Wojciech HYB
Katedra Zastosowań Matematyki SGGW
Department of Applied Mathematics

Matematyczne aspekty wyznaczania parametrów hydraulicznie najkorzystniejszego koryta o przekroju parabolicznym i trapezowym

Mathematical aspects of determination of the parameters of the best hydraulic channel shape for parabolic and trapezoidal sections

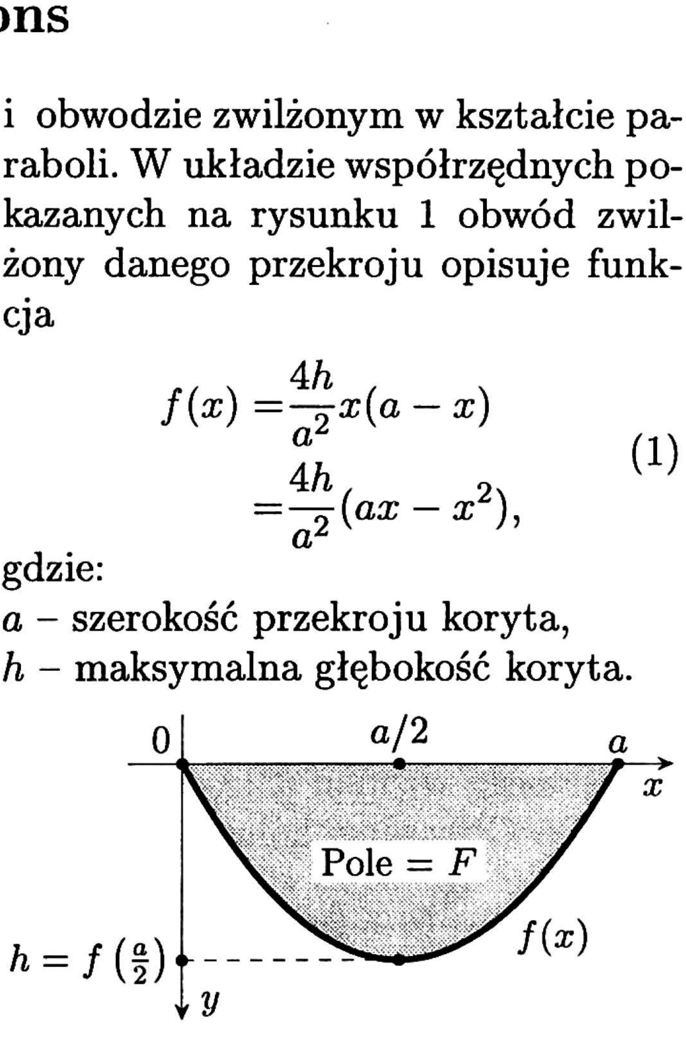
Wyznaczenie parametrów poprzecznego przekroju koryta, spełniającego warunek maksymalnego natężenia przepływu w ruchu ustalonym przy danym kształcie i polu powierzchni tego przekroju, jest zadaniem często rozwiązywanym w praktyce. Teoretyczne sformułowanie problemu sprowadza się do poszukiwania minimum funkcji określającej długość obwodu zwilżonego przekroju. W artykule przedstawiono metodykę obliczania parametrów hydraulicznie najkorzystniejszego koryta o przekroju parabolicznym i trapezowym.

Hydraulicznie najkorzystniejszy przekrój paraboliczny

Rozważmy przekrój poprzeczny koryta o danym polu powierzchni F i obwodzie zwilżonym w kształcie paraboli. W układzie współrzędnych pokazanych na rysunku 1 obwód zwilżony danego przekroju opisuje funkcja

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{4h}{a^2} x(a-x) \\ &= \frac{4h}{a^2}(ax - x^2), \end{aligned} \tag{1}$$

gdzie:
a – szerokość przekroju koryta,
h – maksymalna głębokość koryta.



Rys. 1. Paraboliczny przekrój koryta
Fig. 1. Parabolic section of the channel

Wyznaczenie parametrów hydraulicznie najkorzystniejszego koryta parabolicznego polega na wyznaczeniu wartości dodatnich a i h tak, aby

1° pole ograniczone wykresem funkcji f dla $x \in [0, a]$ i osią $0X$ wynosiło F tzn. $\int_0^a f(x)dx = \frac{2}{3}ah = F$,

2° długość wykresu funkcji f dla $x \in [0, a]$ była możliwie najmniejsza, co sprowadza się do wyznaczenia najmniejszej wartości funkcji określającej długość krzywej (Janowski 1970)

$$L = L(f, a) = \\ = \int_0^a \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx\,.$$

Jeśli podstawić teraz $A = \frac{4h}{a}$, to $A > 0$ i na mocy 1° oraz wzoru (1) otrzymujemy

$$f(x) = \frac{A}{a} x(a - x)$$

oraz

$$F = \frac{Aa^2}{6}\,.$$

Zatem

$$a = \sqrt{6F/A} \tag{2}$$

Wyznaczymy teraz wartość $L(f, a)$ dla danej funkcji f (wzór (1)) oraz a określonego wzorem (2) (patrz warunek 2°). Obliczamy kolejno:

$$f'(x) = \frac{A}{a}(a - 2x),$$

$$L(f, a) = \int_0^a \sqrt{1 + \frac{A^2}{a^2}(a - 2x)^2}\, dx\,.$$

W ostatniej całce podstawiamy $u = \frac{A}{a}(a - 2x)$, co przeprowadza przedział całkowania $[0, a]$ na przedział $[-A, A]$ dla zmiennej u. Ponieważ $x = \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{a}{A}u - a\right)$, to $dx = -\frac{1}{2}\frac{a}{A}du$. Zatem długość obwodu zwilżonego przekroju

$$L(f, a) = \int_{-A}^{A} \sqrt{1 + u^2}\, \frac{a}{2A}\, du = \\ = \frac{a}{A} \int_0^A \sqrt{1 + u^2}\, du$$

na mocy parzystości funkcji podcałkowej. Ponieważ

$$\int \sqrt{1 + u^2} du = \\ = \frac{1}{2}\left[u\sqrt{1 + u^2} + \right. \\ \left. + \ln\left(u + \sqrt{1 + u^2}\right)\right] + C, \tag{3}$$

to

$$L(f, a) = \frac{a}{2A}\left[u\sqrt{1 + u^2} + \right. \\ \left. + \ln\left(u + \sqrt{1 + u^2}\right)\right]\Big|_0^A = \\ = \frac{a}{2A}\left[A\sqrt{1 + A^2} + \right. \\ \left. + \ln\left(A + \sqrt{1 + A^2}\right)\right].$$

Stosując wzór (2) otrzymujemy:

$$L(f, a) = \\ = \frac{\sqrt{6F}}{2A^{3/2}}\left[A\sqrt{1 + A^2} + \right. \\ \left. + \ln\left(A + \sqrt{1 + A^2}\right)\right]. \tag{4}$$

Ponieważ $\frac{\sqrt{6F}}{2}$ jest liczbą stałą, to warunek 2° sprowadza się do znalezienia najmniejszej wartości funkcji:

$$g(A) = \frac{1}{A^{3/2}}\left[A\sqrt{1+A^2} + \ln\left(A+\sqrt{1+A^2}\right)\right] \tag{5}$$

określonej dla $A > 0$ i różniczkowalnej. Obliczamy jej pochodną.

$$g'(A) = -\frac{\frac{3}{2}}{A^{5/2}}\left[A\sqrt{1+A^2} + \ln\left(A+\sqrt{1+A^2}\right)\right] + \frac{1}{A^{3/2}}\cdot 2\sqrt{1+A^2}$$

(wzór (3)). Zatem

$$g'(A) = \frac{1}{2A^{5/2}}\left[-3A\sqrt{1+A^2} - 3\ln\left(A+\sqrt{1+A^2}\right) + 4A\sqrt{1+A^2}\right] = \frac{1}{2A^{5/2}}\left[A\sqrt{1+A^2} - 3\ln\left(A+\sqrt{1+A^2}\right)\right].$$

Niech

$$h(A) = A\sqrt{1+A^2} + -3\ln\left(A+\sqrt{1+A^2}\right) \tag{6}$$

dla $A \geqslant 0$.

Zatem $h(0) = 0$ oraz

$$h'(A) = \sqrt{1+A^2} + \frac{A^2}{\sqrt{1+A^2}} - \frac{3}{\sqrt{1+A^2}} = \frac{1+A^2+A^2-3}{\sqrt{1+A^2}} = \frac{2(A^2-1)}{\sqrt{1+A^2}}.$$

Stąd wynika, że $h'(A) < 0$ dla $A \in (0,1)$ oraz $h'(A) > 0$ dla $A > 1$. To pokazuje, że dla $A = 1$ funkcja h osiąga wartość minimalną, która wynosi $h(1) = \sqrt{2} - 3\ln(1+\sqrt{2}) \approx -1,23$. Ponieważ dla $A > 1$ funkcja h jest rosnąca oraz $h(5) \approx 18.56 > 0$, to dla $A > 0$ funkcja h ma dokładnie jedno miejsce zerowe A_0, ponadto $A_0 > 1$. Zatem $h(A) < 0$ dla $A \in (0, A_0)$ oraz $h(A) > 0$ dla $A > A_0$. Stąd wynika, że $g'(A) < 0$ dla $A \in (0, A_0)$ oraz $g'(A) > 0$ dla $A > A_0$. Zatem w punkcie A_0 funkcja g ma minimum i ponieważ jest to jedyne ekstremum funkcji g, to dla $A = A_0$ funkcja g przyjmuje wartość najmniejszą. Na podstawie wzoru (6) liczba A_0 spełnia równanie:

$$A_0\sqrt{1+A_0^2} = 3\ln\left(A_0+\sqrt{1+A_0^2}\right).$$

Wyznaczenie A_0 metodą przybliżoną daje wynik $A_0 \approx 1,946$. Wówczas na podstawie wzorów (2) i (4) otrzymujemy:

$$a = \sqrt{6F/A_0} \approx 1,75592\sqrt{F}.$$

$$L(f,a) = \frac{a}{2A_0}\left[A_0\sqrt{1+A_0^2} + \ln\left(A_0+\sqrt{1+A_0^2}\right)\right] \approx \approx 2,5612\sqrt{F},$$

a funkcja f ma postać (wzór (1))

$$f(x) = \frac{A_0}{a} x(a-x) \approx$$
$$\approx \frac{1,10825x}{\sqrt{F}}(1,75592\sqrt{F} - x).$$

Maksymalna głębokość parabolicznego przekroju koryta

$$h = f\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{A_0 a}{4} \approx 0,85425\sqrt{F}.$$

Na podstawie przeprowadzonych analiz dla koryta o przekroju parabolicznym, szerokości a i maksymalnej głębokości h, można podać następujące równania i zależności:

1° równanie krawędzi koryta ma postać $f(x) = \frac{4h}{a^2}x(a-x)$, $x \in [0,a]$;

2° podstawiając $A = \frac{4h}{a}$ otrzymujemy:
pole przekroju poprzecznego koryta $F = \frac{Aa^2}{6} = \frac{2}{3}ah$,
obwód zwilżony

$$0_z = L(f,a) = \frac{a}{2A}\left[A\sqrt{1+A^2} + \ln\left(A + \sqrt{1+A^2}\right)\right],$$

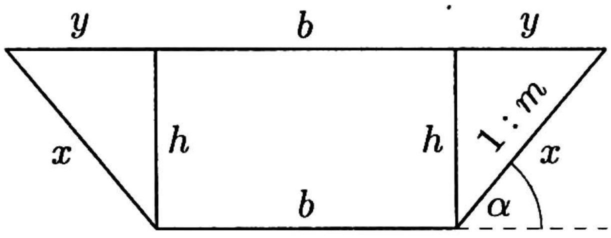
promień hydrauliczny

$$R_h = \frac{F}{0_z} = \frac{4}{3} \cdot \frac{A}{A\sqrt{1+A^2} + \ln\left(A+\sqrt{1+A^2}\right)} \cdot h; \tag{7}$$

3° dla hydraulicznie najkorzystniejszego koryta o przekroju parabolicznym i danym polu przekroju F ($A = A_0 \approx 1,946$) otrzymuje się następujące parametry przekroju: $a \approx 1,75592\sqrt{F}$; $h \approx 0,85425\sqrt{F}$; $O_z = L \approx 2,5612\sqrt{F}$; $R_h \approx 0,39044\sqrt{F} \approx 0,45706h$.

Hydraulicznie najkorzystniejszy przekrój trapezowy

Rozważmy teraz koryto, którego przekrój poprzeczny ma kształt trapezu równoramiennego o danym polu powierzchni F. Niech b oznacza szerokość dna koryta, h jego głębokość i m nachylenie skarp koryta (rys. 2).



Rys. 2. Trapezowy przekrój koryta
Fig. 2. Trapezoidal section of the channel

Na podstawie zależności trygonometrycznej $m = \operatorname{ctg}\alpha$. Ponadto $y = mh$, $x = \sqrt{h^2+y^2} = h\sqrt{1+m^2}$, pole powierzchni przekroju $F = (b+ +y)h = (b+mh)h$. Z ostatniej równości obliczamy $\frac{F}{h} = b + mh$, stąd

$$b = \frac{F}{h} - mh \tag{8}$$

Obwód zwilżony wynosi $L = 2x + b$. Podstawiamy wyznaczone b oraz x do wzoru na L i otrzymujemy

$$L = \frac{F}{h} - mh + 2h\sqrt{1+m^2} = \frac{F}{h} + h(2\sqrt{1+m^2} - m). \tag{9}$$

Rozwiązanie problemu polega na wyznaczeniu najmniejszej wartości funkcji L określonej wzorem (9) i zależnej od zmiennych h oraz m. Ze względu na definicję m mamy $m \geqslant 0$.

Ponadto $h > 0$ oraz $b > 0$. Zatem na podstawie wzoru (8) jest $h < \sqrt{\frac{F}{m}}$ dla $m > 0$. Jeśli dla $m = 0$ przyjąć wartość $\sqrt{\frac{F}{m}} = \infty$, to otrzymamy zbiór określoności funkcji L w postaci

$$\left\{(m,h) \in \mathbb{R}^2 : \right. \\ \left. : 0 < h < \sqrt{\frac{F}{m}}, m \geqslant 0\right\} \tag{10}$$

Wyznaczymy minimum globalne funkcji L w sposób nietypowy. Dla ustalonego $m \geqslant 0$ niech $a = 2 \cdot \sqrt{1+m^2} - m$. Łatwo zauważyć, że $a > m$. Wówczas ze wzoru (9) wynika, że

$$L = f(h) = \frac{F}{h} + ha, \\ h \in \left(0, \sqrt{\frac{F}{m}}\right) \tag{11}$$

skąd $f'(h) = -\frac{F}{h^2} + a$. Zatem $f'(h) = 0 \Leftrightarrow h = \pm\sqrt{\frac{F}{a}}$ i ze względu na warunek dla h otrzymujemy $h_0 = \sqrt{\frac{F}{a}}$. Ponieważ $a > m$, to $h_0 = \sqrt{\frac{F}{a}} < \sqrt{\frac{F}{m}}$, a zatem h_0 należy do dziedziny funkcji f. Obliczamy drugą pochodną: $f''(h) = \frac{2F}{h^3}$. Stąd wynika, że $f''(h_0) > 0$ a zatem dla $h = h_0$ jest minimum funkcji f. Ponieważ w rozpatrywanym przedziale dla h funkcja f ma tylko jedno ekstremum minimum, to dla $h = h_0$ funkcja f przyjmuje wartość najmniejszą. Na podstawie wzoru (11)

$$\begin{aligned} L_0 =& f(h_0) = \frac{F + h_0^2 a}{h_0} = \\ =& \frac{2F}{\sqrt{\frac{F}{a}}} = 2\sqrt{Fa} = \\ =& 2\sqrt{F(2\sqrt{1+m^2} - m)}\,. \end{aligned} \tag{12}$$

Wartość L_0 jest najmniejszą wartością funkcji L określonej wzorem (9) przy ustalonym $m \geqslant 0$. Wyznaczymy teraz najmniejszą wartość funkcji L_0 określonej wzorem (12) dla $m \geqslant 0$. Jest to równoznaczne z wyznaczeniem najmniejszej wartości funkcji różniczkowalnej:

$$a(m) = 2\sqrt{1+m^2} - m, \\ \text{dla } m \geqslant 0 \tag{13}$$

Stąd wynika, że

$$\begin{aligned} a'(m) =& \frac{2m}{\sqrt{1+m^2}} - 1 = \\ =& \frac{2m - \sqrt{1+m^2}}{\sqrt{1+m^2}} = \\ =& \frac{4m^2 - (1+m^2)}{\sqrt{1+m^2}(2m + \sqrt{1+m^2}} = \\ =& \frac{3m^2 - 1}{\sqrt{1+m^2}(2m + \sqrt{1+m^2})}\,. \end{aligned}$$

Zatem $a'(m) = 0 \Leftrightarrow m = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$ i ponieważ $m \geqslant 0$, to $m_0 = \frac{\sqrt{3}}{3}$ jest jedynym punktem, w którym może być ekstremum funkcji a. Ponieważ mianownik $a'(m)$ jest stale dodatni, to $a'(m) > 0$ ($a'(m) < 0$) $\Leftrightarrow$ $3m^2 - 1 > 0$ ($3m^2 - 1 < 0$). Stąd łatwo sprawdzić, że dla $m \in [0, \frac{\sqrt{3}}{3})$ jest

$a'(m) < 0$, a dla $m \in (\frac{\sqrt{3}}{3}, \infty)$ jest $a'(m) > 0$. Zatem w punkcie $m_0 = \frac{\sqrt{3}}{3}$ jest minimum funkcji a i ponieważ jest to jedyne ekstremum funkcji a dla $m \geqslant 0$, to w $m = m_0$ funkcja a przyjmuje wartość najmniejszą. Wówczas $a = 2\sqrt{1 + \frac{3}{9}} - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$ oraz $h = \sqrt{\frac{F}{a}} = \sqrt{\frac{F}{\sqrt{3}}}$.

Z przedstawionych wyżej rozważań wynika natychmiast, że najmniejsza wartość L jest dla $m = \frac{\sqrt{3}}{3}$ i $h = \sqrt{\frac{F}{\sqrt{3}}}$. Zatem $b = \frac{F}{h} - mh = \sqrt{\frac{4F}{3\sqrt{3}}}$, $x = \sqrt{\frac{F}{\sqrt{3}}}\sqrt{1 + \frac{3}{9}} = \sqrt{\frac{4F}{3\sqrt{3}}}$, $L = \frac{F}{h} + ah = 2\sqrt{Fa} = 2\sqrt{\sqrt{3}F}$, a górna podstawa trapezu $b + 2mh = 4\sqrt{\frac{F}{3\sqrt{3}}} = 2b$. Wówczas $\operatorname{ctg}\alpha = m = \frac{\sqrt{3}}{3}$, a więc $\alpha = 60°$.

Taki sposób rozwiązania zadania ma dwie zalety. Pokazuje łatwo, że w danym punkcie jest najmniejsza wartość funkcji L. Ponadto daje możliwość wyznaczenia minimum funkcji L przy ustalonej wartości parametru m (tzn. przy ustalonym nachyleniu skarp kanału). Przy ustalonym m i wartości L_o obliczonej wzorem (12) promień hydrauliczny

$$R_h = \frac{F}{L_o} = \frac{F}{2\sqrt{Fa}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{F}{a}} = \frac{1}{2}h_o.$$

Jeśli ustalić $h > 0$ i poszukać najmniejszej wartości L w zależności od m, to zadanie sprowadza się do wyznaczenia minimalnej wartości funkcji $a(m)$ określonej wzorem (13) (por. wzór 9). Stąd łatwo otrzymamy wartość $m = \frac{\sqrt{3}}{3}$, a więc na podstawie wzoru (10) mamy $h < \sqrt{F\sqrt{3}}$. Jeśli zatem h nie spełnia ostatniej nierówności, to L jest malejącą funkcją zmiennej m i osiągnie wartość najmniejszą dla takiej wartości m, dla której $b = 0$.

Summary

Mathematical aspects of determination of the parameters of the best hydraulic channel shape for parabolic and trapezoidal sections. Let us fix the hydraulic slope, roughness coefficient and cross-sectional area of the channel. Then, by Chezy's formula, the discharge is a decreasing function of the wetted perimeter. In the present paper we determine the parameters of the parabolic and trapezoidal sections of these channel for which the wetted perimeter is minimal. We show that the considered functions attain lower bound at the determined points and we give formulas for practical calculations.

Literatura

JANOWSKI W. 1970: *Matematyka*, t. 2, PWN.

SKIBIŃSKI J. 1969: *Hydraulika*, PWN

SZUSTER A. i UTRYSKO B. 1992: *Hydraulika i podstawy hydromechaniki*, Wyd.PW

Author's address

W. Hyb
Warsaw Agricultural University – SGGW
02-787 Warszawa
ul. Nowoursynowska 166
Poland