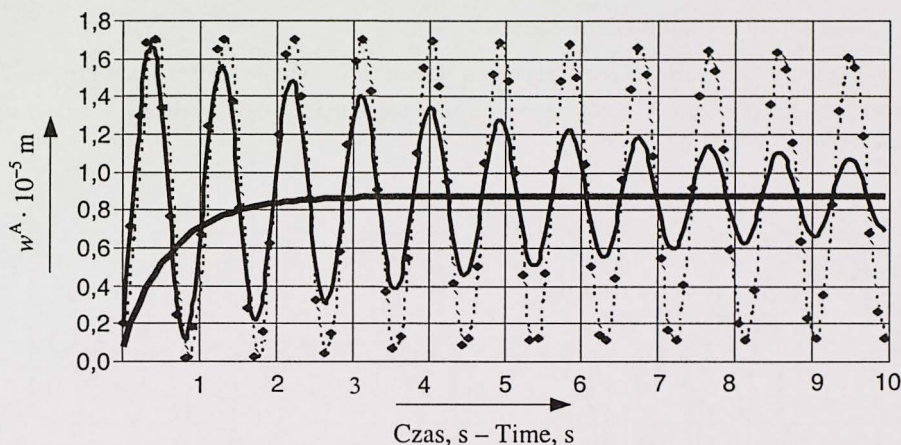
Rys. 7. Zmienność przemieszczeń pionowych punktu A w czasie w zależności od wartości współczynnika sprężystości  $K$  dla płyty opartej na podłożu o modelu Winklera

Fig. 7. Variability in time of vertical displacements of point A depending on value of elasticity factor  $K$  for plate supported on substrate by Winkler model

### Płyta oparta na podłożu o modelu Kelvina-Voigta

Przyjmujemy, że wartość współczynnika lepkości  $\eta$  narasta od wartości  $\eta_0 = 0$ , co  $(\Delta \eta)^i$ , gdzie  $i = 1, 2, \dots, 6$ , aż do wartości  $\beta_1 = \eta = 1 \cdot 10^6 \text{ N}\cdot\text{s}\cdot\text{m}^{-3}$  ( $\Delta \eta = 10 \text{ N}\cdot\text{s}\cdot\text{m}^{-3}$ ) – rysunek 8.

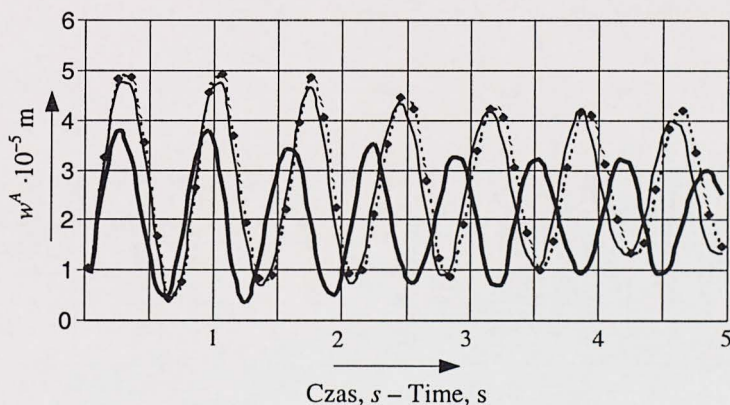
Wartość współczynnika sprężystości podłoża  $K$  zmienia się podobnie jak dla podłoża Winklera (rys. 9).



·····  $\eta = 1 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-3}$     —  $\eta = 1 \cdot 10^4 \text{ N} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-3}$     —  $\eta = 1 \cdot 10^6 \text{ N} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-3}$

Rys. 8. Zmienność przemieszczeń pionowych punktu A w czasie w zależności od wartości współczynnika lepkości  $\eta$  dla płyty opartej na podłożu o modelu Kelvina-Voigta ( $K = 1 \cdot 10^6 \text{ N} \cdot \text{m}^{-3}$ )

Fig. 8. Variability in time of vertical displacements of point A depending on value of viscosity factor  $\eta$  for plate supported on substrate by Kelvin-Voigt model ( $K = 1 \cdot 10^6 \text{ N} \cdot \text{m}^{-3}$ )



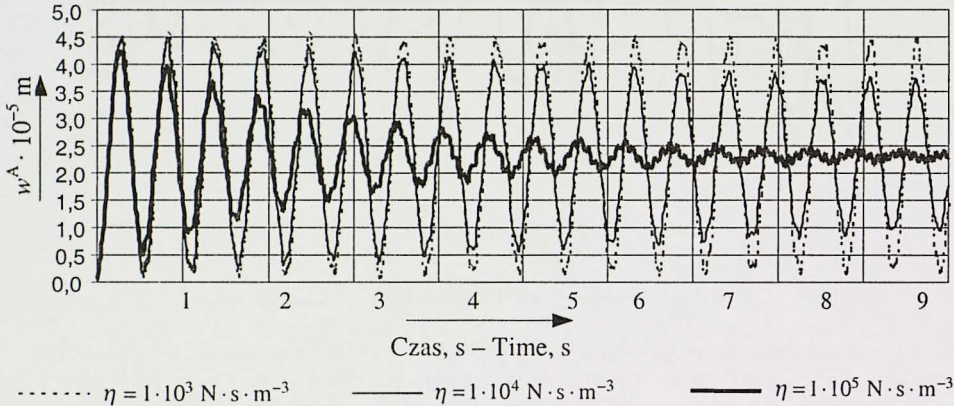
·····  $K = 0,0 \text{ N} \cdot \text{m}^{-3}$     —  $K = 1 \cdot 10^5 \text{ N} \cdot \text{m}^{-3}$     —  $K = 1 \cdot 10^6 \text{ N} \cdot \text{m}^{-3}$

Rys. 9. Zmienność przemieszczeń pionowych punktu A w czasie w zależności od wartości współczynnika sprężystości  $K$  dla płyty opartej na podłożu o modelu Kelvina-Voigta ( $\eta = 1 \cdot 10^4 \text{ N} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-3}$ )

Fig. 9. Variability in time of vertical displacements of point A depending on value of elasticity factor  $K$  for plate supported on substrate by Kelvin-Voigt model ( $\eta = 1 \cdot 10^4 \text{ N} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-3}$ )

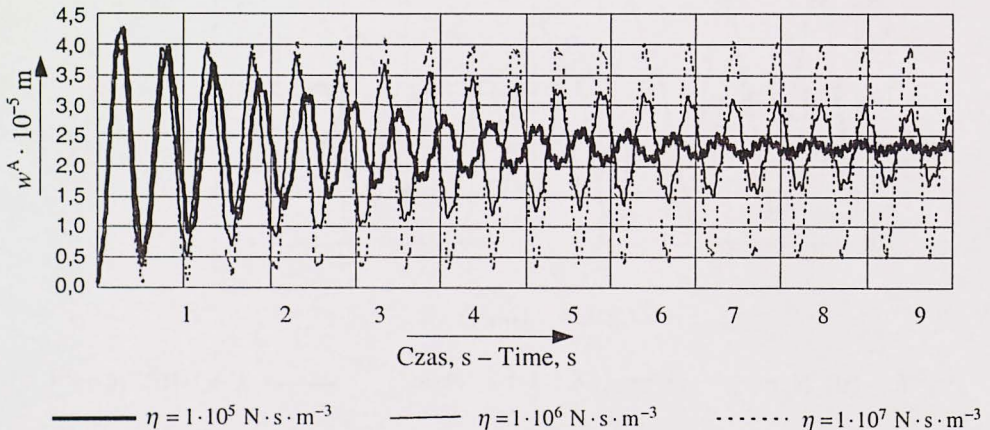
### Płyta oparta na podłożu o modelu Zenera

Przyjmujemy, że wartość współczynnika lepkości  $\eta$  oraz wartości współczynników sprężystości podłoża  $K_1$  i  $K_2$  zmieniają się podobnie jak dla podłoża o modelu Kelvina-Voigta (rys. 10, 11).



Rys. 10. Zmienność przemieszczeń pionowych punktu A w czasie w zależności od wartości współczynnika lepkości  $\eta$  dla płyty opartej na podłożu o modelu Zenera ( $K_1 = K_2 = K = 1 \cdot 10^6 \text{ N} \cdot \text{m}^{-3}$ )

Fig. 10. Variability in time of vertical displacements of point A depending on value of viscosity factor  $\eta$  for plate supported on substrate by Zener model ( $K_1 = K_2 = K = 1 \cdot 10^6 \text{ N} \cdot \text{m}^{-3}$ )



Rys. 11. Zmienność przemieszczeń pionowych punktu A w czasie w zależności od wartości współczynnika lepkości  $\eta$  dla płyty opartej na podłożu o modelu Zenera ( $K_1 = K_2 = K = 1 \cdot 10^6 \text{ N} \cdot \text{m}^{-3}$ )

Fig. 11. Variability in time of vertical displacements of point A depending on value of viscosity factor  $\eta$  for plate supported on substrate by Zener model ( $K_1 = K_2 = K = 1 \cdot 10^6 \text{ N} \cdot \text{m}^{-3}$ )

## WNIOSKI

1. Nadrzędnym celem przedstawionej pracy było skonstruowanie efektywnego rozwiązania problemu współdziałania płyty z dowolnym podłożem lepkosprężystym w przypadku obciążenia zmieniającego się w czasie i przestrzeni. Ważnym elementem pracy jest zapisanie związku między reakcją podłoża a przemieszczeniami dla modeli lepkosprężystych za pomocą jednego równania różniczkowego oraz opracowanie algorytmu do obliczeń drgań płyt opartych na dość dowolnie wymodelowanym podłożu lepkosprężystym. Wykorzystano kombinację dwóch metod: metody elementów skończonych (MES) i metody Zienkiewicza-Wooda (SSpj).

2. Wykonane obliczenia numeryczne, mające charakter ilustracyjny, potwierdziły tezę pracy i skuteczność zastosowanego podejścia. Uzyskane rozwiązania numeryczne pod względem jakościowym nie są sprzeczne z przewidywanymi wynikami, jednak wobec najczęściej braku podobnych przykładów w literaturze nie można było sprawdzić ich pełnej dokładności. Zastosowana metoda całkowania w czasie okazała się skuteczna, jednak aby podać bezwzględne wskaźniki dotyczące na przykład jej dokładności, wyboru stopnia aproksymacji, długości przedziału czasowego należałoby przeprowadzić dalszą analizę.

3. W pracy zaproponowano algorytm pozwalający na rozwiązanie dowolnie ukształtowanej płyty opartej na podłożu lepkosprężystym. Rozwiązanie takiego zadania wymaga danych w postaci wymiarów płyty, cech fizycznych materiału płyty (stałe sprężystości), funkcji rozkładu obciążeń w czasie i przestrzeni, parametrów funkcyjnych podłoża oraz warunków brzegowych i początkowych. Kontynuacja powyższej tematyki może stanowić kierunek dalszych badań. Wymaga jednak skojarzenia badań teoretycznych z badaniami doświadczalnymi dotyczącymi parametrów podłoża, na przykład gruntowego czy też innego tworzywa konstrukcyjnego (metal, polimer). Identyfikacja powyższych parametrów pozwoli zaproponować model odwzorowujący dane podłoże.

4. Przyjęty w pracy model matematyczny układu konstrukcja (płyta) – podłoże bazuje jeszcze na wielu założeniach upraszczających, które dla określonych wartości definiujących go parametrów mogą prowadzić do nierealistycznego opisu zachowania się układu rzeczywistego. Dalsze ewentualne badania, będące rozszerzeniem dotychczasowych, obejmowałyby bardziej złożone, nieliniowe modele płyt i podłoży oraz dokładniej powinny uwzględniać warunki w obszarze ich kontaktu (tarcie, adhezja). Interesującą kwestią wydaje się ocena wrażliwości rozwiązania na dokładność wyznaczania obszaru kontaktu.

## PIŚMIENNICTWO

- Derski W., Ziemba S., 1968. Analiza modeli reologicznych. PAN IPPT, Warszawa.  
Gryczmański M., 1995. Wprowadzenie do opisu sprężysto-plastycznych modeli gruntów. KILiW PAN, IPPT, Warszawa.  
Kączkowski Z., 1980. Płyty. Obliczenia statyczne. Arkady, Warszawa.

- Olszewska B., Kaczyński R., Matysiak S., 2000. Zastosowanie modelowania matematycznego do opisu mechanicznego zachowania się gruntów o różnych mikrostrukturach. *Gospodarka Surowcami Mineralnymi*, 1b/3, 37–68.
- Podhorecki A., 1997. SSPj Method of Numerical Integration Applied for Solving of Differential Equations of Viscoelastic Medium. XIII Polish Conference of Computer Methods in Mechanics, Poznań, Poland.
- Zienkiewicz O.C., Wood W.L., Hine N.W., 1984. A unified set of single stepp algorithms. *Int. J. Meth. Eng.*, 20, 1529–1552.

## VIBRATIONS OF PLATES ON VISCOELASTIC BASIS

**Abstract:** The subjects of the research are vibrations of thin plates on viscoelastic basis. Differential equations describing vibrations of a thin plate as well as those which describe viscoelastic basis have been solved by two methods: the finite elements method and the method of Zienkiewicz – Wood. In order to illustrate the correctness of proposed methodology of solution, a computer program has been created. The program was used for specific calculations for thin plates on viscoelastic basis and the analysis of the results was performed.

**Key words:** plate, vibrations, viscoelastic basis

*J. Sobczak-Piąstka, A. Podhorecki, Akademia Techniczno-Rolnicza w Bydgoszczy, Wydział Budownictwa i Inżynierii Środowiska, Katedra Mechaniki Budowli, ul. Kaliskiego 7, 85-796 Bydgoszcz  
e-mail: kmb-sekr@mail.atr.bydgoszcz.pl*