Jerzy WYSOCKI
Katedra Geodezji i Fotogrametrii SGGW

Zagadnienie numerycznej aproksymacji powierzchni terenu w opracowaniach warstwicowych metodami komputerowymi

Wstęp

Rzeźba terenu jest jednym z głównych elementów map szczegółowych opracowywanych dla inżynierii środowiska wiejskiego. Przy realizacji prac, np. w zakresie budowy zbiorników retencyjnych, wodociągów wiejskich, sieci melioracyjnych, budowy dróg rolniczych, konieczne jest posłużenie się wielkoskalowymi mapami sytuacyjno-wysokościowymi. Podstawową metodą przedstawiania rzeźby terenu na tych mapach jest metoda warstwicowa. Oprócz tradycyjnej metody opracowań warstwicowych, wykonywanych na podstawie pomiarów tachimetrycznych, coraz większe zastosowanie do tych opracowań znajdują metody fotogrametryczne oraz metody komputerowe oparte na numerycznym modelu terenu (NMT).

Rzeczywista powierzchnia topograficzna jest reprezentowana w NMT pomierzonym zbiorem punktów terenowych o wyznaczonych współrzędnych x, y, z. Punkty te, nazywane także punktami modelu (również punktami odniesienia-oparcia), mogą mieć w ogólnym przypadku rozmieszczenie nieregularne (rozproszone) lub regularne (punkty położone w węzłach regularnych siatek).

Na podstawie danych punktów modelu dokonywana jest aproksymacja powierzchni topograficznej, np. za pomocą zbioru płaszczyzn „przylegających" jak najdokładniej do danej powierzchni terenu lub za pomocą zbioru (kombinacji) powierzchni drugiego czy też wyższego stopnia (Gaździcki 1975; Piasek i in. 1981; Wysocki 1981, 1987). Warstwice można otrzymać drogą analityczno-numeryczną (z równań zbioru powierzchni aproksymujących) lub drogą numeryczną, np. przez obliczanie współrzędnych x, y przecięćć boków siatki utworzonej przez punkty modelu z liniami wyznaczanych warstwic.

Metody numerycznej aproksymacji powierzchni terenu

W Finlandii (Kokko, Wuta 1967) opracowano NMT, gdzie punkty modelu połączone w trójkąty równoboczne tworzą regularną siatkę. Nad każdym elementem siatki konstruowane są powierzchnie aproksymujące w formie płaszczyzn.

W systemie NORDISK ADB (1968) punkty odniesienia są wybierane z uwzględnieniem cech morfologicznych terenu. Matematyczny model określający wysokości punktów szukanych składa się z trzykrotnej interpolacji liniowej, uwzględniającej położenie punktów sąsiednich oraz na liniach terenowych (np. liniach szkieletowych). Badania w kierunku przedstawienia terenu w postaci płaszczyzn przebiegających na różnych wysokościach prowadzili między innymi Gedymin i Kopcewicz (1974).

Metodę interpolacji liniowej w celu przedstawienia powierzchni terenu wykorzystano również w programach realizujących inne metody numeryczne opracowań warstwicowych, np. Wysocki (1987, 1994), gdzie dla każdego szukanego punktu wyznaczane jest równanie płaszczyzny, w której leży wybrany według odpowiedniej procedury trójkąt zawierający ten punkt.

Na ogół bardziej złożone są metody aproksymacji wykorzystujące nieliniowe sposoby interpolacji. W interpolacji nieliniowej wykorzystywane jest kryterium regularnego lub dowolnego rozłożenia punktów terenowych (punktów modelu) stanowiących tzw. punkty oparcia (odniesienia). W każdym punkcie lub elemencie siatki stanowią one podstawę matematycznej budowy powierzchni aproksymującej (np. za pomocą równania wielomianowego). Powierzchnia aproksymująca może być utworzona oddzielnie dla każdego punktu modelu, przy założeniu minimum odchyłek sumy kwadratów błędów wysokości na odpowiednio wybranych punktach oparcia otaczających wyznaczany punkt:

$$\sum_{1}^{k} p_k \left[Z_k - A(X_k, Y_k)\right]^2 = \text{minimum} \quad (1)$$

gdzie:

p_k – wagi lub funkcje wagowe, związane zwykle z położeniem punktu oparcia w stosunku do wyznaczanego,

$A^{(k)}(X, Y) = Z_i$ może stanowić wielomian stopnia drugiego czy wyższego.

Interpolacja na większym obszarze może być realizowana przez sumowanie powierzchni utworzonych na poszczególnych punktach oparcia. Zastosować można także inne rozwiązanie, np. opracowany wycinek powierzchni terenu dzieli się na lokalne fragmenty regularnego kształtu, a powierzchnia każdego fragmentu jest aproksymowana wielomianem odpowiedniego stopnia. Przy tym stawia się warunek ciągłości powierzchni na granicach fragmentów.

Nakamura (1968) oraz inni stosują wielomianową funkcję powierzchni stopnia trzeciego. Junkins i Jancaitis (1974) używają w swoich pracach wielomianów, które muszą spełniać warunek ciągłości wzdłuż granic określonych przez punkty o danych wysokościach (punkty oparcia) oraz obliczone kąty nachylenia między punktami muszą być takie same. Dla siatek regularnych stosują równania wielomianowe stopnia czwartego z jedenastoma parametrami.

Z – wartości współczynników wielomianu.

Następnie jest empirycznie wyznaczana wartość interpolacji u, w dowolnym punkcie ma postać:

$$u = \mathrm{C}\,(P\,P_1)..\mathrm{C}(PP_n)\begin{Bmatrix} \mathrm{v} & \mathrm{C}(P_1P_2) & \mathrm{C}(P_1P_n) \\ \mathrm{C}(P_1P_2) & \mathrm{v} & \mathrm{C}(P_2P_n) \\ . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \\ \mathrm{C}(P_1P_n) & \mathrm{C}(P_2P_n) & \mathrm{v} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ . \\ . \\ . \\ l_n \end{Bmatrix} \qquad (3)$$

Kraus (1971) przy obliczaniu interpolacji powierzchniowej rozdziela wielkości na trzy części:

- trend – w formie funkcji wielomianowej,
- część korelowana – w której wyszczególnia wariancje i kowariancje (korelacje między sąsiednimi punktami),
- odchyłki (poprawki).

Znając różnice wysokości h oraz obliczając tzw. „centryczne wartości" w punktach oparcia określany jest trend za pomocą równania:

$$\begin{Bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ . \\ . \\ . \\ H_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ . \\ . \\ . \\ Z_n \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ . \\ . \\ . \\ h_n \end{Bmatrix} \qquad (2)$$

gdzie:

H – centryczne wartości w punktach oparcia,

h – odchyłki (poprawki),

czyli $\mathrm{u} = \mathrm{C} \cdot \mathrm{C}^{-1} \cdot l_i$

gdzie:

l_i – wysokości w n punktach oparcia P_i,

C – wektor, w którym zebrane są statystyczne zależności (kowariancje) $\mathrm{c}(PP_i)$ punktu interpolowanego P z punktem oparcia P_i

C – macierz zawierająca kowariancje między n punktami oparcia P_i oraz wariancje v.

Kowariancje między punktami P_iP_k wzajemnie wpływają na siebie. Przedstawione postępowanie interpolacyjne służy do obliczenia wysokości punktów stanowiących węzły dostatecznie gęstej siatki kwadratów o bokach równoległych do osi założonego układu współrzędnych. Dalszy proces rachunkowy polega na obliczeniu współrzędnych x, y punktów przecięć warstwic z bokami siatki.

Gaździcki (1975) buduje NMT według „metody siatki wyrównawczej", umożliwiającej przekształcenie modelu utworzonego na podstawie zbioru punktów rozproszonych. W wyniku przekształcenia rzeczywista powierzchnia terenu jest aproksymowana regularną siatką kwadratów o wysokościach Z, obliczonych itercyjnie z zastosowaniem metody najmniejszych kwadratów. Wysokości wszystkich węzłów siatki są obliczane łącznie.

Jak wynika z powyższego ogólnego przeglądu metod aproksymacji powierzchni terenu, można dokonać podziału na metody bazujące na interpolacji liniowej i nieliniowej.

Innego podziału metod modelowania terenu funkcją interpolacyjną dokonał Schut (1976). Podzielił je na sześć grup:

Pierwszą grupę nazwał metodami ruchomych powierzchni (moving surface). Wysokości punktów stanowiących węzły regularnej siatki są obliczane z powierzchni aproksymujących, tworzonych każdorazowo dla obliczanego punktu, na podstawie leżących w sąsiedztwie punktów odniesienia. Kształt powierzchni może być określony pełnym równaniem wielomianowym, np. stopnia drugiego, gdzie

$$h = a_0 + a_1 x + a_2 y + b_1 x^2 + b_2 xy + \\ + b_3 y^2 \qquad (4)$$

lub zredukowanym – w postaci płaszczyzny pochylonej czy też poziomej. Wysokościom punktów odniesienia przyporządkowane są odpowiednie wagi (funkcje wagowe).

W drugiej grupie metod (sumation of surface – sumowania powierzchni) zostało zastosowane rozwiązanie znane w matematyce w teorii korelacji. Wysokość punktu interpolowanego określana jest wzorem:

$$h = b^T \cdot B^{-1} \cdot \mathbf{z} \qquad (5)$$

Dla każdego interpolowanego punktu i-ty składnik wektora **b** jest funkcją odległości od punktu szukanego do i-tego punktu odniesienia, zaś **z** jest wektorem, którego składniki są wysokościami punktów odniesienia. Elementy macierzy B wynikają z funkcji odległości zwanej również funkcją korelacji. Element w i-tym wierszu i j-tej kolumnie macierzy B jest wartością funkcji odległości dla odstępu między i-tym i j-tym punktem odniesienia.

Do trzeciej i czwartej grupy Schut zaliczył metody interpolacji oparte na regularnych siatkach kwadratów lub prostokątów. Poszczególne elementy „oczka" siatki są opisywane równaniem wielomianowym. Wysokości węzłów są obliczane jednocześnie.

Do piątej grupy zostały zaliczone metody interpolacji obejmujące siatki trójkątów, w których punkty wierzchołkowe są jednocześnie punktami odniesienia-modelu.

W szóstej grupie metod punkty odniesienia są zlokalizowane wzdłuż charakterystycznych linii terenu, np. linii konturowych i szkieletowych.

Jeszcze inną, w stosunku do dwóch poprzednich systematykę podziału metod aproksymacji zaproponowali: Sierbieniuk i inni (1990). Wybór funkcji aproksymującej powierzchnię terenu uzależnili od charakteru danych źródłowych, w których zbiór pomierzonych punktów odniesienia może być regularny, półregularny (po izoliniach i profilach) i nieregularny. Wyróżniają oni cztery metody modelowania powierzchni terenu:

W pierwszej powierzchnia terenu jest aproksymowana wielomianem stopnia piątego. Do drugiej grupy zostały zaliczone metody interpolacji, gdzie wykorzystane równanie powierzchni ma postać:

gdzie:

U i **V** reprezentują wektory dwóch współrzędnych (**U** i **V**) zaś S jest odpowiednio dobraną macierzą. Macierz H zdefiniowana jest przez cztery punkty narożne elementu siatki i pochodne **U** i **V** w tych punktach.

$$f(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_1 \left[(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2\right] x \cdot \ln\left[(x-x_i^i)^2 + (y-y_i)^2\right] + ax + bx + c \qquad (6)$$

Współczynniki λ_i, a, b, c otrzymywane są z odpowiednich warunków. W trzeciej grupie metod powierzchnia jest wyrażona równaniem:

$$f(x,y) = \sum_{i=1}^{n} W_i(x,y)Z_i / \sum_{i=1}^{n} W_i(x,y) \qquad (7)$$

gdzie:
$W_i(x,y) = 1/r_i^4$,

$r_i(x,y) = \sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2}$

Dla funkcji (7) spełniony jest warunek $f(x_i,y_i) = Z_i$, a pochodne cząstkowe df(dx i df)dy są równe zero w punktach odniesienia. W czwartej grupie zostały wykorzystane wielomiany rozpięte nad elementami siatki.

Szwajcarski system DEMPAC (1986) bazuje na siatce kwadratów, dla której punkt wyznaczany *P* w elemencie siatki jest obliczany z wzoru:

$$\vec{\mathbf{P}} = \vec{\mathbf{U}}\,\mathrm{SHS}\vec{\mathbf{V}} \qquad (8)$$

Metodę aproksymacji powierzchni przez zastosowanie wstępnie wielomianu niskiego stopnia, a następnie rozwijanie tego modelu w model złożony przy użyciu funkcji wyższego stopnia proponuje Piasek (1988, 1991).

Z powyższego, ogólnego przeglądu metod można sądzić, że lepsze rezultaty dają metody zakładające statystyczny charakter informacji o wzajemnej zależności wysokości punktów położonych blisko siebie w terenie, to jest uwzględniających korelacje pomiędzy poszczególnymi punktami.

Według Sünkela (1980) i Kubika (1988), pomierzone wysokości terenu można traktować jako zmienne losowe. Wysokość dowolnego punktu może być określona jako funkcja trzech składników:

- powierzchni aproksymującej w znacznym przybliżeniu powierzchnię typograficzną terenu zwanej trendem (na ogół przyjmuje się powierzchnię określoną odpowiednim wielomianem),
- wysokości punktu, który w literaturze nazywany jest często sygnałem,

- błędu pomiaru wynikającego z błędów obserwatora i błędów instrumentalnych oraz występowania form mikrorzeźby terenu, tzw. chropowatości terenu.

Jeżeli w terenie pomierzono q charakterystycznych punktów o współrzędnych przestrzennych x, y, z, przy czym wysokość dowolnego punktu z_i została określona z błędem n_i, to można napisać, że

$$Z = AX + s + n \qquad (9)$$

gdzie:

X – macierz współrzędnych płaskich wykorzystanych przy określaniu współczynników wielomianu aproksymującego, odpowiedniego stopnia

$X = [1, X, Y, XY, X^2, Y^2, \ldots]^T$

A – macierz zawierająca współczynniki wielomianu aproksymującego, która jest tak dobrana, aby suma kwadratów odstępów od powierzchni topograficznej dążyła do minimum,

s_i – wartość skorelowana wysokości w punkcie i (sygnał),

n_i – błąd pomiaru w punkcie i.

Do tej grupy metod, oprócz już wymienionych (np. Kraus 1971; Schut 1976), można zaliczyć program SCOP (Stanger 1976; Molnar 1992). Program ten reaguje na grube błędy danych, przy czym stopień wrażliwości jest zależny od wielkości deklarowanego stopnia filtracji danych (dokładności danych – błędu pomiaru). Badania prowadzone w warunkach krajowych (Borowiec, Pyka 1994) wskazały na dużą uniwersalność tego programu, ponieważ uwzględnia on w opracowaniach warstwicowych formy terenu o charakterze linii nieciągłości. Jednak specyficzną cechą programu SCOP jest konieczność zapewnienia jednakowej gęstości danych (punktów modelu-odniesienia), niezależnie od lokalnego ukształtowania terenu. Należy zauważyć, że przy aproksymacji powierzchni terenu metodami uwzględniającymi korelacje pomiędzy pomierzonymi punktami modelu, jakość opracowania zależeć będzie w dużym stopniu od doboru odpowiedniej funkcji korelacji.

Podsumowanie

Na podstawie wybranych metod numerycznej aproksymacji powierzchni terenu w opracowaniach warstwicowych metodami komputerowymi wydaje się uzasadniony pogląd, że lepsze rezultaty dają metody zakładające statystyczny charakter informacji o wzajemnej zależności wysokości punktów położonych blisko siebie w terenie, to jest uwzględniających korelacje pomiędzy punktami modelu.

Do tej grupy metod można zaliczyć renomowany program SCOP. Reaguje on na duże błędy danych w zależności od zadeklarowanego stopnia filtracji danych – dokładności danych (błędu pomiaru). Uniwersalność tego programu wynika również stąd, że uwzględnia on także formy terenu o charakterze linii nieciągłości (np. skarpy).

W różnego rodzaju zagadnieniach szczegółowych są i będą stosowane z powodzeniem różne metody aproksymacji powierzchni terenu, między innymi przedstawione wyżej. Jednak można sądzić, że metody aproksymacji uwzględniające korelacje pomiędzy punktami terenu zajmą z czasem pozycję dominującą. Należy również zauważyć, że jakość opracowania zależeć będzie w dużym stopniu od doboru odpowiedniej funkcji korelacji.

Literatura

BOROWIEC M., PYKA K. 1994: *Doświadczenia Zakładu Fotogrametrii i Informatyki Teledetekcyjnej AGH w zakresie NMT*. Konf. NMT i jego wykorzystanie, Rogów.

DEMPAC 1986: *Digital Elevation Model Package by digiplan*. AG Zurich, Switzerland.

GAŹDZICKI J. 1975: *Informatyka w geodezji i kartografii*. PPWK, Warszawa.

GEDYMIN W., KOPCEWICZ A. 1974: *STRADA – system numerycznego przetwarzania danych geodezyjnych dla celów projektowania dróg*. Przegl. Geodez. nr 2 i 3, Warszawa.

JUNKINS J., JANCAITIS J. 1974: *Analitic surface modelling techniques for automatic mapping*. Proc. of the ACSM, 34th annual Meeting, St. Louis.

KOKKO T., WÜTA E. 1967: *The development of highway planning methods in Finland*. Paris.

KRAUS K. 1971: *Automatische Berechnung des digitale Höhenlinien*. Z. Vermessunswes. nr 6.

KUBIK P. 1988: *Automatyczne pozyskiwanie map warstwicowych za pomocą drukarki wierszowej*. Przegl. Geodez. nr 2, Warszawa.

MOLNAR L. 1992: *Principles for New Edition of the Digital Elevation System SCOP*. ISPRS Congress. Commission IV, Washington.

NAKAMURA H. 1968: *On digital terrain models*. XIth Congr. of Fhotogrammetrie, Leusanne.

NORDISK ADB 1968: *Programmbeschreibung für das digitale Gelände – model*. Stockholm.

PIASEK Z. 1988: *Numeryczny model wysokości w procesie inwestycyjnym na etapie zastosowań do obliczeń kubaturowych*. Konf. Karniowice.

PIASEK Z. 1991: *O pewnej metodzie numerycznego modelowania powierzchni terenu*. PAN, Kraków.

PIASEK Z., MILBERT S., PIERZCHAŁA H. 1981: *Przegląd numerycznych modeli terenu*. Zesz. Nauk. AGH – Geodezja, z. 62.

SCHUT G.H. 1976: *Review of interpolation methods for digital terrain models*. XIIIth Congress of the International Society for Photogrammetry, Helsinki.

SIERBINIUK C.H. i in. 1990: *Metody modelirowania gieopolitej po dannym w nieregularno rozpołożiennych toczkach*. Geodezja i Kartografia nr 11, Moskwa.

STRANGER W. 1976: *The Stuttgart Contour program SCOP–further development and reviev of its application*. Stuttgart.

SÜNKEL K. 1980: *General Surface representation Modele Designed for Geodesy*. The Ohio State University, Report No 292.

WYSOCKI J. 1981: *Comparative analysis of chosen methods of testing contour lines*. Ann. Wars. Agricult. Univ. SGGW-AR, Land Reclam. 19.

WYSOCKI J. 1987: *Problemy dokładności nowoczesnych technik opracowania wielkoskalowych map warstwicowych pod kątem potrzeb wodnomelioracyjnych*. Wyd. SGGW, Warszawa.

WYSOCKI J. 1987: *On the accuracy of the photogrammetric digital determination of elevation* Ann. Wars. Agric. Univ. SGGW, Land Reclam. 23.

WYSOCKI J. 1994: *Wielkoskalowe opracowania warstwicowe z wykorzystaniem metod numerycznego modelu terenu*. Mat. konf., NMT i jego wykorzystanie, Rogów.

WYSOCKI J. 1995: *Porównanie dokładności wybranych metod komputerowych i analogowych wielkoskalowych opracowań warstwicowych*. Przegl. Geodez. nr 5.

Summary

Problem of the numerical approximation of the area surface in the computer methods of working out contour lines. In the paper are presented the methods of the numerical approximation of the area surface

in the computer methods of working out contour lines. It follows from the investigations that the methods which take into consideration corelation between terrain points are more universal.

Author's address
J. Wysocki
Warsaw Agricultural University – SGGW
02–787 Warszawa, ul. Nowoursynowska 166
Poland