Helena KAZIEKO, Lucyna KAZIEKO
Katedra Zastosowań Matematyki SGGW

W poszukiwaniu modelu matematycznego

Zastosowanie matematyki do badania zjawisk rzeczywistych polega przede wszystkim na tym, że dla danego zagadnienia poszukuje się modelu matematycznego, który można przyjąć jako opisujący dane zjawisko z dostateczną precyzją. Po wyborze modelu formułuje się dla niego właściwości formalne, które mają dać ilościowy i jakościowy obraz rzeczywistego zjawiska.

Teoria matematyczna i rozważania matematyczne powinny spełniać warunek istnienia i jednoznaczności rozwiązań. Dowód istnienia rozwiązania może wskazywać drogę do rozwiązań numerycznych. Praktyka żąda od matematyki takich rozwiązań, które są możliwie łatwe do obliczeń numerycznych i z których można wnioskować o zależności otrzymanego rozwiązania od parametrów występujących w rozważanym modelu.

Nie próbując reformować całości zagadnień matematycznych, stosowanych przy rozwiązaniu problemów praktycznych, ograniczymy się do kilku gałęzi mechaniki ośrodków ciągłych, hydrodynamiki i aerodynamiki.

W mechanice ośrodków ciągłych jest brak ogólnej teorii obejmującej wszystkie bądź przynajmniej główne zagadnienia hydro- i aerodynamiczne. Przyczyna tkwi niewątpliwie w bardzo skomplikowanych fizycznych własnościach płynów (tj. cieczy i gazów). Dlatego różne grupy zagadnień wymagają – celem otrzymania zgodnych z doświadczeniem wyników – wielu zupełnie odmiennych wyjściowych założeń upraszczających. Tym tłumaczy się fakt, że mechanika ośrodków ciągłych rozpada się w gruncie rzeczy na wiele dużych samodzielnych działów, rozwijających się w znacznym stopniu niezależnie od siebie, pomimo że tematy występujące w poszczególnych działach częściowo pokrywają się. Głównymi takimi działami są: hydrodynamika cieczy rzeczywistej, hydrodynamika płynów nieściśliwych i nielepkich, hydrodynamika cieczy lepkich, dynamika gazów itd. Te same działy mogą występować w aerodynamice i hydrodynamice, np. odpływy wywołane poruszającymi się w płynie ciałami.

Każdy z tych działów wymaga innego aparatu analitycznego, inny aparat matematyczny stosuje się przy badaniu przepływów płaskich, inny przy przepływach przestrzennych, bez porównania większe trudności występują przy analizie przepływów nie ustalonych niż ustalonych. Odmienne problemy stanowią ruchy falowe płynów, zupełnie swoisty charakter wykazują zjawiska turbulencji.

Zresztą uzasadnienia tak znacznego podziału mechaniki ośrodków ciągłych szukać należy nie tylko w zasadniczych różnicach tkwiących w samych założeniach wyjściowych. W myśl tych założeń w poszczególnych działach buduje się odpowiednie schematy teoretyczne badanych zjawisk, opierając je często na zupełnie odmiennych modelach ośrodka ciągłego. Klasyfikacja ta uzasadniona jest również odmiennością metod matematycznych stosowanych przy rozwiązywaniu tak wystylizowanych zagadnień. I właśnie ta ostatnia okoliczność ma dla nas, matematyków, największe znaczenie.

Podstawę teoretyczną każdego z wymienionych działów stanowi odpowiadające mu równanie różniczkowe rzędu drugiego o pochodnych cząstkowych lub układ takich równań różniczkowych.

Hydrodynamiczne równania różniczkowe ruchu zawierają cztery elementy charakterystyczne zarówno z punktu widzenia fizycznego, jak i matematycznego. Z jednej bowiem strony elementy te reprezentują cztery rodzaje sił: siły bezwładności, siły zewnętrzne (np. grawitacyjna), ciśnienie oraz siły tarcia wewnętrznego, wywołane lepkością płynu. Z drugiej zaś strony, w zależności od wyrazów występujących w równaniu różniczkowym, zmienia się sam typ równania i co za tym idzie – trudności matematyczne, z którymi spotykamy się przy poszukiwaniu rozwiązań.

Jeżeli nie pominiemy żadnej z wymienionych sił, otrzymujemy znane nieliniowe równania Naviera-Stokesa. Stanowią one matematyczny opis laminarnych przepływów płynu lepkiego. Równania te w ogólnej postaci niełatwo poddają się matematycznej analizie. Były one i są nadal przedmiotem dociekań matematycznych. Tylko w nielicznych najprostszych przypadkach udało się wyznaczyć rozwiązanie w postaci efektywnej (np. dla przepływów prostoliniowych oraz niektórych przepływów płaskich).

Charakterystyczne dla omawianych zagadnień – zwłaszcza gdy są one natury aerodynamicznej, a więc gdy idzie o wyznaczenie własności opływów dookoła danych brył – jest to, że trudności analityczne tkwią nie tyle w złożoności wyjściowych równań różniczkowych Naviera-Stokesa, ile raczej w konieczności spełnienia swoistych warunków brzegowych spowodowanych przyleganiem płynu lepkiego do ścianek opływanej przeszkody. W ujęciu formalnym występuje to najwyraźniej, gdy od równań różniczkowych z danymi warunkami brzegowymi przechodzimy do równoważnych im równań całkowych. Znacznie łatwiej jest podać przykłady funkcji czyniących zadość równaniu Naviera-Stokesa, niż znaleźć rozwiązanie tego równania spełniające żądane warunki brzegowe (chyba że te ostatnie będą wyjątkowo proste). Trudności analityczne powiększają się jeszcze dla przepływów nie ustalonych.

Trudności, jakie napotykamy przy poszukiwaniu ścisłych rozwiązań równań Naviera-Stokesa, powodują, że dla wielu niezmiernie ważnych opływów tych ścisłych rozwiązań nie udało się znaleźć. Dla przykładu można podać tak elementarne zadanie jak ruch kuli w płynie lepkim.

Trudności natury teoretycznej skłaniają do wprowadzenia nieraz daleko idących uproszczeń bądź samych równań, bądź warunków brzegowych. Dwa najbardziej typowe uproszczenia polegają na zaniedbaniu w równaniach wyjściowych wyrazów opisujących albo siły bezwładności, albo siły lepkości (w odniesieniu do ostatniej siły – zależnie od tzw. liczby Reynoldsa). Przy całkowitym zaniedbaniu sił lepkości równania hydrodynamiczne Naviera-Stokesa przekształcają się w równania płynu idealnego – równania Eulera.

Aby jednak w ten sposób dojść do radykalnego uproszczenia całego zadania matematycznego trzeba niezależnie od uproszczeń równań różniczkowych zmienić też warunki brzegowe na takie, jakie odpowiadają założeniom płynu idealnego, który zamiast przylegać, ślizga się po ściankach opływanej przeszkody. Gdy przyjmiemy tego rodzaju założenia, wyznaczenie odpowiednich opływów ustalonych przybiera bądź od razu postać typowego zagadnienia Dirichleta czy Neumanna bądź też może być do tej postaci sprowadzone. Tak właśnie postępuje się np. przy wyznaczaniu, w myśl teorii Helmholtza, powierzchni nieciągłości prędkości, ograniczających tzw. „obszar martwy", tworzący się za opływaną przeszkodą. Podobnie powstaje teoria ruchu ślizgowego po powierzchni cieczy.

Takie pośrednie czy bezpośrednie sprowadzanie zasad hydro- i aerodynamicznych do zagadnienia Dirichleta lub Neumanna, czy uogólniającego je zagadnienia Riemanna-Hilberta, stwarza możność stosowania bardzo rozwiniętych i skutecznych środków analizy matematycznej: teorii potencjału, równań całkowych, teorii funkcji ortogonalnych oraz rozmaitych szczegółowo opracowanych funkcji specjalnych. Jeśli zaś idzie o przepływy płaskie, to można poszukiwać rozwiązań również metodami teorii funkcji holomorficznych zmiennej zespolonej oraz teorii odwzorowań konforemnych. W grę przy tym wchodzić mogą zarówno obszary jednospójne, jak i wielospójne (np. odpływy dookoła wielopłatów).

Dla zastosowań technicznych niezmiernie cenną własnością wyżej wspomnianych klasycznych już metod analizy matematycznej jest to, że pozwalają one niejednokrotnie wyrażać szukane rozwiązania w postaci zamkniętej, przejrzystej i stosunkowo prostej. Okoliczność taka ogromnie ułatwia dyskusję przydatności praktycznej tych rozwiązań. Nadmieńmy, że również niektóre przepływy pierwszej kategorii, tj. przepływy powolne dają się sprowadzić do analogicznej postaci formalnej. Są to ważne dla budownictwa wodnego laminarne przepływy występujące podczas filtracji cieczy lub gazów przez jednorodne warstwy gruntu. Jeżeli natomiast filtracja ma przebieg nie ustalony, dochodzi się do równania różniczkowego cząstkowego rzędu drugiego typu hiperbolicznego – takiego samego jak w teorii przewodnictwa cieplnego.

Wracając do przepływów o dużych liczbach Reynoldsa należy pamiętać, że nie zawsze wolno stosować dla całego przepływu prosty schemat płynu nieściśliwego. Chodzi o to, że w bezpośrednim sąsiedztwie „opływanych" ścianek nawet słaba lepkość płynu daje znać o sobie w postaci tzw. „warstwy przyściennej". W przekroju poprzecznym takiej bardzo cienkiej warstewki przyściennej prędkość zmienia się od zera w pobliżu ścianki do wartości – na granicy warstwy – odpowiadającej przepływowi płynu idealnego. Ponieważ zmiany te zachodzą na bardzo krótkim odcinku, powstają w warstwie przyściennej – nawet przy małej lepkości – siły tarcia rzędu co siły bezwładności. Stąd wniosek, że w opływach odbywających się przy dużych liczbach Reynoldsa nie można zaniedbywać sił lepkości działających w bezpośrednim sąsiedztwie ścianek. Istnieje rozbudowana teoria matematyczna laminarnej warstwy przyściennej. Podstawę stanowi tutaj równanie różniczkowe typu parabolicznego i równania Prandtla-Misesa.

Zauważmy jednak, że obok laminarnej warstwy przyściennej tworzy się w pewnych warunkach warstwa turbulentna, w której rządzą zupełnie inne prawa. Ujęcie matematyczne warstwy przyściennej turbulentnej napotyka wciąż trudności wynikające ze złożoności opisu ruchów turbulentnych. Wydaje się, że najlepszą metodę, jak do tej pory, stanowią metody statystyki matematycznej. Mimo wysiłków najwybitniejszych matematyków nie udało się dotychczas zrezygnować ze „wzorów empirycznych" o ograniczonym zakresie stosowalności.

W teoriach matematycznych częściej opisuje się z matematyczną precyzją przepływy ustalone, gdyż do tego wystarcza „prostszy" aparat matematyczny niż do opisów przepływów nie ustalonych. Tymczasem w przyrodzie nie ma przepływów ustalonych. Przepływy ustalone powinny być traktowane jedynie jako pewnego rodzaju uproszczony schemat procesów rzeczywistych jako postać graniczna przebiegu tych procesów. Jednakże, aby przekonać się, czy te przepływy ustalone czynią zadość takim warunkom, trzeba wyjść od przepływów nie ustalonych i następnie wykazać, że te przepływy asymptotycznie zbiegają się do rozważanych przepływów ustalonych.

Przykład tego rodzaju postępowania podał Riemann jeszcze w 1860 r. w swej klasycznej rozprawie. *Über die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite.* Rozwiązanie to dotyczy jednak niezmiernie prostego przepływu nie ustalonego, a mianowicie ruchu prostoliniowego. Doskonałym osiągnięciem byłoby dostosowanie metod Riemanna do przepływów ogólniejszych, gdy w równaniach różniczkowych ruchu występują więcej niż dwie zmienne niezależne.

Powyższe refleksje są dalekie od wyczerpnia tematu. Dyskusja nad metodami matematycznymi opisującymi zjawiska ruchu płynu może prowadzić do następujących wniosków:

1. Klasyczne metody analizy, jak np.: metoda potencjału, metoda charakterystyk równań typu hiperbolicznego, teoria funkcji analitycznych, teoria odwzorowań konforemnych – stanowią wciąż niezbędne, a często najskuteczniejsze narzędzia do poszukiwań efektywnych roz-

wiązań aktualnych zagadnień inżynierskich.

2. Do metod analitycznych należy dołączyć równania całkowe, teorię funkcji ortogonalnych. Na szczególną uwagę zasługują równania całkowe o jądrze osobliwym, np. badane przez Muscheliszwiliego i innych.

3. Rachunek operatorowy i rachunek macierzy zajmują osobne miejsce w mechanice ośrodków ciągłych.

4. Przykłady zastosowania analizy funkcjonalnej do zagadnień badania zbieżności procesów iteracyjnych upoważniają do przypuszczenia, że analiza funkcjonalna jest narzędziem, które ułatwia rozwiązywanie wielu problemów mechaniki płynów.

5. Podstawę teoretyczną zagadnień związanych z przepływami płynu stanowią równania różniczkowe zwyczajne i równania różniczkowe cząstkowe rzędu drugiego. Dlatego w zastosowaniu okazują się cenne nie tylko efektywne metody ich rozwiązywania, ale i jakościowa analiza tych równań oraz zagadnień brzegowych.

6. Nieodzowne narzędzie stanowią metody numeryczne.

7. W wielu przypadkach niezastąpione są metody statystyki matematycznej.

Literatura

ARIS R. 1978: *Mathematical Modelling Techniques*. Research Notes in Mathematics 24, Pitman Advanced Publishing Program, Boston.

BARLETT J.H. 1975: *Classical and Modern Mechanics*. University of Alberta Press.

BELTRAMI E. 1987: *Mathematics for Dynamic Modelling*. Academic Press, Boston.

BOAS M.L. 1966: *Mathematical Methods in the Physical Sciences*, Wiley, New York.

CURTAIN R.F., FALB P.L. 1971: *Stochastic Differential Equations in Hilbert Space*, J. Differ. Equat., 10(3).

KANE T.R., LEVINSON D.A. 1985: *Dynamics Theory and Applications*, McGraw-Hill Book Company, New York.

Summary

Looking for mathematical model. The difficulties in finding a mathematical model accurately discribing actual phenomena have been presented. The authors analyse the division of the machanics of continuous media according to the diversity of applied mathematical methods. Particular sections of mathematics related to the problems of the machanics of fluids are mentioned in the conclusions.

Authors' address
H. Kazieko, L. Kazieko
Warsaw Agricultural University – SGGW
02–787 Warszawa, ul. Nowoursynowska 166
Poland