CHRIS J. CIESZEWSKI, MICHAŁ ZASADA

Uniwersalna Metoda Różnic Algebraicznych: uogólnione wyprowadzanie dynamicznych równań bonitacyjnych opartych na teoriach biologicznych

Generalized Method of Algebraic Differences deriving dynamic site index equations based on biological theories

Abstract: The presented methodology is generally applicable to modelling various relationships between two observable and one unobservable variables, whereby the unobservable variable can be substituted by initial conditions of the two observable variables thus leading to derivation of self-referencing dynamic equations. The most common example of such models in the West, in particular the USA, are site-dependent height-age models, called also site index models, or site models. The presented here method is equally useful for deriving new equations as it is for improving existing models based on traditional use of fixed base ages. This method, called the Generalized Algebraic Difference Approach, was originally introduced by Cieszewski (1994, Development of a variable density height-growth-model through defining multidimensional height growth spaces. PhD thesis. University of Alberta, Edmonton, Canada) and subsequently published by Cieszewski and Bailey (2000, Generalized Algebraic Difference Approach: A New Methodology for Derivation of Biologically Based Dynamic Site Equations. For. Sci. 46:116-126). The method can be used effectively to derive truly base-age invariant dynamic equations capable of describing concurrent polymorphism and variable asymptotes. The equations derived with it can be extremely flexible and may generate intricate patterns of concurrent polymorphism and variable asymptotes. Their parameters can be estimated using the same methods as for all other fixed base-age site index models.

Key Words: site index; base-age invariance; dynamic equations.

Wprowadzenie

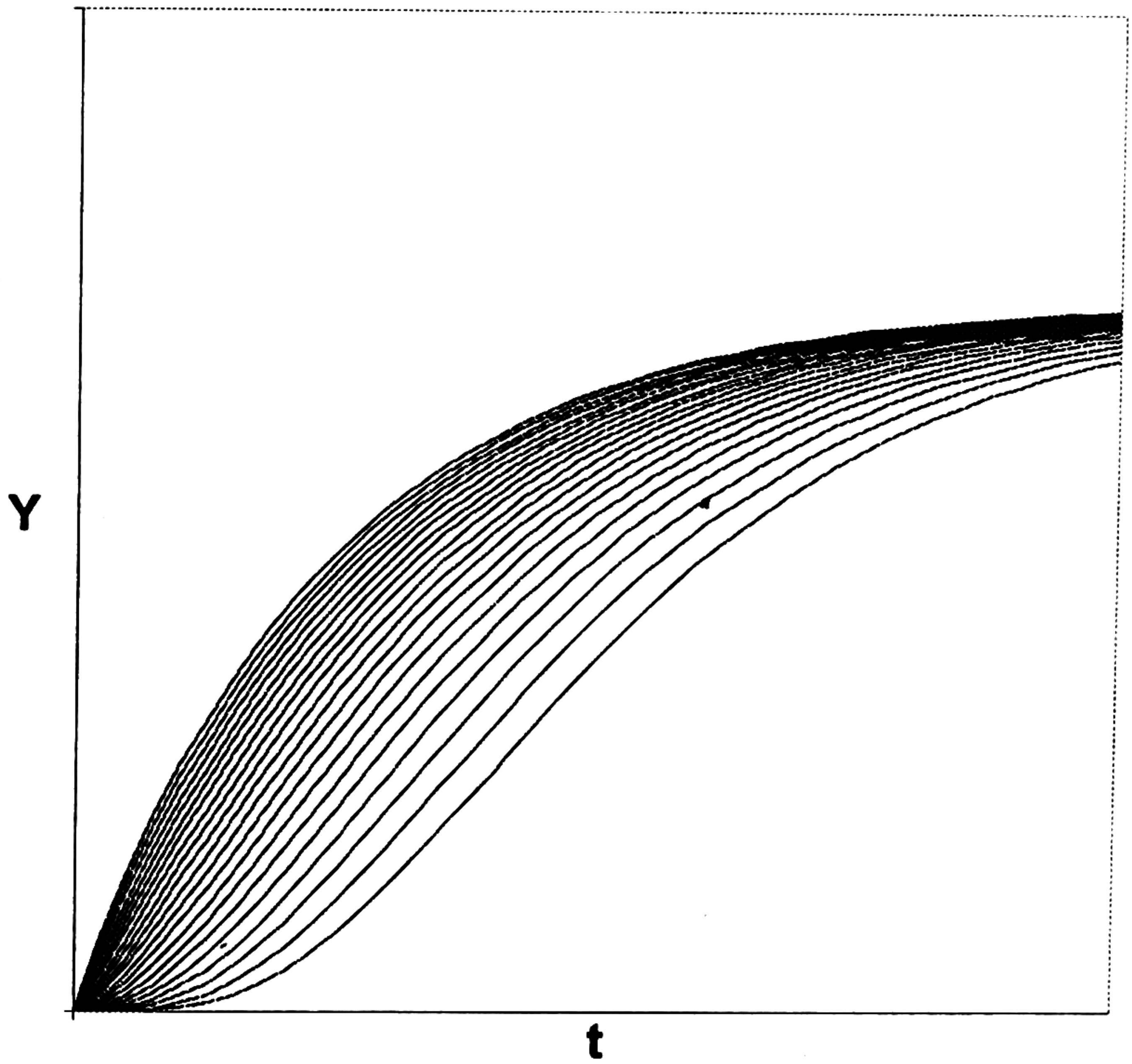
Początkowe wysiłki w modelowaniu wzrostu w leśnictwie koncentrowały się na zależnościach dwuwymiarowych, jak na przykład zależność wysokości od wieku dla pojedyńczego typu drzewostanu. Zarówno krzywe wykreślane odręcznie, jak i nawet najbardziej skomplikowane wcześniejsze równania dwóch zmiennych, opisywały zależności dwuwymiarowe (np. Hosfeld 1822). Modele te były budowane oddzielnie dla różnych siedlisk, a nawet dla pojedynczych drzewostanów. Do dzisiaj wielu użytkowników krzywych bonitacyjnych traktuje je jako zależności dwuwymiarowe i rzadko rozważa je w kontekście systemu trójwymiarowego. Zgodnie z takim duchem bonitacja jest czasami określana przez dyskretne klasy jakości lub produkcyjności, np. A, B, ..., czy I, II, ... (np. Szymkiewicz 1971).

W przeszłości modele bonitacyjne przedstawiane były w postaci wykresów lub tablic służących do określania klasy bonitacji siedliska na podstawie wieku drzewostanu i jego wysokości w tym wieku (np., Szymkiewicz 1971), lub wieku bazowego i wysokości w wieku bazowym (np., USDA 1929). Jakkolwiek systemy te opisywały zależności trójwymiarowe między wysokością, wiekiem i intensywnością wzrostu, to intensywność wzrostu była wyraźnie zdefiniowana przez dwie zmienne uwikłane w postaci warunków początkowych wysokości i wieku. W niektórych przypadkach średnie krzywe wzrostu wysokości były proporcjonalnie lub w inny sposób adaptowane do poszczególnych drzewostanów przez proste skalowanie (np., Osborne i Schumacher 1935). W systemach anamorficznych średnie krzywe wzrostu wysokości są po prostu mnożone przez stosunek wysokości obserwowanej do oczekiwanej (to znaczy odczytywanej z odpowiedniej krzywej dla tego samego wieku). Powstała w ten sposób nowa krzywa przechodzi przez punkt o znanych współrzędnych: wiek-wysokość, definiując w ten sposób krzywą specyficzną dla danego drzewostanu. Algebraiczne dopasowywanie podstawowego modelu do specyficznego drzewostanu przez proste skalowanie zwiększa prostotę, spójność i użyteczność tego sposobu w porównaniu do metod dyskretnych, szczególnie takich, które wymagają budowania oddzielnych modeli dla poszczególnych drzewostanów. Sposób taki redukuje liczbę niezbędnych równań i na etapie analizy pozwala na łączenie danych z różnych drzewostanów w jeden spójny, uzupełniający się system. Pozwala on również na rozszerzanie systemu dyskretnego do postaci systemu ciągłego i przez to jest bardziej funkcjonalny.

W celu osiągnięcia ciągłego systemu predykcji, nowsze metody modelowania bonitacji stosują niemal wyłącznie funkcje trójwymiarowe. Modele te opisują zazwyczaj zależność pomiędzy zmienną niezależną (na przykład wiekiem), warunkiem początkowym w postaci co najmniej jednej dodatkowej zmiennej reprezentującej intensywność modelowanych procesów (np. García 1983) i zmienną zależną. Najwięcej takich modeli jest sformułowanych dla wysokości, ale mogą one być również tworzone dla jakichkolwiek innych cech mierzalnych, jak grubość, pierśnicowe pole przekroju, miąższość, czy też zagęszczenie drzew drzewostanu. W modelach takich zmienna reprezentująca intensywność procesów jest wyrażana jako wielkość uwikłana w formie obserwacji zmiennej zależnej. Na przykład model wzrostu wysokości może używać bonitacji (S) określonej dla danego wieku bazowego (A_b). Zależnie od podejścia i sposobu włączania S do równań podstawowych, wynikające modele uwikłane mogą być bardzo skomplikowane. Złożoność modelu może być niezbędna do uzyskania wielu pożądanych właściwości, takich jak:

1. Gdy X=0, to Y=0,
2. Polimorfizm (ryc. 1),
3. Zmienne asymptoty (ryc. 2 i 3),
4. Równość S i wysokości w wieku bazowym A_b,
5. Możliwość teoretycznego wyjaśnienia i interpretacji poszczególnych elementów modelu.

W 1974 roku Bailey i Clutter wprowadzili koncepcję niezależności przewidywań od wyboru wieku bazowego (base-age invariance), w której równanie dynamiczne może

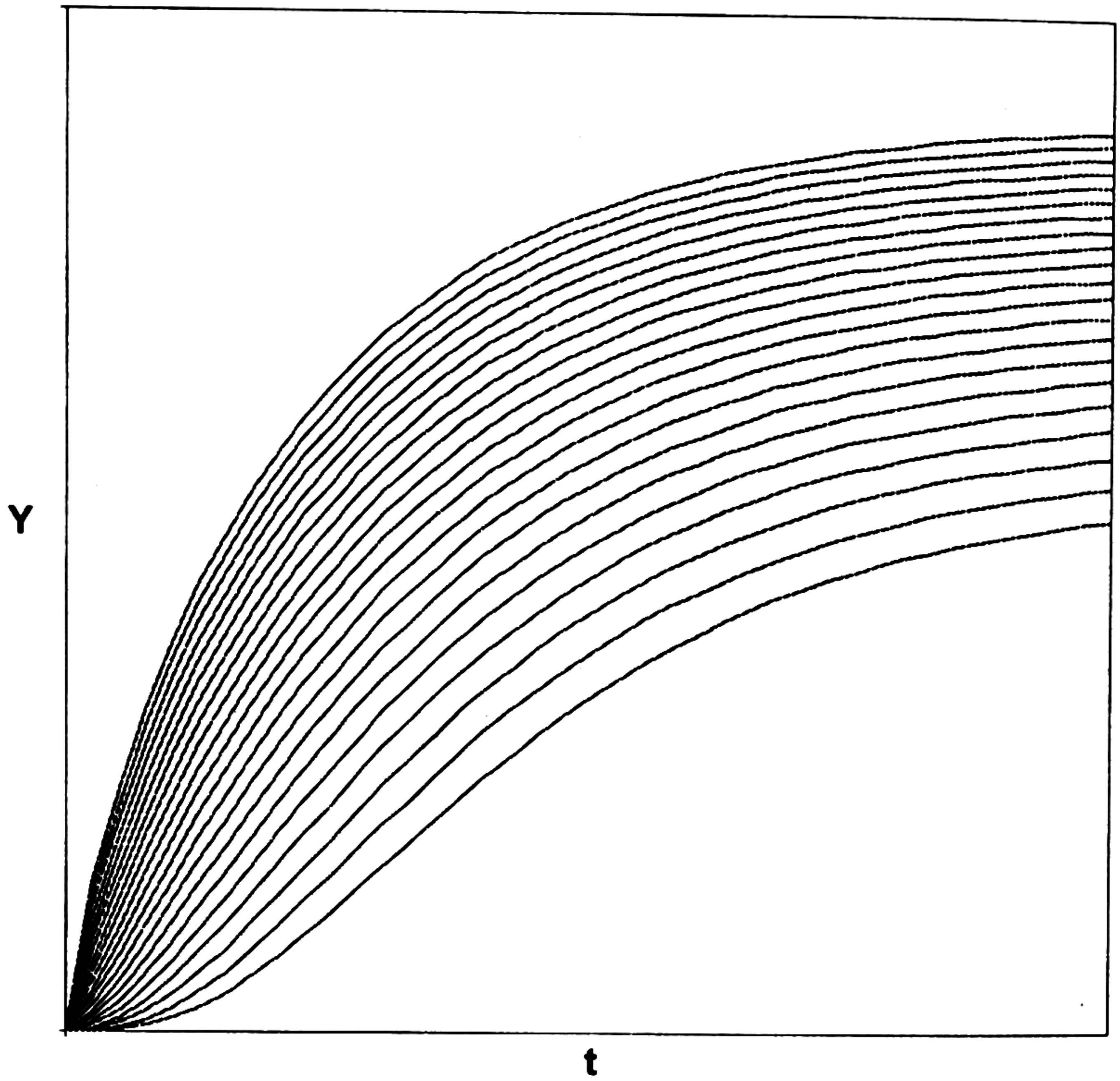


RYC. 1. Krzywe polimorficzne

dawać wyniki bezpośrednio z jakiejkolwiek pary danych wiek-wysokość bez utraty dokładności przewidywań. Pojęcie "niezależności przewidywań od wyboru wieku bazowego" oznacza, że wyniki otrzymane z modelu są "niezmienne" w danym systemie pomimo zmian w wyborze wieku bazowego. W równaniach wzrostu wysokości "niezmienne" pozostają wielkości modelowane i, jako wynik, kształty krzywych wzrostu wysokości.

Równania dynamiczne mogą być traktowane jako zależność czterech zmiennych ciągłych, choć opisują one relacje tylko trójwymiarowe, podobnie jak równania ze stałym wiekiem bazowym..W równaniach tych jeden z wymiarów jest reprezentowany przez warunek początkowy, który wykorzystuje dwie zmienne uwikłane. Bailey i Clutter (1974) zastosowali metodę, którą zaczęto nazywać metodą różnic algebraicznych (MRA) – algebraic difference approach (ADA). Opis metody różnic algebraicznych (Bailey i Cluter 1974) jest dostępny w języku polskim w pracy Cieszewskiego i Zasady (2002). Metoda ta ma wiele zalet w stosunku do metod opartych na stałym wieku bazowym. Równania bonitacyjne wyprowadzone za jej pomocą są poprawne matematycznie (to znaczy nie mogą doprowadzić do wyniku $I=0$) i prognozy uzyskiwane za ich pomocą są niezmienne przy zmianach wieku bazowego.

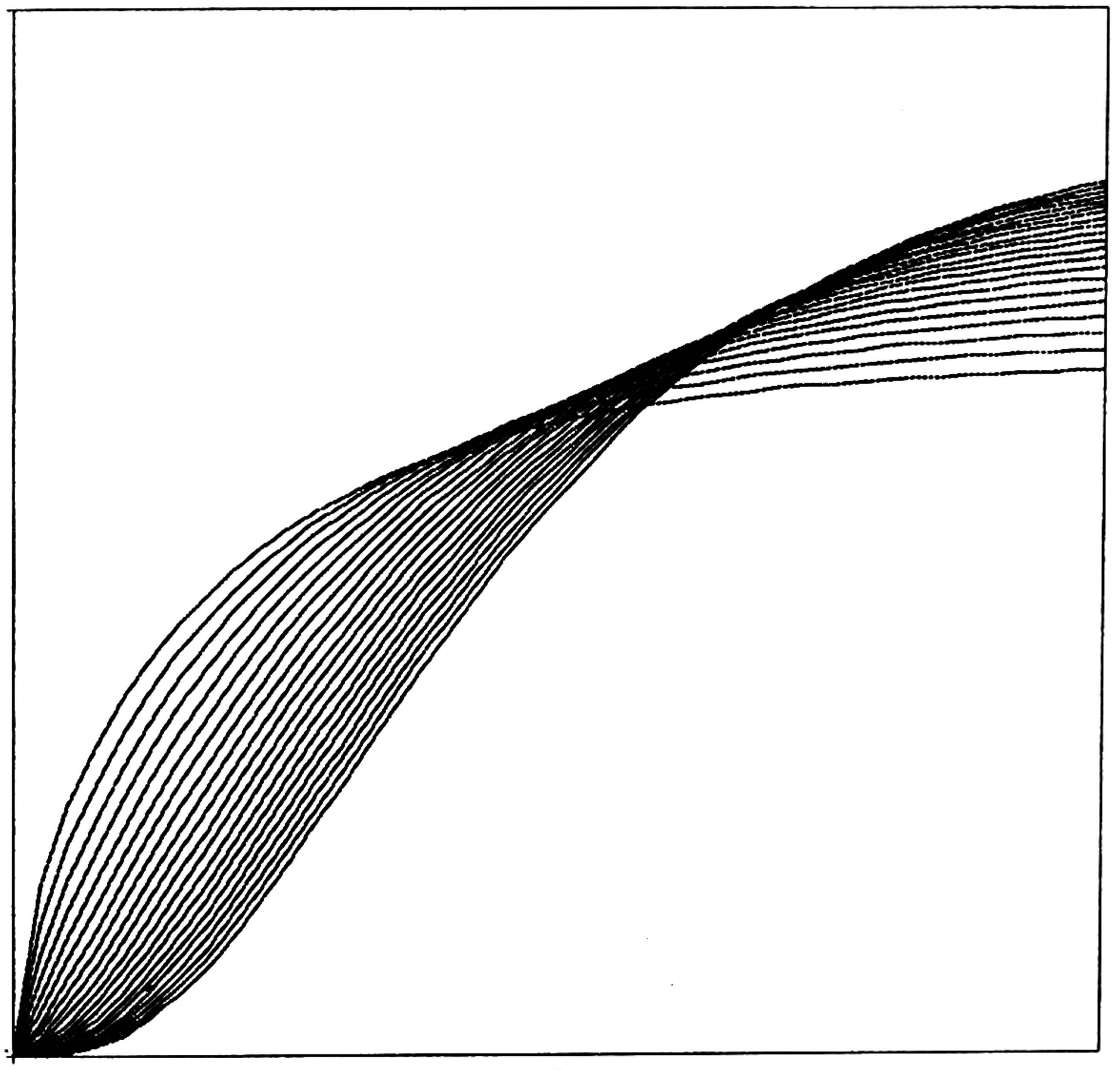
Oryginalna metoda różnic algebraicznych ma jednak ograniczenia przy wyprowadzaniu modeli o większym stopniu skomplikowania. Za jej pomocą nie można zbudować modelu,



RYC. 2. Krzywe polimorficzne ze zmiennymi asymptotami – przykład 1

który charakteryzuje się jednocześnie polimorfizmem i zmiennymi asymptotami, a jedynie takie, które są anamorficzne albo polimorficzne z pojedynczą asymptotą. Z tego powodu istnieje zapotrzebowanie na bardziej uniwersalną metodę.

Niniejszy artykuł opisuje uniwersalną metodę różnic algebraicznych (UMRA) – generalized algebraic difference approach (GADA), służącą do wyprowadzania wyjątkowo elastycznych równań dynamicznych. Została ona po raz pierwszy opisana przez Cieszewskiego (1994), a następnie przez Cieszewskiego i Baileya (2000). Równania wyprowadzone tą metodą charakteryzują się wszystkimi pożądanymi własnościami modeli wyprowadzanych za pomocą MRA, a dodatkowo mogą być znacznie bardziej skomplikowane, polimorficzne i posiadać zmienne asymptoty. Ponadto metoda ta pozwala na osiągnięcie wyników, których nie można uzyskać stosując oryginalną metodę różnic algebraicznych. Poniżej pokazano krok po kroku, jak wyprowadzać takie równania bez wprowadzania sprzeczności matematycznych, które są stosunkowo łatwe do popełnienia przy wyprowadzaniu równań uwikłanych. Sposób postępowania zaproponowany w niniejszej pracy może znaleźć zastosowanie do modelowania różnego rodzaju relacji trzech zmiennych opisanych danymi pochodzącymi z wielokrotnych pomiarów szeregów czasowych z jedną zmienną nieobserwowalną.



RYC. 3. Krzywe polimorficzne ze zmiennymi asymptotami – przykład 2

Uniwersalna Metoda Różnic Algebraicznych (UMRA)

Istota równań dynamicznych leży w ich konstrukcji i uwikłaniu w nich funkcji odwrotnej równania podstawowego. Równania dynamiczne są niezwykle czułe na wszelkie wprowadzane *ad hoc* działania algebraiczne, które normalnie mogą być nieszkodliwe dla równań jawnych. Na przykład równania dynamiczne nie mogą być dodawane stronami ani zmieniane czy upraszczane w inny sposób, np. przez wprowadzanie potęgowania czy mnożenia w obręb istniejącej struktury. Nie mogą być one tworzone przez przyjmowanie niejawnych założeń lub innych doraźnych rozwiązań. Innymi słowy - wiele operacji dopuszczalnych dla równań jawnych nie jest dopuszczalnych dla równań dynamicznych.

Dla ułatwienia wprowadzenia UMRA, wyróżniona została teoretyczna zmienna, określona jako współczynnik intensywności procesu. Przyjęto założenie, że jest on wyrazem tych procesów, które są związane z siedliskiem i indywidualną charakterystyką wzrostu i przeżywalności drzew. Teoretyczna zmienna została użyta we wszystkich równaniach do opisania dowolnych zmiennych rządzących zmianami kształtu krzywych wzrostowych na różnych siedliskach może być zarówno zmienną, jak i funkcją dowolnej liczby zmiennych. Zmiennymi tymi mogą być czynniki charakteryzujące klimat, dostępność wody, głębokość gleby organicznej, powierzchnia aparatu asymilacyjnego, wydajność fotosyntezy, stężenie ozonu, czynniki genetyczne, itp. Wartość X jest ciągła, monotoniczna i związana z dynamiką modelowanych procesów. Może ona wyrażać względne różnice rozpatrywanej funcji. Zakładamy, że mała wartość X reprezentować będzie małą intensywność wzrostu, a duża wartość X – dużą intensywność wzrostu. Ponieważ praktycznie nigdy nie jest możliwe bezpośrednie określenie wartości, zmienna ta może być zastąpiona możliwymi do uzyskania na drodze pomiaru warunkami początkowymi. Dopiero wówczas takie równanie może być wykorzystane w praktyce. Ma to jednak miejsce tylko w sytuacji, gdy zostało ono poprawnie sformułowane w sposób jawny, i stąd charakteryzuje się ono pożądanymi własnościami równań bonitacyjnych, jak polimorfizm i wielokrotne asymptoty.

Pierwszym krokiem w stosowaniu UMRA jest wybór podstawowego równania i określenie w nim pożądanej liczby zmiennych parametrów, które charakteryzują warunki siedliskowe. Następnie konieczne jest zdefiniowanie funkcji określających, w jaki sposób parametry wyrażające czynniki siedliskowe zmieniają swoje wartości w wyniku zmian warunków siedliskowych przez zastąpienie tych parametrów jawnymi funkcjami zmiennej X nowych parametrów. Tym sposobem pierwotne dwuwymiarowe równanie podstawowe zmienia się w jawne, trójwymiarowe równanie siedliskowe opisujące za pomocą dwóch zmiennych niezależnych (t i X) zmiany modelowanej cechy w czasie i przestrzeni. Następnie rozwiązanie równania ze względu na zmienną X zastępuje wszystkie wartości X_S uwikłanymi rozwiązaniami używającymi warunków początkowych t_0 i Y_0. Symbolicznie opisany tutaj proces może być przedstawiony następująco. Równanie podstawowe możemy zapisać symbolicznie jako:

$$Y(t) = f(t, \rho_1 \dots \rho_{n-1}, \rho_n) \qquad [1]$$

gdzie $\rho_1 \dots \rho_n$ stanowią parametry równania.

W podstawowym równaniu [1] parametr siedliskowy ρ jest zdefiniowany jako funkcja g_i zmiennej X i pewnej liczby j nowych parametrów, to znaczy $\rho_1 = g_i(\chi, \rho_{i_1} \dots \rho_{i_j})$. Wyjściowe równanie [1] z wieloma parametrami siedliskowymi zmienia się w jawne trójwymiarowe równanie siedliskowe z dwiema zmiennymi niezależnymi t i X:

$$Y(t, \chi) = f\{(t, p_1 \dots p_{m-1}, g_m(\chi, p_{m_1} \dots p_{m_k}) \dots g_n(\chi, p_{n_1} \dots p_{n_l})\} \qquad [2]$$

gdzie $Y(t, X)$ jest funkcją zmiennych t, X oraz $m+k+l-1$ parametrów.

Jeżeli równanie [2] może być rozwiązane ze względu na zmienną , prawa strona tego rozwiązania z warunkami początkowymi zmiennych t i Y, tzn.,

$$\chi = u(t, Y, \rho_1 \dots \rho_{n_l}) = u(t_0, Y_0, \rho_1 \dots \rho_{n_l}) \qquad [3]$$

może być podstawiona do równania [2] w miejsce X. Tak więc równanie:

$$Y(t, t_0, Y_0) = f\{(t, \rho_1 \dots \rho_m, u(t_0, Y_0, \rho_1 \dots \rho_{n_l}))\}$$

po przeformułowaniu i wyeliminowaniu nadmiarowych parametrów, staje się równaniem dynamicznym z uwikłanymi warunkami początkowymi:

$$Y(t, t_0, Y_0) = f(t, t_0, Y_0, \rho_1 \dots \rho_w) \qquad [4]$$

gdzie:

$$n-1 \leq w \leq m+k+...+l-1 \qquad [5]$$

Wynik równania [5] oznacza, że równanie [4] ma mniejszą lub równą liczbę parametrów, niż równanie [2].

Praktyczne zastosowanie UMRA może być wprowadzone na różnych poziomach zaawansowania i trudności w wyprowadzaniu równań. W związku z tym klasyfikujemy równania ze względu na poziom zaawansowania i trudności jako proste lub złożone w zależności od tego, czy są one oparte na prostym przekształceniu równania (proste), czy też na znajdowaniu jego pierwiastków (złożone).

Równania proste

W najprostszych przypadkach wprowadzenie nowej zmiennej X może się wydawać niekonieczne, gdyż korzyść z jej wprowadzania nie jest oczywista. Jednakże wprowadzanie tej zmiennej nie powoduje żadnych ograniczeń w porównaniu z tradycyjnym podejściem metody różnic algebraicznych. Na przykład, aby za pomocą UMRA powtórzyć wyprowadzenie MRA oparte na dwóch założeniach przedstawionych przez Baileya i Cluttera (1974), zapiszmy równanie Schumachera (1939) z cytowanej pracy:

$$\ln Y(t) = \alpha - \beta/t \qquad [6]$$

na dwa sposoby:

$$\ln Y(t, \chi) = \chi - \beta_a/t \qquad [7]$$

i

$$\ln Y(t, \chi) = \alpha_p - \chi/t \qquad [8]$$

gdzie β_a jest kątem nachylenia krzywej równania anamorficznego, α_p jest asymptotą równania polimorficznego. Wyprowadzenie końcowych równań bonitacyjnych metodą UMRA jest osiągnięte przez proste zastosowanie MRA (Bailey i Clutter 1974) w stosunku do X w każdym z wymienionych dwóch równań. Jednakże przewaga wprowadzenia zmiennej X jest najlepiej widoczna, gdy dla odpowiedniego opisu zmian kształtów krzywych wzrostowych dla poszczególnych bonitacji wymagane jest użycie więcej niż jednego parametru opisującego jakość siedliska. Na przykład, w prostym przykładzie zakładającym polimorfizm i zmienne asymptoty, obydwa parametry α i β w równaniu [6] mogą zależeć od X. Zmienna może wyrażać na przykład górny limit produkcji, tzn.,

$$\ln Y(t, \chi) = \chi + \beta_\chi/t \qquad [9]$$

Powyższe równanie ma rozwiązanie ze względu na :

$$\chi = \frac{\ln Y}{1 - \beta/t} = \frac{\ln Y_0}{1 - \beta/t_0}$$

Zastosowanie UMRA w wymienionym przypadku w stosunku do parametrów α, β i X prowadzi do wyprowadzenia równania dynamicznego opartego na funkcji Schumachera (1939), które dostarcza krzywych polimorficzńych niezależnych od wieku bazowego i mających zmienne asymptoty:

$$\ln Y(t, t_0, Y_0) = \ln Y_0 \frac{t_0(t - \beta)}{t(t_0 - \beta)} \qquad [10]$$

Interpretacja tego wyprowadzenia może być przedstawiona w następujący sposób. Przypisanie X do α oznacza, że dla przyjętej miary intensywności procesów wzrostowych górny limit produkcji będzie się zwiększał wraz ze wzrostem indywidualnej intensywności produkcji. W wyniku tej relacji równanie ma zmienne asymptoty. Przypisanie X do β oznacza, że kształt krzywych zmienia się wraz ze zmianą intensywności wzrostu, co w konsekwencji definiuje równanie polimorficzne. Te relacje są oczywiste, gdyż gdy X powoduje zmiany jednocześnie w α, jak i w β, rezultatem tych zmian muszą być polimorfizm i zmienne asymptoty. Innym przykładem jest równanie, które jednocześnie wyraża polimorfizm podobny do równania polimorficznego opisanego przez Baileya i Cluttera (1974) i właściwości asymptot podobne do anamorficznego równania opisanego przez wymienionych tu autorów. Zaleta wprowadzenia nowej zmiennej staje się tu oczywista, gdyż cel ten jest osiągnięty przez dodanie stronami jawnych równań [7] i [8], tzn.:

$$2 \ln Y(t, \chi) = (\chi - \beta_a/t) + (\alpha_p - \chi/t) \qquad [11]$$

W ten sposób zastępując wartość X jej rozwiązaniem:

$$\chi = \frac{t\,(ln\ Y - \alpha'_p) + \beta'_a}{t - 1} = \frac{t_0\,(ln\ Y_0 - \alpha'_p) + \beta'_a}{t_0 - 1}$$

uwikłanym w równaniu [11], umożliwiamy wyprowadzenie równania dynamicznego z obydwiema pożądanymi cechami:

$$\ln Y(t, t_0, Y_0) = \alpha'_p - \frac{\beta'_a}{t} + \frac{(t-1)\,t_0}{(t_0 - 1)\,t}\left(\ln Y_0 - \alpha'_p + \frac{\beta'_a}{t_0}\right) \qquad [12]$$

Zdolność do łączenia właściwości dwóch różnych równań dynamicznych w postaci jednego równania dynamicznego przez dodanie ich jawnych postaci stronami jest unikalną cechą uniwersalnej metody różnic algebraicznych. Należy jednak pamiętać, że tylko równania w postaci jawnej, to jest przed uwikłaniem równań z rozwiązaniami ich warunków początkowych, mogą być dodawane stronami. Jeżeli strony dwóch równań dynamicznych są dodane bezpośrednio, wynikiem jest relacja, która nie ma własności niezależności od wieku bazowego oraz może doprowadzić do matematycznych sprzeczności. Mimo, że przytoczone równanie dynamiczne jest niewyprowadzalne za pomocą podstawowej metody różnic algebraicznych (MRA), jest ono łatwo wyprowadzalne za pomocą opisywanej tu metody UMRA.

Równania złożone

Równania dynamiczne określiliśmy jako proste wówczas, gdy były one wyprowadzane przez bezpośrednie przekształcenia równań jawnych. W przeciwieństwie do równań prostych, równania, które wymagają w swoim wyprowadzaniu obliczania pierwiastków w celu określenia X, nazywać będziemy złożonymi niezależnie od liczby parametrów, gdyż wymagany sposób rozwiązania może stanowić znaczne ograniczenia w zastosowaniach praktycznych. Przykładami mogą być konstrukcje zawierające zależność kwadratową lub kombinację bezpośredniej i odwrotnej proporcjonalności. Taka zależność może istnieć między charakterystyką równania (zmiennością asymptot czy polimorfizmem), a miarą intensywności wzrostu X. Na przykład wyprowadzanie zaawansowanego równania dynamicznego może wypływać z założenia, że asymptoty są wykładniczo proporcjonalne do intensywności wzrostu, a polimorfizm jest odwrotnie proporcjonalny do intensywności wzrostu, tzn.:

$$\ln Y(t,\chi) = \alpha\chi - \frac{\beta/\chi}{t} \qquad [13]$$

Dla tego równania podstawowego rozwiązanie ze względu na X wymaga znalezienia pierwiastków równania kwadratowego i wyboru najodpowiedniejszego pierwiastka do uwikłania go w równaniu dynamicznym. Wybór najlepszego wyrażenia dla może zależeć od parametrów równania, które z kolei zależą od dostępnych danych i zakresu wieku. Rozwiązaniem X w równaniu [13] jest:

$$\chi = 0{,}5\,(\ln y + \mathrm{R})/\alpha = 0{,}5\,(\ln Y_0 + \mathrm{R}_0)/\alpha$$

lub

$$\chi = 0{,}5\,(\ln y - \mathrm{R})/\alpha = 0{,}5\,(\ln Y_0 - \mathrm{R}_0)/\alpha$$

gdzie:

$$\mathrm{R} = \sqrt{(\ln Y)^2 + 4\,\alpha\,\beta/t}$$

i

$$\mathrm{R}_0 = \sqrt{(\ln Y_0)^2 + 4\,\alpha\,\beta/t_0}$$

Z dwóch pierwiastków równania ten najprawdopodobniej będzie rzeczywisty i dodatni, który ma raczej dodawanie, niż odejmowanie we wzorze. Użycie warunków początkowych i podstawienie ich do równania [13] daje następujące równanie dynamiczne:

$$\ln Y(t, t_0, Y_0) = \frac{\ln Y_0 + \mathrm{R}_0}{2} - \frac{2\gamma/t}{\ln Y_0 + \mathrm{R}_0} \qquad [14]$$

gdzie $\gamma = \alpha\beta$. Inna sytuacja wymagająca poszukiwania pierwiastków pojawia się wtedy, kiedy zmiany siedliskowe są opisywane przez wielomian X.

Dążenie do uzyskania najlepszej formy równania może być żmudną procedurą, uzależnioną od wielu czynników, włączając analizę danych. Dla każdego równania jawnego lub podstawowego istnieje wiele możliwych założeń i rozwiązań, które mogą prowadzić do wyprowadzenia uwikłanych równań dynamicznych. Jednakże zawsze, kiedy rozważane jest nowe założenie formułowane we właściwej zależności równań jawnych, powinno być ono zakończone przed wprowadzeniem postaci uwikłanej tego równania. Dla poprawnego przeprowadzenia tej fazy konieczne jest dobre zrozumienie struktury matematycznej rozpatrywanych równań i oczekiwanych różnic we wzroście drzew na siedliskach o różnej produkcyjności.

Własności Metody

Uniwersalna metoda różnic algebraicznych jest bardziej parsymonijna, niż większość tradycyjnych metod wyprowadzania równań bonitacyjnych (Cieszewski i Zasada 2002). Za jej pomocą możliwe jest również wyprowadzanie bardziej skomplikowanych równań niż te, które pochodzą z tradycyjnych metod. Opisywana metoda może w różnych przypadkach dostarczać równań, które są bardziej elastyczne i mają mniej parametrów, niż odpowiadające im równania ze stałym wiekiem bazowym.

Teza, że UMRA jest oszczędniejsza, niż metody wykorzystujące stały wiek bazowy, jest poparta trzema stwierdzeniami:

- UMRA nie wymaga żadnych dodatkowych parametrów oprócz tych, które istnieją w równaniach jawnych lub z ustalonym wiekiem bazowym, w stosunku do których została zastosowana, co jest oczywiste z definicji metody wyrażonej przez równania [2] i [4].
- Końcowe dynamiczne równanie [4] ma mniejszą lub równą liczbę parametrów, niż wyjściowe równanie [2].
- Brak wartościowych i wymiarowych ograniczeń w stosunku do X zapewnia, że każde wielowymiarowe wyrażenie zawierające nieobserwowalną, jedno- lub wielowymiarową zmienną X będzie zawsze przekształcone w najprostszą możliwą formę.

Nawet jeżeli modelujący nie dostrzega możliwości redukcji liczby parametrów w równaniu, wyprowadzenie określone przez UMRA automatycznie redukuje liczbę parametrów przez ich skracanie podczas rutynowych operacji algebraicznych. Metody budowania równań siedliskowych o ustalonym wieku bazowym nie dają takiej możliwości.

Estymacja parametrów równań, metody używane w analizie regresji, wymagania dotyczące danych oraz inne problemy związane z praktycznym używaniem opisywanych w niniejszej pracy modeli są zagadnieniami zupełnie niezależnymi od metod ich wyprowadzania. Przy szacowaniu parametrów można używać dowolnych metod statystycznych, które byłyby odpowiednie w przypadku tradycyjnych modeli bonitacyjnych i wzrostu wysokości opartych na stałym wieku bazowym (włączając metody oparte na kryterium najmniejszych kwadratów). Ponadto modele wyprowadzone za pomocą prezentowanej metodyki pozwalają na znacznie większą elastyczność w używaniu danych i ustalaniu parametrów. Na przykład Borders i inni (1984) pokazali, że model o postaci $H(t_n) = f(t_n, t_{n-1}, h_{n-1})$ może być dopasowany do danych z różnych okresów pomiarowych, na przykład $(t_1, h_1; t_2, h_2)$, $(t_2, h_2; t_3, h_3)$, $(t_3, h_3; t_4, h_4)$, itp.

Podsumowanie i wnioski

Niniejsza praca poświęcona jest omówieniu metodyki algebraicznego wyprowadzania równań dynamicznych przydatnych do modelowania takich danych, jak siedliskowe szeregi czasowe oparte na niobserwowalnych zmiennych siedliskowych. Opisana metodyka jest bardziej elastyczna, niż inne dotychczasowo stosowane metody używane to tego celu. Wyprowadzone równania mogą być dopasowane do danych z użyciem dowolnej techniki używanej do budowy równań dynamicznych lub o stałym wieku bazowym. Ponadto równania te mogą być używane w sposób spójny z istniejącymi tradycyjnymi równaniami o stałym wieku bazowym. Autorzy zalecają opisywaną metodykę jako narzędzie, a nie ideologię, która powinna być stawiana przed założeniami statystycznymi dotyczącymi struktury błędów czy kryteriów dopasowania krzywych. Autorzy nie twierdzą również, że wszystkie modele bonitacyjne muszą wykorzystywać równania dynamiczne. Tym niemniej pokazaliśmy w przytoczonych przykładach, że są one prostsze i bardziej elastyczne. Mogą prognozować odpowiednie wysokości, kiedy wiek równy jest wiekowi bazowemu oraz są łatwiejsze do dopasowania przy użyciu niedostatecznych danych lub danych pochodzących z młodych drzewostanów. Przykłady te mają pokazać przewagę opisywanej Uniwersalnej Metody Różnic Algebraicznych nad bardziej tradycyjnymi metodami wyprowadzania równań.

[1]*Warnell School of Forest Resources, University of Georgia,*
Athens, GA, 30602, USA,
biomat@uga.edu

[2]*Samodzielny Zakład Dendrometrii i Nauki o Produkcyjności Lasu,*
Wydział Leśny, SGGW, ul. Rakowiecka 26/30, Warszawa,
les_kpl@delta.sggw.waw.pl

Literatura

Bailey R.L., Clutter J.L., 1974. Base-age invariant polymorphic site curves. For. Sci. 20: 155-159.

Borders B.E., Bailey R.L., Ware J.D., 1984. Slash Pine Site-index from a Polymorphic Model by Joining (splining) Nonpolynomial Segments with an Algebraic Difference Method. For. Sci. 30: 411-423.

Cieszewski C.J., 1994. Development of a variable density height-growth-model through defining multidimensional height growth spaces. Praca doktorska. University of Alberta, Edmonton, Kanada.

Cieszewski C.J., Bailey R.L., 2000. Generalized Algebraic Difference Approach: A New Methodology for Derivation of Biologically Based Dynamic Site Equations. For. Sci. 46:116-126.

Cieszewski C.J., Zasada M., 2002. Dynamiczna forma anamorficznego modelu bonitacyjnego dla sosny pospolitej w Polsce. Sylwan (w druku).

García O., 1983. A stochastic differential equation model for the height growth of forest stands. Biometrics, 39: 1059-1072.

Hosfeld J.W., 1822. Mathematic für forstmänner, ökonomen und cameralisten. Gotha 4. Bd., S. 310.

Osborne J.G., Schumacher F.X., 935. The construction of normal-yield and stand tables for even-aged timber stands. J. Agric. Res. 51:547-564.

Schnute J., 1981. A versatile growth model with statistically stable parameters. Can. J. Fish. Aquat. Sci. 38: 1128-1140.

Schumacher F.X., 1939. A new growth curve and its application to timber yield studies. J. For. 37: 819-820.

Szymkiewicz B., 1971. Tablice Zasobności i Przyrostu Drzewostanów. Wydanie IV. PWRiL, Warszawa.

USDA, 1929. Miscellaneous publication No. 50. Washington, D.C.

Summary

Generalized Method of Algebraic Differences deriving dynamic site index equations based on biological theories

The purpose of this manuscript is to introduce to Polish literature a methodology that is not currently know in Poland, but it can be extremely useful in ongoing there growth and yield modelling work. We present here the Generalized Method of Algebraic Differences, which was originally introduced by Cieszewski (1994, Development of a variable density height-growth-model through defining multidimensional height growth spaces. PhD thesis. University of Alberta, Edmonton, Canada), and subsequently published by Cieszewski and Bailey (2000, Generalized Method of Algebraic Differences: A New Methodology for Derivation of Biologically Based Dynamic Site Equations. For. Sci. 46:116-126). The methodology is a generalization of the Algebraic Difference Approach formalized by Bailey and Clutter (1974, Base-age invariant polymorphic site curves. For. Sci. 20: 155-159), which had some limitations in flexibility of derivation schemas. The presented methodology is generally applicable to modelling various relationships between two observable and one unobservable variables, whereby the unobservable variable can be substituted by initial conditions of the two observable variables thus leading to derivation of self-referencing dynamic equations. The most common example of such models in the West, in particular the USA, are site-dependent height-age models, called also site index models, or site models. The presented here method is equally useful for deriving new equations as it is for improving existing models based on traditional use of fixed base ages. The methodology is presented in a few stages. First we present a general theoretical foundation of the method in the form of a series of mathematical definitions for subsequent steps and their assumptions. Then, we present simple examples for practical applications, in which we use the current methodology to redo the original models presented by Bailey and Clutter (1974) and demonstrate extensions of this derivations, which were not possible with the original algebraic difference approach. Next, we present somewhat more involved examples of derivation of complex dynamic equations based on finding roots of polynomials. Finally, we discuss various implications of the presented methodology and properties of the dynamic equations derived by it. The method can be used effectively to derive truly base-age invariant dynamic equations capable of describing concurrent polymorphism and variable asymptotes. The equations derived with it can be extremely flexible and may generate intricate patterns of concurrent polymorphism and variable asymptotes. Their parameters can be estimated using the same methods as for all other fixed base-age site index models.