

Sylwester SMOLIK

## Opis standardowego roku termicznego dla wybranej miejscowości

### Abstract

**Description of a standard thermal year for a selected locality.** A sum of harmonics has been proposed to identify the hydrological phenomena, the least squares method being used to estimate their parameters. A set of normal equations that has been derived with the brought up simplifications taken into consideration enabled the period of the process under investigation to be determined by means of its recorded values. In situations where the random variable under investigation had been subject to season variation, evidence was given that the estimation of the parameters of harmonics could be very simple. The respective formulae were used to identify the time variation for the monthly-averaged air temperatures in Warsaw (Okęcie) and at Zakopane.

*Key words: Prognosis, temperature, least square method.*

### Wstęp

Zjawiska meteorologiczne, takie jak: rozkład temperatury, opadów, ciśnień itp., na danym obszarze w konkretnym czasie podlegają powszechnie znanym prawom fizyki. Ich zmienność zasadniczą należy wiązać z ruchem postępowym kuli ziemskiej po ekliptyce (zmienia się odległość Ziemi od Słońca) i efektem tego ruchu są znane i powszechnie akcep-

towane pory roku: wiosna, lato, jesień, zima – kategorie wyraźnie odróżnialne pod względem meteorologicznym. Jednocześnie Ziemia podlega ruchowi obrotowemu – efektem wizualnym którego jest dzień i noc. W zależności od położenia obszaru badań na tej kuli oraz nachylenia osi obrotu Ziemi czas ich trwania jest zmienny. W obserwowanym punkcie Ziemi ruch obrotowy powoduje stosunkowo szybkie zakłócenie w odbiorze wszystkich strumieni kosmicznych energii w porównaniu z ruchem postępowym. Jednocześnie pamiętamy o tym, że Ziemia wykonuje te ruchy, będąc w "pie-rzynie" atmosfery, której dokładnej struktury i jej reakcji na bodźce nie znamy. Z pewnością atmosfera reaguje na strumienie energii kosmicznej – mających różną postać – których pomiarów nie wykonuje się rutynowo w skali globalnej. Należy też pamiętać o tym, że już skomplikowane procesy naturalne są zakłócane destrukcyjną działalnością człowieka (efekt cieplarniany atmosfery, regulacje poziomu wody, silna urbanizacja). Dlatego te niewiadome uwzględnimy w składniku losowym modelu. Przypuszcza się, że zjawiska meteorologiczne podlegają okresowości nie tylko sezonowej. Dokład

nie znamy dobrej teorii opisującej te zjawiska w skali globalnej na dłuższy czas, równaniami fizyki robimy to, co możemy – opisujemy procesy wykorzystując do tego celu metody statystyczne. Nie opisują one dobrze stanów ekstremalnych, ponieważ udział ich w nagromadzonym materiale statystycznym jest zwykle mały. W wielu jednak zagadnieniach interesuje nas typowa realizacja badanych zmiennych losowych. Do takich zjawisk należy (między innymi) zmienność średniej temperatury miesięcznej. Dysponujemy długimi ciągami obserwacji tej zmiennej losowej w pewnych miejscowościach. Do opisu i prognozy tego typu procesów przygotowujemy odpowiednią teorię.

### Wyprowadzenie równań normalnych i ich uproszczenia

Mając ciąg punktów empirycznych  $(t, y_t)$  dla  $t = 1, 2, \dots, n$  obrazujących przebieg zjawiska, rozkładamy jego wartości na trzy składowe: tendencję rozwojową  $f_t$ , składnik okresowy  $z_t$  (w szczególności sezonowy) i składnik losowy  $E_t$ . zakładamy przy tym, że są one wynikiem działania niezależnego trzech różnych kompleksów przyczyn.

$$y_t = f_t + z_t + E_t \quad (1)$$

W pierwszej kolejności wyznaczamy trend, może to być np. próba stwierdzenia ocieplania się klimatu w danej miejscowości. Poprawną estymację bardziej skomplikowanych funkcji używanych do tego celu można znaleźć w pracy (Smolik 1989).

Do opisu zmienności okresowej użyjemy sumy harmonik:

$$z_t = y_t - \hat{f}_t - E_t = s + \sum_{r=1}^l A_r \sin(rwt + \Theta_r) - E_t \quad (2)$$

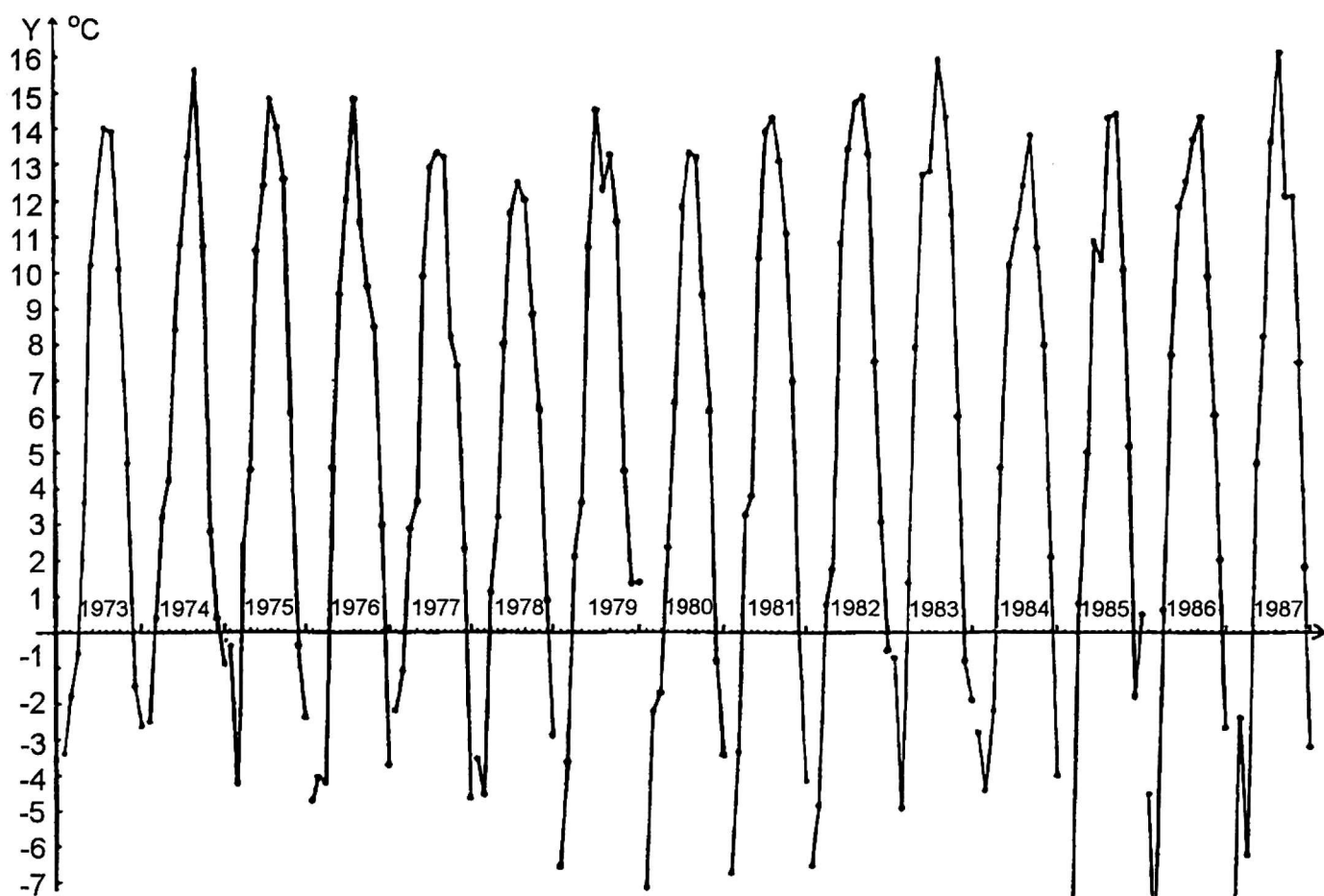
gdzie:

$$w = 2\pi/T \text{ (niech } T \in N)$$

Wprowadzone parametry strukturalne modelu  $s, A_r, w, T, \Theta_r$  odpowiednio nazywamy: położeniem równowagi, amplitudą, pulsacją (prędkością kątową lub częstością kołową), okresem, fazą początkową ruchu harmonicznego. Należy podkreślić, że od początku rozważań zakładamy kompletność szeregu czasowego – nie ma brakujących danych – przy obecnej sprawdzalności nie jest to szczególnie uciążliwa restrykcja. Przyjmujemy też, że okres badanego procesu nie jest znany, chcemy go estymować z danych empirycznych. Obecnie dużo się pisze o okresowości nie tylko sezonowej zjawisk hydrologicznych. Wychodzimy w ten sposób naprzeciw zapotrzebowaniom. Parametry modelu (2) szacujemy klasyczną metodą najmniejszych kwadratów (KMNK). Mamy więc:

$$F(s, A_r, w, T, \Theta_r) = \sum_{t=1}^n [z_t - s - \sum_{r=1}^l A_r \sin(rwt + \Theta_r)]^2 = \min \quad (3)$$

Korzystając z warunku koniecznego ekstremum funkcji  $F$ , po przekształceniach, otrzymujemy układ równań normalnych dla modelu (2):



RYSUNEK 1. Średnie miesięczne temperatury powietrza w Zakopanem

$$\begin{aligned}
 \hat{s} \cdot n &+ \hat{\lambda}_1 \cdot \sum_{t=1}^n \sin(1\hat{\omega}t + \hat{\theta}_1) + \dots + \hat{\lambda}_1 \cdot \sum_{t=1}^n \sin(1\hat{\omega}t + \hat{\theta}_1) = \sum_{t=1}^n z_t \quad (4) \\
 \left\{ \begin{aligned}
 \hat{s} \cdot \sum_{t=1}^n \sin(1\hat{\omega}t + \hat{\theta}_1) + \hat{\lambda}_1 \cdot \sum_{t=1}^n \sin^2(1\hat{\omega}t + \hat{\theta}_1) + \dots + \hat{\lambda}_1 \cdot \sum_{t=1}^n \sin(1\hat{\omega}t + \hat{\theta}_1) \sin(1\hat{\omega}t + \hat{\theta}_1) &= \sum_{t=1}^n z_t \sin(1\hat{\omega}t + \hat{\theta}_1) \\
 \hat{s} \cdot \sum_{t=1}^n \sin(2\hat{\omega}t + \hat{\theta}_2) + \hat{\lambda}_1 \cdot \sum_{t=1}^n \sin(2\hat{\omega}t + \hat{\theta}_2) \sin(1\hat{\omega}t + \hat{\theta}_1) + \dots + \hat{\lambda}_1 \cdot \sum_{t=1}^n \sin(2\hat{\omega}t + \hat{\theta}_2) \sin(1\hat{\omega}t + \hat{\theta}_1) &= \sum_{t=1}^n z_t \sin(2\hat{\omega}t + \hat{\theta}_2) \\
 \vdots &\vdots \\
 \hat{s} \cdot \sum_{t=1}^n \sin(1\hat{\omega}t + \hat{\theta}_1) + \hat{\lambda}_1 \cdot \sum_{t=1}^n \sin(1\hat{\omega}t + \hat{\theta}_1) \sin(1\hat{\omega}t + \hat{\theta}_1) + \dots + \hat{\lambda}_1 \cdot \sum_{t=1}^n \sin^2(1\hat{\omega}t + \hat{\theta}_1) &= \sum_{t=1}^n z_t \sin(1\hat{\omega}t + \hat{\theta}_1)
 \end{aligned} \right. \\
 \left\{ \begin{aligned}
 \hat{s} \cdot \sum_{t=1}^n \cos(1\hat{\omega}t + \hat{\theta}_1) + \hat{\lambda}_1 \cdot \sum_{t=1}^n \cos(1\hat{\omega}t + \hat{\theta}_1) \sin(1\hat{\omega}t + \hat{\theta}_1) + \dots + \hat{\lambda}_1 \cdot \sum_{t=1}^n \cos(1\hat{\omega}t + \hat{\theta}_1) \sin(1\hat{\omega}t + \hat{\theta}_1) &= \sum_{t=1}^n z_t \cos(1\hat{\omega}t + \hat{\theta}_1) \\
 \vdots &\vdots \\
 \hat{s} \cdot \sum_{t=1}^n \cos(1\hat{\omega}t + \hat{\theta}_1) + \hat{\lambda}_1 \cdot \sum_{t=1}^n \cos(1\hat{\omega}t + \hat{\theta}_1) \sin(1\hat{\omega}t + \hat{\theta}_1) + \dots + \hat{\lambda}_1 \cdot \sum_{t=1}^n \cos(1\hat{\omega}t + \hat{\theta}_1) \sin(1\hat{\omega}t + \hat{\theta}_1) &= \sum_{t=1}^n z_t \cos(1\hat{\omega}t + \hat{\theta}_1)
 \end{aligned} \right. \\
 \hat{s} \left[ \hat{\lambda}_1 \cdot \sum_{t=1}^n t \cos(1\hat{\omega}t + \hat{\theta}_1) + 2\hat{\lambda}_2 \cdot \sum_{t=1}^n t \cos(2\hat{\omega}t + \hat{\theta}_2) + \dots + \hat{\lambda}_1 \cdot \sum_{t=1}^n t \cos(1\hat{\omega}t + \hat{\theta}_1) \right] + \hat{\lambda}_1 \left[ \hat{\lambda}_1 \cdot \sum_{t=1}^n t \sin(1\hat{\omega}t + \hat{\theta}_1) \cos(1\hat{\omega}t + \hat{\theta}_1) + \right. \\
 \left. + 2\hat{\lambda}_2 \cdot \sum_{t=1}^n t \cdot \sin(1\hat{\omega}t + \hat{\theta}_1) \cos(2\hat{\omega}t + \hat{\theta}_2) + \dots + \hat{\lambda}_1 \cdot \sum_{t=1}^n t \sin(1\hat{\omega}t + \hat{\theta}_1) \cos(1\hat{\omega}t + \hat{\theta}_1) \right] + \dots + \\
 \left. + \hat{\lambda}_1 \left[ \hat{\lambda}_1 \cdot \sum_{t=1}^n t \cos(1\hat{\omega}t + \hat{\theta}_1) \sin(1\hat{\omega}t + \hat{\theta}_1) + \dots + \hat{\lambda}_1 \cdot \sum_{t=1}^n t \cos(1\hat{\omega}t + \hat{\theta}_1) \sin(1\hat{\omega}t + \hat{\theta}_1) \right] = \hat{\lambda}_1 \cdot \sum_{t=1}^n t z_t \cos(1\hat{\omega}t + \hat{\theta}_1) + \right. \\
 \left. + 2\hat{\lambda}_2 \cdot \sum_{t=1}^n t z_t \cos(2\hat{\omega}t + \hat{\theta}_2) + 3\hat{\lambda}_3 \cdot \sum_{t=1}^n t z_t \cos(3\hat{\omega}t + \hat{\theta}_3) + \dots + \hat{\lambda}_1 \cdot \sum_{t=1}^n t z_t \cos(1\hat{\omega}t + \hat{\theta}_1) \right.
 \end{aligned}$$

Rozwiązanie tego układu rozpoczniemy od przekształceń i uproszczeń występujących w nim sum. Będziemy korzystać ze wzorów indukcyjnych podanych np. w pracy Ryżyk (1964). Uwzględniając z niej 1.342. otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
 \sum_{t=1}^n \sin(kwt + \Theta_k) &= \cos\Theta_k \cdot \sum_{t=1}^n \sin kwt + \sin\Theta_k \cdot \sum_{t=1}^n \cos kwt = \\
 &= \cos\Theta_k \cdot \left( \sin \frac{n+1}{2} kw \cdot \sin \frac{n}{2} kw \cdot \operatorname{cosec} \frac{kw}{2} \right) + \\
 &+ \sin\Theta_k \cdot \left( \cos \frac{n+1}{2} kw \cdot \sin \frac{n}{2} kw \cdot \operatorname{cosec} \frac{kw}{2} \right) = \\
 &= \sin \frac{nkW}{2} \cdot \operatorname{cosec} \frac{kW}{2} \cdot \left( \sin \frac{(n+1)kW}{2} \cdot \cos\Theta_k + \cos \frac{(n+1)kW}{2} \cdot \sin\Theta_k \right) = \\
 &= \sin \frac{nkW}{2} \cdot \operatorname{cosec} \frac{kW}{2} \cdot \sin \left[ \frac{(n+1)kW}{2} + \Theta_k \right] \tag{5}
 \end{aligned}$$

Zauważmy, że gdy  $n = rT$  (tzn. ilość wyrazów szeregu czasowego jest wielokrotnością okresu opisywanego procesu), wtedy

$$\sin \frac{nkW}{2} = \sin \frac{rTk2\pi}{2T} = \sin(rk\pi) = 0 \tag{6}$$

oraz

$$\operatorname{cosec} \frac{kW}{2} = \frac{1}{\sin \frac{k \cdot 2\pi}{2 \cdot T}} = \frac{1}{\sin \frac{k}{T} \cdot \pi} \neq \infty \text{ gdy } k < T/2.$$

Wnioskujemy z tych rozważań, że przy  $n = rT$  i dla  $l < T/2$  obliczane sumy (bo  $k = 1, 2, \dots, l$ ) są równe zero. (7)

Podobnie, korzystając z 1.342 w wymienionej wyżej pracy otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
\sum_{t=1}^n \cos(kwt + \Theta_k) &= \cos\Theta_k \cdot \sum_{t=1}^n \cos ktw - \sin\Theta_k \cdot \sum_{t=1}^n \sin ktw = \\
&= \cos\Theta_k \cdot \left( \cos \frac{n+1}{2} kw \cdot \sin \frac{nkW}{2} \cdot \operatorname{cosec} \frac{kW}{2} \right) + \\
&\quad - \sin\Theta_k \cdot \left( \sin \frac{n+1}{2} kW \cdot \sin \frac{nkW}{2} \cdot \operatorname{cosec} \frac{kW}{2} \right) = \\
&= \sin \frac{nkW}{2} \cdot \operatorname{cosec} \frac{kW}{2} \cdot \left( \cos \frac{(n+1)kW}{2} \cos\Theta_k - \sin \frac{(n+1)kW}{2} \sin\Theta_k \right) = \\
&= \sin \frac{nkW}{2} \cdot \operatorname{cosec} \frac{kW}{2} \cdot \cos \left( \frac{(n+1)kW}{2} + \Theta_k \right) \tag{8}
\end{aligned}$$

Sumy tego typu przy restrzykcjach z (7) są również równe zero.

$$\begin{aligned}
S_1 &= \sum_{t=1}^n \sin(kwt + \Theta_k) \cdot \cos(rwt + \Theta_r) = \frac{1}{2} \sum_{t=1}^n \sin[(k+r)wt + (\Theta_k + \Theta_r)] + \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{t=1}^n \sin[(k-r)wt + (\Theta_k - \Theta_r)] = \frac{1}{2} \cos(\Theta_k + \Theta_r) \cdot \sum_{t=1}^n \sin(k+r)wt + \frac{1}{2} \sin(\Theta_k + \Theta_r) \cdot \\
&\quad \cdot \sum_{t=1}^n \cos(k+r)wt + \frac{1}{2} \cos(\Theta_k - \Theta_r) \cdot \sum_{t=1}^n \sin(k-r)wt + \frac{1}{2} \sin(\Theta_k - \Theta_r) \cdot \sum_{t=1}^n \cos(k-r)wt. \tag{9}
\end{aligned}$$

Korzystając ze wzoru 1.342, otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
S_1 &= \frac{1}{2} \cos(\Theta_k + \Theta_r) \cdot \sin \frac{(n+1)w(k+r)}{2} \cdot \sin \frac{nw(k+r)}{2} \cdot \operatorname{cosec} \frac{w(k+r)}{2} + \\
&\quad + \frac{1}{2} \sin(\Theta_k + \Theta_r) \cdot \cos \frac{(n+1)w(k+r)}{2} \cdot \sin \frac{nw(k+r)}{2} \cdot \operatorname{cosec} \frac{w(k+r)}{2} + \\
&\quad + \frac{1}{2} \cos(\Theta_k - \Theta_r) \cdot \sin \frac{(n+1)w(k-r)}{2} \cdot \sin \frac{nw(k-r)}{2} \cdot \operatorname{cosec} \frac{w(k-r)}{2} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \sin(\Theta_k - \Theta_r) \cdot \cos \frac{(n+1)w(k-r)}{2} \cdot \sin \frac{nw(k-r)}{2} \cdot \operatorname{cosec} \frac{w(k-r)}{2} = \\
& = \frac{1}{2} \sin \frac{nw(k+r)}{2} \cdot \operatorname{cosec} \frac{w(k+r)}{2} \cdot \sin \left[ \frac{(n+1)w(k+r)}{2} + (\Theta_k + \Theta_r) \right] + \\
& + \frac{1}{2} \sin \frac{nw(k-r)}{2} \cdot \operatorname{cosec} \frac{w(k-r)}{2} \cdot \sin \left[ \frac{(n+1)w(k-r)}{2} + (\Theta_k - \Theta_r) \right].
\end{aligned}$$

Gdy  $n = mT$  – tzn. liczebność punktów empirycznych jest całkowitą wielokrotnością okresu badanego procesu ( $k, r$  są liczbami naturalnymi) wtedy:

$$\sin \frac{nw(k+r)}{2} = \sin \frac{mwT(k+r)}{2} = \sin(k+r)m\pi = 0 \quad \text{podobnie} \quad \sin \frac{nw(k-r)}{2} = 0.$$

Jeśli ponadto  $k < T/2$  i  $r < T/2$  i  $k \neq r$  to:

$$\sin \frac{w(k+r)}{2} = 0 \quad \text{oraz} \quad \sin \frac{w(k-r)}{2} \neq 0.$$

Dlatego przy wprowadzonych restrykcjach sumy postaci  $S_1$  są równe zero. Przy  $k = r$  otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
\sum_{t=1}^n \sin(rwt + \Theta_r) \cos(rwt + \Theta_r) &= \frac{1}{2} \sum_{t=1}^n \sin(2rwt + 2\Theta_r) = \frac{1}{2} \cos 2\Theta_r \cdot \sum_{t=1}^n \sin 2rwt + \\
& + \frac{1}{2} \sin 2\Theta_r \cdot \sum_{t=1}^n \cos 2rwt = \frac{1}{2} \sin nrw \cdot \sin[(n+1)rw + 2\Theta_r] \cdot \operatorname{cosec} rw = 0. \quad (10)
\end{aligned}$$

Udowodniono, że przy  $n = mT$  i  $k, r < T/2$  suma  $S_1 = 0$ .

$$\begin{aligned}
S_2 &= \sum_{t=1}^n \sin(kwt + \Theta_k) \cdot \sin(rwt + \Theta_r) = \frac{1}{2} \sum_{t=1}^n \cos[(k-r)wt + (\Theta_k - \Theta_r)] + \\
& - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^n \cos[(k+r)wt + (\Theta_k + \Theta_r)] = \frac{1}{2} \cos(\Theta_k - \Theta_r) \cdot \sum_{t=1}^n \cos(k-r)wt - \frac{1}{2} \sin(\Theta_k - \Theta_r).
\end{aligned}$$

$$\sum_{t=1}^n \sin(k-r)wt - \frac{1}{2} \cos(\Theta_k + \Theta_r) \cdot \sum_{t=1}^n \cos(k+r)wt + \frac{1}{2} \sin(\Theta_k + \Theta_r) \cdot \sum_{t=1}^n \sin(k+r)wt.$$

Korzystając ze wzoru 1.342, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} S_2 &= \frac{1}{2} \cos(\Theta_k - \Theta_r) \cdot \cos \frac{(n+1)(k-r)w}{2} \cdot \sin \frac{n(k-r)w}{2} \cdot \operatorname{cosec} \frac{(k-r)w}{2} + \\ &- \frac{1}{2} \sin(\Theta_k - \Theta_r) \cdot \sin \frac{(n+1)(k-r)w}{2} \cdot \sin \frac{n(k-r)w}{2} \cdot \operatorname{cosec} \frac{(k-r)w}{2} + \\ &+ \frac{1}{2} \cos(\Theta_k + \Theta_r) \cdot \cos \frac{(n+1)(k+r)w}{2} \cdot \sin \frac{n(k+r)w}{2} \cdot \operatorname{cosec} \frac{(k+r)w}{2} + \\ &+ \frac{1}{2} \sin(\Theta_k + \Theta_r) \cdot \sin \frac{(n+1)(k+r)w}{2} \cdot \sin \frac{n(k+r)w}{2} \cdot \operatorname{cosec} \frac{(k+r)w}{2} = \\ &= \frac{1}{2} \sin \frac{n(k-r)w}{2} \cdot \operatorname{cosec} \frac{(k-r)w}{2} \cdot \cos \left[ \frac{(n+1)(k-r)w}{2} + (\Theta_k - \Theta_r) \right] + \\ &- \frac{1}{2} \sin \frac{n(k+r)w}{2} \cdot \operatorname{cosec} \frac{(k+r)w}{2} \cdot \cos \left[ \frac{(n+1)(k+r)w}{2} + (\Theta_k + \Theta_r) \right]. \end{aligned} \quad (11)$$

Gdy  $n = mT$  – tzn. liczebność kolejnych obserwacji jest całkowitą wielokrotnością okresu badanego procesu ( $k, r$  są liczbami naturalnymi) oraz  $k \neq r$ , wtedy:

$$\sin \frac{nw(k-r)}{2} = \sin \frac{mwT(k-r)}{2} = \sin m(k-r)\pi = 0, \text{ oraz } \sin \frac{nw(k+r)}{2} = 0.$$

Jeśli ponadto  $k < T/2$  i  $r < T/2$  to:

$$\sin \frac{(k-r)w}{2} \neq 0 \text{ i } \sin \frac{(k+r)w}{2} \neq 0.$$

Udowodniono więc, że przy wprowadzonych założeniach  $S_2 = 0$ . Przy  $k = r$  mamy:

$$\begin{aligned}
S_2 &= \sum_{t=1}^n \sin^2(rwt + \Theta_r) = \sum_{t=1}^n \frac{1 - \cos(2rwt + \Theta_r)}{2} = \frac{n}{2} - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^n \cos(2rwt + \Theta_r) = \\
&= \frac{n}{2} - \frac{1}{2} (\cos 2\Theta_r \cdot \sum_{t=1}^n \cos 2rwt - \sin 2\Theta_r \cdot \sum_{t=1}^n \sin 2rwt) = \\
&= \frac{n}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{sinn}rw \cdot \operatorname{cosec}rw \cdot \cos[(n+1)rw + 2\Theta_r] = \frac{n}{2}.
\end{aligned}$$

Udowodniono, że przy  $n = mT$  i  $k, r < T/2$  suma

$$S_2 = \begin{cases} 0 & \text{dla } k \neq r \\ n/2 & \text{dla } k = r \end{cases} \quad (12)$$

Korzystając z (7), (9), (10) i (12), przy znanym okresie  $T$  procesu, układ równań (4) przyjmuje postać:

$$\hat{s} \cdot n + \hat{A}_1 \cdot 0 + \hat{A}_2 \cdot 0 + \hat{A}_3 \cdot 0 + \dots + \hat{A}_l \cdot 0 = \sum_{t=1}^n z_t$$

$$\hat{s} \cdot 0 + \hat{A}_1 \cdot 0 + \hat{A}_2 \cdot 0 + \hat{A}_3 \cdot 0 + \dots + \hat{A}_l \cdot 0 = \cos \hat{\Theta}_1 \cdot \sum_{t=1}^n z_t \cos 1\hat{w}t - \sin \hat{\Theta}_1 \cdot \sum_{t=1}^n z_t \sin 1\hat{w}t$$

$$\hat{s} \cdot 0 + \hat{A}_1 \cdot 0 + \hat{A}_2 \cdot 0 + \hat{A}_3 \cdot 0 + \dots + \hat{A}_l \cdot 0 = \cos \hat{\Theta}_2 \cdot \sum_{t=1}^n z_t \cos 2\hat{w}t - \sin \hat{\Theta}_2 \cdot \sum_{t=1}^n z_t \sin 2\hat{w}t$$

$$\hat{s} \cdot 0 + \hat{A}_1 \cdot 0 + \hat{A}_2 \cdot 0 + \hat{A}_3 \cdot 0 + \dots + \hat{A}_l \cdot 0 = \cos \hat{\Theta}_1 \cdot \sum_{t=1}^n z_t \cos l\hat{w}t - \sin \hat{\Theta}_1 \cdot \sum_{t=1}^n z_t \sin l\hat{w}t$$

⋮  
⋮

$$\hat{s} \cdot 0 + \hat{A}_1 \cdot \frac{n}{2} + \hat{A}_2 \cdot 0 + \hat{A}_3 \cdot 0 + \dots + \hat{A}_l \cdot 0 = \cos \hat{\Theta}_1 \cdot \sum_{t=1}^n z_t \cos 1\hat{w}t - \sin \hat{\Theta}_1 \cdot \sum_{t=1}^n z_t \sin 1\hat{w}t$$



$$\begin{aligned}
\hat{s} \cdot 0 + \hat{A}_1 \cdot 0 + \hat{A}_2 \cdot \frac{n}{2} + \hat{A}_3 \cdot 0 + \dots + \hat{A}_l \cdot 0 &= \cos \hat{\Theta}_2 \cdot \sum_{t=1}^n z_t \cos 2\hat{\omega}t - \sin \hat{\Theta}_2 \cdot \sum_{t=1}^n z_t \sin 2\hat{\omega}t \\
\cdot & \\
\cdot & \\
\hat{s} \cdot 0 + \hat{A}_1 \cdot 0 + \hat{A}_2 \cdot 0 + \hat{A}_3 \cdot 0 + \dots + \hat{A}_l \cdot \frac{n}{2} &= \cos \hat{\Theta}_l \cdot \sum_{t=1}^n z_t \cos l\hat{\omega}t - \sin \hat{\Theta}_l \cdot \sum_{t=1}^n z_t \sin l\hat{\omega}t
\end{aligned} \tag{13}$$

Jeżeli dysponujemy kolejnymi punktami empirycznymi  $(t, z_t)$ , gdzie  $t = 1, 2, \dots, n$ ; oraz  $n = mT$  – tzn. liczebność punktów empirycznych jest całkowitą wielokrotnością okresu badanego procesu, wtedy dla  $l < T/2$  otrzymujemy oszacowanie MNK parametrów wprowadzonej funkcji:

$$\hat{s} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n z_t \quad \text{dla } r = 1, 2, \dots, l < T/2 \tag{14}$$

$$\hat{\Theta}_r = \arctg \left( \frac{\sum_{t=1}^n z_t \cos r\hat{\omega}t}{\sum_{t=1}^n z_t \sin r\hat{\omega}t} \right)$$

$$\hat{A}_r = \frac{n}{2} \left( \cos \hat{\Theta}_r \cdot \sum_{t=1}^n z_t \sin r\hat{\omega}t + \sin \hat{\Theta}_r \cdot \sum_{t=1}^n z_t \cos r\hat{\omega}t \right)$$

Opis standardowego roku termicznego dla Zakopanego i Warszawy

W tablicy 1 zamieszczono średnie miesięczne temperatury powietrza w Zakopanem. Na rysunku 1 przedstawiono ich obraz, który autorowi sugerował model matematyczny opisywanego zjawiska. Wykorzystując dane z lat 1979–1982, wyznaczono formalnie regresję liniową i stwierdzono, że jest nieistotna przy  $\alpha = 0,10$ . Następnie obliczono:

$$\sum_{t=1}^{48} z_t = 243,8; \quad \sum_{t=1}^n z_t \cos \frac{\pi}{6} t = -188,009;$$

$$\sum_{t=1}^n z_t \sin \frac{\pi}{6} t = -135,181.$$

Korzystając z wzorów (14), słusznych przy opisie zmienności sezonowej ( $T = 12$ ,  $\hat{w} = \frac{\pi}{6}$ ,  $12/48$ ) po zaokrągleniach otrzymujemy średnią temperaturę ( $w^\circ\text{C}$ ) dla Zakopanego:

$$\hat{z}_t = 5,08 - 9,65 \cdot \sin\left(\frac{\pi t}{6} + 0,947\right), \text{ gdzie}$$

$t = 1 \equiv \text{I } 1979 \text{ r.}$

Wzór ten nie tylko dobrze pasuje w przedziale aproksymacji, ale i poza nim. Dlatego proponuję nazwać go standardowym rokiem termicznym dla Zakopanego. Na rysunku 2 zamieszczono jego wykres i miary dopasowania do danych empirycznych. Podobnie znajdujemy opis zmienności średniej temperatury dla Warszawy. Na podstawie danych z lat 1979–1982, zamieszczonych w tablicy 2, obliczamy:

$$\sum_{t=1}^n w_t = 361;$$

$$\sum_{t=1}^n w_t \cos \frac{\pi t}{6} = -216,369;$$

$$\sum_{t=1}^n w_t \sin \frac{\pi t}{6} = -144,876.$$

Korzystając ze wzorów (14) dla zmienności sezonowej, opisujemy średnią temperaturę ( $w^\circ\text{C}$ ) dla Warszawy:

$$\hat{w}_t = 7,52 - 10,61 \cdot \sin\left(\frac{\pi t}{6} + 1,189\right),$$

gdzie  $t = 1 \equiv \text{I } 1979 \text{ r.}$

Na rysunku 2 zamieszczono jej wykres i miary dopasowania w przedziale aproksymacji.

## Literatura

- BOX G.E.P., JENKINS G.M. 1983: *Analiza szeregów czasowych. Prognoza i sterowanie*. PWN, Warszawa.
- GUTRY-KORYCKA M., BORYCZKA J. 1990: *Długookresowe zmiany elementów bilansu wodnego w Polsce i w zlewisku Bałtyku*. Przegląd Geofizyczny, XXXV; 3–4.
- RYŻYK J.M., GRADSZTEJN J.S. 1964: *Tablice całek, sum, szeregów i iloczynów*. PWN, Warszawa.
- SMOLIK S. 1989: *Użyteczność modelu tendencji rozwojowej w prognozie rolniczej*. Biul. Inform. Akademii Rolniczo-Technicznej w Olsztynie, 27.
- SMOLIK S. 1995: *Opis standardowego roku opadowego wybranej miejscowości*. Mat. na symp. nauk.: Monitorowanie i modelowanie procesów hydrologicznych w zmieniającym się środowisku.

TABLICA 1. Średnie miesięczne temperatury powietrza w Zakopanem w latach 1973–1987 (°C)

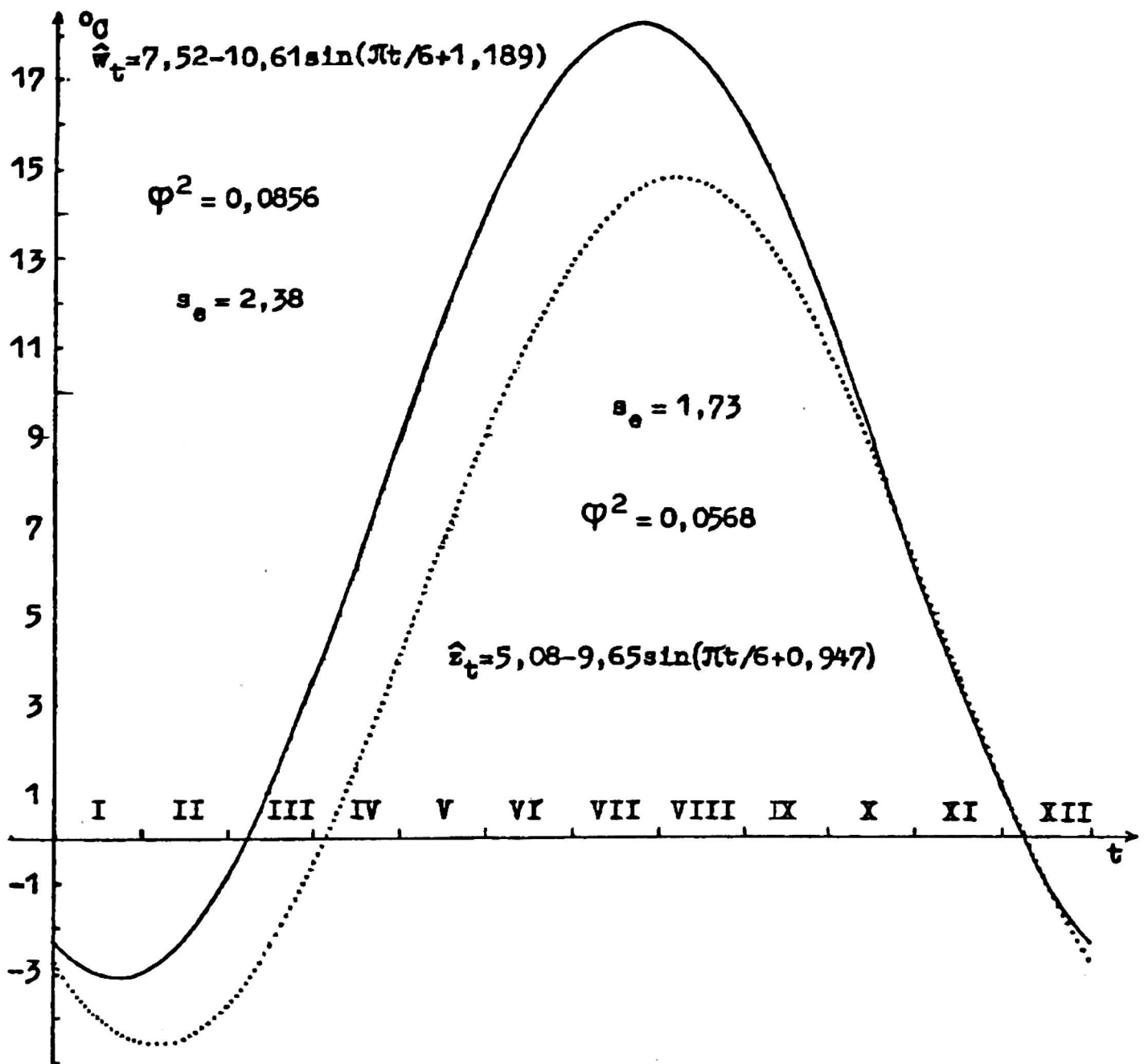
Lata	Miesiąc											
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
1973	-3,4	-1,8	-0,6	3,6	10,2	12,2	14,0	13,9	10,1	4,7	-1,5	-2,6
1974	-2,5	0,4	3,2	4,2	8,4	10,8	13,2	15,6	10,7	2,8	0,4	-0,9
1975	-0,4	-4,2	2,4	4,5	10,6	12,4	14,8	14,0	12,6	6,1	-0,4	-2,4
1976	-4,7	-4,0	-4,2	4,6	9,4	12,0	14,8	11,4	9,6	8,5	3,0	-3,7
1977	-2,2	-1,1	2,9	3,6	9,9	12,9	13,3	13,2	8,2	7,4	2,3	-4,6
1978	-3,5	-4,5	1,1	3,2	8,0	11,6	12,5	12,0	8,8	6,2	0,9	-2,9
1979	-6,5	-3,6	2,1	3,6	10,7	14,5	12,3	13,2	11,4	4,5	1,4	1,4
1980	-7,1	-2,2	-1,7	2,4	6,4	11,8	13,3	13,2	9,4	6,2	-0,8	-3,4
1981	-6,7	-3,3	3,3	3,8	10,4	13,9	14,3	13,1	11,1	7,0	0,0	-4,1
1982	-6,5	-4,8	0,8	1,8	10,8	13,4	14,7	14,9	13,3	7,5	3,1	-0,5
1983	-0,7	-4,9	1,4	7,9	12,7	12,8	15,9	14,3	11,6	6,0	-0,8	-1,9
1984	-2,8	-4,4	-2,2	4,6	10,2	11,2	12,4	13,8	10,7	8,0	2,1	-4,0
1985	-9,2	-9,3	0,8	5,0	10,9	10,3	14,3	14,4	10,1	5,2	-1,8	0,5
1986	-4,5	-9,1	0,6	7,7	11,8	12,5	13,7	14,3	9,9	6,0	2,0	-2,7
1987	-10,0	-2,4	-6,2	4,7	8,2	13,6	16,1	12,1	12,1	7,5	1,8	-3,2

Źródło: Rocznik Statystyczny z lat 1974–1989; opracowanie własne.

TABLICA 2. Średnie miesięczne temperatury powietrza w Warszawie – Okęciu (°C) w latach 1973–1987

Rok	Miesiąc												Suma
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	
1973	-2,8	1,3	3,9	7,0	13,0	16,4	18,2	17,8	12,8	6,2	1,4	-0,8	94,4
1974	-1,2	2,1	4,6	7,3	11,3	14,7	15,8	18,1	13,4	6,6	3,4	2,3	98,4
1975	2,6	-0,6	4,5	7,0	15,0	16,5	19,6	18,9	15,6	8,0	1,5	0,7	109,3
1976	-2,5	-4,2	-0,9	7,9	12,2	15,2	18,8	15,8	13,1	6,9	4,6	-1,2	85,7
1977	-1,9	0,1	5,4	6,4	12,7	17,5	16,3	16,1	11,2	9,0	5,2	-0,8	97,2
1978	-1,4	-4,5	3,2	6,4	12,2	15,5	16,2	15,9	11,1	8,5	5,1	-4,1	84,1
1979	-6,2	-5,9	1,7	6,8	14,7	19,8	15,0	16,8	13,6	6,0	2,9	1,4	86,6
1980	-6,3	-1,6	-0,4	6,6	9,9	15,6	16,6	16,5	12,6	8,3	1,9	-0,7	79,0
1981	-3,3	-0,9	3,9	5,9	14,1	17,0	18,0	16,6	14,0	8,8	3,4	-3,6	93,9
1982	-3,6	-2,0	3,5	5,6	14,2	15,8	19,2	19,3	15,1	8,7	4,6	1,1	101,5
1983	3,2	-2,6	4,0	9,7	15,6	17,0	19,4	18,5	14,6	8,7	2,0	-0,8	109,3
1984	0,2	-1,7	1,1	9,1	13,6	14,4	15,7	18,0	13,3	10,3	2,1	-1,3	94,8
1985	-8,2	-9,2	2,0	8,4	15,2	14,8	17,3	18,0	12,2	8,0	0,7	1,6	80,8
1986	-1,5	-9,6	1,9	8,9	14,7	16,8	17,8	17,3	11,2	8,0	5,1	-0,3	90,3
1987	-12,3	-0,9	-2,2	7,1	12,1	15,8	17,9	15,2	12,8	8,5	4,0	0,8	78,8

Źródło: Rocznik Statystyczny z lat 1974–1988; opracowanie własne.



RYSUNEK 2. Standardowy rok termiczny w Warszawie i Zakopanem ( $\hat{z}_t$ )

**Adres autora**

S. Smolik

Katedra Zastosowań Matematyki SGGW

02-787 Warszawa, ul Nowoursynowska 166