

MICHAŁ ZASADA

## Możliwość zastosowania rozkładów mieszanych do modelowania rozkładów pierśnic drzew w naturalnych klasach biosocjalnych

Potential of mixture distributions application for modelling tree diameter distributions by natural social classes

### ABSTRACT

The aim of the presented study was to show an applicability of finite mixture distribution approach for estimating diameter distribution parameters of the dominant and suppressed stands on an example of one-layer, even-aged, pure Scots pine stands. This approach gave a good fit of compound distribution proportions, average d.b.h for the dominant and suppressed stands and standard deviations of d.b.h. for the analysed classes.

### KEY WORDS

diameter distribution, gamma distribution, mixture distribution, biosocial classes

### Wstęp

W celu polepszenia szczegółowości i użyteczności opisu drzewostanów podlegających pomiarowi i obserwacji oraz w celu ułatwienia wykonywania zabiegów pielęgnacyjnych, leśnicy często posługują się różnorodnymi klasyfikacjami drzew. W 1884 roku Kraft opublikował najbardziej rozpowszechnioną, „klasyczną” klasyfikację drzew, opartą na pozycji drzewa w strukturze pionowej drzewostanu (przynależności do określonej grupy biosocjalnej) oraz wielkości i pozycji korony [Kraft 1884, Assmann 1961]. Kraft wyróżnił następujące grupy drzew:

1. Górujące, z najlepiej rozwiniętymi koronami sięgającymi powyżej głównej warstwy drzewostanu.
2. Panujące, tworzące główną warstwę drzewostanu, mające dobrze rozwinięte korony.
3. Współpanujące, współtworzące główną warstwę drzewostanu, lecz mające słabsze korony.
4. Opanowane, mające zredukowane, ściśnięte korony zlokalizowane a) w głównej warstwie drzewostanu lub b) częściowo poniżej głównej warstwy drzewostanu.
5. Przygłuszone a) jeszcze żywe lub b) martwe.

Oryginalne klasy Krafta są często łączone w szersze grupy. Na przykład klasy 1-3 są często określane jako górna warstwa drzewostanu lub drzewostan panujący, zaś klasy 4-5 jako dolna warstwa lub drzewostan opanowany. Niekiedy klasy 1-3 określane są jako warstwa górna, klasa 4 tworzy piętro środkowe, a klasa 5 – piętro dolne [Assmann 1961]. Drzewa panujące i współpanujące zostały połączone w jedną grupę przez Championa i Griffitha (1948), kiedy indziej

#### MICHAŁ ZASADA

Samodzielny Zakład Dendrometrii  
i Produkcyjności Lasu, Wydział Leśny SGGW  
ul. Rakowiecka 26/30  
02-578 Warszawa  
zasada@delta.sggw.waw.pl

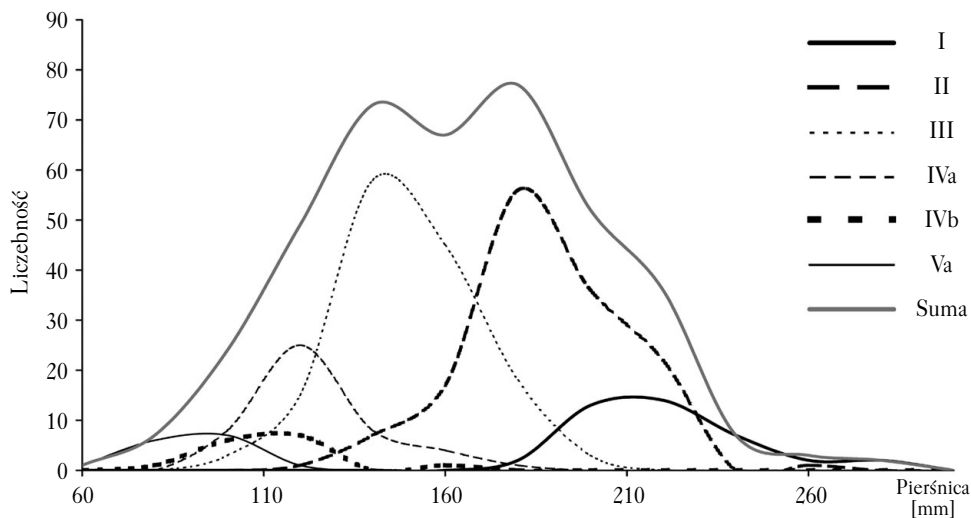
znowu podzielone na bardziej szczegółowe klasy [Gevorkiantz i in. 1943]. Klasy Krafta są również punktem wyjściowym dla innych podziałów drzew, jak na przykład klasyfikacja trzebieżowa, naturalna, Assmanna, Schädelina-Hausratha i wielu innych [Assmann 1961],

które są lub były powszechnie używane w leśnictwie, szczególnie w krajach europejskich. Leśnicy amerykańscy stosują z kolei na potrzeby hodowli i inwentaryzacji lasu zmodyfikowaną klasyfikację koron drzew składającą się z czterech klas, która podobna jest do klasycznej klasyfikacji Krafta [Hawley 1921, str.155]. Wyróżniają oni:

1. Drzewa panujące, z dobrze rozwiniętymi koronami rozciągającymi się powyżej głównej warstwy drzewostanu, które otrzymują pełne światło z góry i boków.
2. Drzewa współpanujące, z koronami o średnim rozmiarze, otrzymującymi światło głównie z góry, tworzącymi główną warstwę drzewostanu.
3. Drzewa pośrednie, z małymi i ściśniętymi koronami sięgającymi tylko dolnej części głównej warstwy drzewostanu, otrzymującymi światło tylko częściowo z góry.
4. Drzewa przygłuszone, mające słabo rozwinięte korony zlokalizowane poniżej głównej warstwy drzewostanu i nie otrzymujące bezpośredniego światła słonecznego.

Opisana struktura socjalna charakterystyczna jest dla jednopiętrowych i jednogatunkowych drzewostanów pochodzenia naturalnego i odnawianych sztucznie. Struktura ta jest uzależniona od wieku drzewostanu, jakości siedliska i stopnia zagęszczenia oraz podlega nieustannym zmianom na skutek działalności gospodarczej, szczególnie trzebieży. Przynależność drzewa do danej klasy odzwierciedla jego stanowisko w drzewostanie, a przez to – jego potencjał wzrostowy [Assmann 1964, Wróblewski 1984].

Klasyfikacja drzew ze względu na ich stanowisko biosocjalne czy charakterystykę korony może być przełożona na pierśnice drzew. Rozkład pierśnic drzew w drzewostanie może być rozpatrywany, jako złożony z osobnych rozkładów dla każdej wyróżnionej warstwy [Assmann 1964, Wróblewski 1984], (ryc. 1). Jednakże Assmann [1961] opisując typową strukturę socjalną i piętrową drzewostanu zauważył, że pełna zgodność pomiędzy wyróżnionymi grupami biologicznymi czy socjalnymi drzew a rozkładem pierśnic drzew w tych klasach jest niemożliwa do osiągnięcia, ponieważ klasy te zazwyczaj zachodzą na siebie w obrębie kilku stopni pierśnic. Sytuacja taka istnieje na skutek błędów w klasyfikacji, a częściowo z powodu stochastycznej



Ryc 1.

Rozkład pierśnic drzew jednowiekowego drzewostanu sosnowego (powierzchnia badawcza BD150) złożony z rozkładów pierśnic drzew w poszczególnych klasach biosocjalnych Krafta  
Diameter distribution of the even-aged stand (study plot BD150) composed of diameter distributions in Kraft biosocial classes

zależności pomiędzy wysokością i pierśnicą drzew. Assmann stwierdził również, że krzywe rozkładów pierśnic drzew należących do różnych warstw drzewostanu czy do różnych klas społecznych mogą być z niezłym rezultatem aproksymowane za pomocą rozkładu normalnego. Wróblewski z kolei dostarczył szczegółowego opisu rozkładów pierśnic w klasach biosocjalnych oraz opracował równania pozwalające na określenie parametrów rozkładów pierśnic w klasach Krafra i naturalnych klasach biosocjalnych w drzewostanach sosnowych w Polsce [Wróblewski 1984, 1993].

Celem niniejszej pracy było sprawdzenie możliwości zastosowania rozkładów mieszanych do określania parametrów rozkładów pierśnic drzew drzewostanu panującego i opanowanego w jednopiętrowych, równowiekowych, jednogatunkowych drzewostanach sosnowych. Analizy wykorzystujące rozkłady mieszane były wykonywane przy założeniu, że jedynymi dostępnymi danymi są dane pochodzące z rutynowych pomiarów lasu, a więc wyniki pomiaru pierśnic bez dodatkowej klasyfikacji drzew. Wyniki uzyskane za pomocą metody opartej na rozkładach mieszanych porównane zostały z wynikami pochodzącymi z zastosowania równań Wróblewskiego [1984, 1993].

## Materiał badawczy

W niniejszej pracy wykorzystano rozkłady pierśnic drzew pochodzące z pomiarów z 24 powierzchni badawczych założonych w jednowiekowych, jednopiętrowych drzewostanach sosny pospolitej (*Pinus sylvestris* L.), zlokalizowanych na siedlisku boru mieszanego świeżego w Puszczy Piskiej w nadleśnictwach Spychowo i Strzałowo. Wielkość powierzchni ustalona była w ten sposób, by pomiarowi podlegały pierśnice kilkuset drzew. Pierśnice wszystkich drzew na powierzchniach badawczych pomierzone zostały średnicomierzem z dokładnością do 1 mm. Każde mierzone drzewo zaliczono dodatkowo do odpowiedniej klasy biosocjalnej Krafra. Wiek poszczególnych drzewostanów określono za pomocą liczenia słoików na pniakach ściętych drzew oraz próbkach pobranych świdrem przyrostowym Presslera na drzewach stojących. Dodatkowo pomiarowi podlegały wysokości 20-25 drzew, co pozwoliło na wykreślenie krzywych wysokości i określenie przeciętnej wysokości wzorem Loreya. Bonitację (indeks bonitacyjny w wieku bazowym 100 lat) określono jako przeciętną wysokość 100 najgrubszych drzew na powierzchni jednego hektara za pomocą siedliskowego modelu wzrostu wysokości dla sosny w Polsce [Bruchwald i in. 2000, Cieszewski i Zasada 2002]. W tabeli 1 przedstawione zostały podstawowe cechy taksacyjne badanych drzewostanów.

Tabela 1.

Podsumowanie cech taksacyjnych i zależności między niektórymi cechami dla 24 powierzchni próbnych z Puszczy Piskiej

Forest summary of characteristics and relationships between some of them on 24 sample plots in the Pisz Primeval Forest

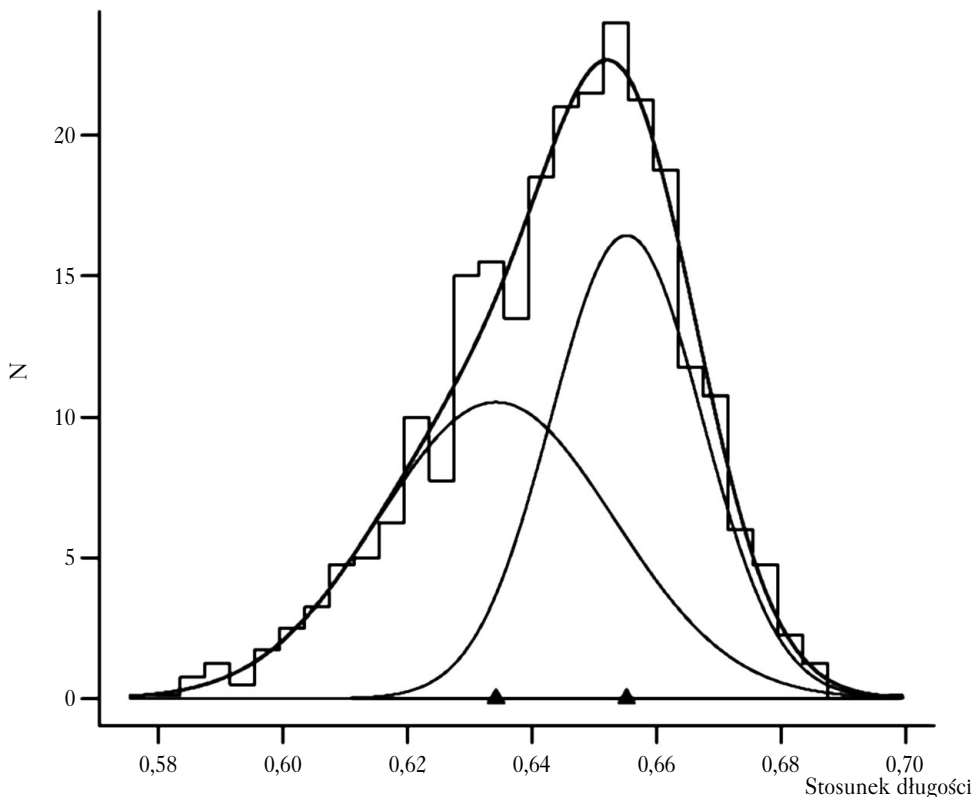
	Pow.	Wiek	B	N	Dg	H	$\frac{N_{pan}}{N}$	$\frac{mu_{pan}}{mu}$	$\frac{mu_{op}}{mu}$	$\frac{S_{pan}}{S}$	$\frac{S_{op}}{S}$
Min	0,120	21	22,8	374	98	9,4	0,58	1,02	0,73	0,71	0,48
Max	1,680	119	32,5	568	331	24,6	0,91	1,18	0,86	0,96	1,13
Śred	0,858	68	27,1	437	236	20,4	0,75	1,07	0,79	0,85	0,65

Oznaczenia: Pow. – obszar powierzchni próbnej [ha]; Wiek – średni wiek powierzchni; B – bonitacja (indeks bonitacyjny, średnia wysokość 100 najgrubszych drzew na powierzchni 1 ha w wieku bazowym 100 lat); N – liczba drzew na powierzchni próbnej;  $N_{pan}$  – liczba drzew drzewostanu panującego; Dg – przeciętna pierśnica przekrojowa drzewostanu [mm]; H – przeciętna wysokość drzewostanu określona wzorem Loreya [m];  $mu$  – średnia arytmetyczna pierśnic; S – odchylenie standardowe pierśnic;  $pan, op$  – indeksy oznaczające odpowiednio drzewostan panujący i opanowany

Description: Pow. – sample plot area [ha]; Wiek – average age; B – site index (average height of 100 thickest trees on a 1 ha area at a base age of 100 years); N – number of trees on the sample plot;  $N_{pan}$  – number of trees in the dominant stand; H – average stand height calculated by Lorey formula [m];  $mu$  – d.b.h arithmetic mean; S – d.b.h. standard deviation;  $op$  – indices for dominant and suppressed stands, respectively

## Metoda

Poza wykorzystaniem wzorów opracowanych przez Wróblewskiego [1984, 1993], do określenia parametrów rozkładów pierśnic drzewostanu panującego wykorzystano metodę opartą na rozkładach mieszanych. Rozkłady mieszane to seria dwóch lub więcej rozkładów składowych, zachodzących na siebie częściowo lub całkowicie i występujących w określonej proporcji. Suma rozkładów składowych tworzy rozkład sumaryczny (ryc. 2). Pierwsze zastosowanie rozkładów mieszanych przypisuje się Karlowi Pearsonowi [Pearson 1894]. Na podstawie danych zawierających pomiary tysiąca krabów wykreślił on serię histogramów, które analizował starając się dopasować do nich dwa nachodzące na siebie rozkłady normalne o parametrach szacowanych metodą momentów. Skomplikowane obliczenia obejmowały konieczność znalezienia pierwiastków układu wielomianów 9-go stopnia i wykonane zostały bez pomocy jakichkolwiek maszyn liczących. Pearson ostatecznie wybrał jedno z dwóch rozwiązań zadania opierając się na zgodności pierwszych pięciu momentów rozkładów oraz dodatkowo używając szóstego momentu do wyboru pierwiastków równania. Obecność dwóch komponentów rozkładu została przez Pearsona zinterpretowana jako dowód na istnienie dwóch gatunków krabów w badanej populacji (ryc. 2). Pełne informacje na temat rozkładów mieszanych i ich zastosowania można znaleźć



Ryc 2.

Rozkłady mieszane (dwa rozkłady normalne) dopasowane do danych Karla Pearsona (Pearson 1822, MacDonald 1988, rycina zamieszczona za zgodą Prof. Petera MacDonalda)

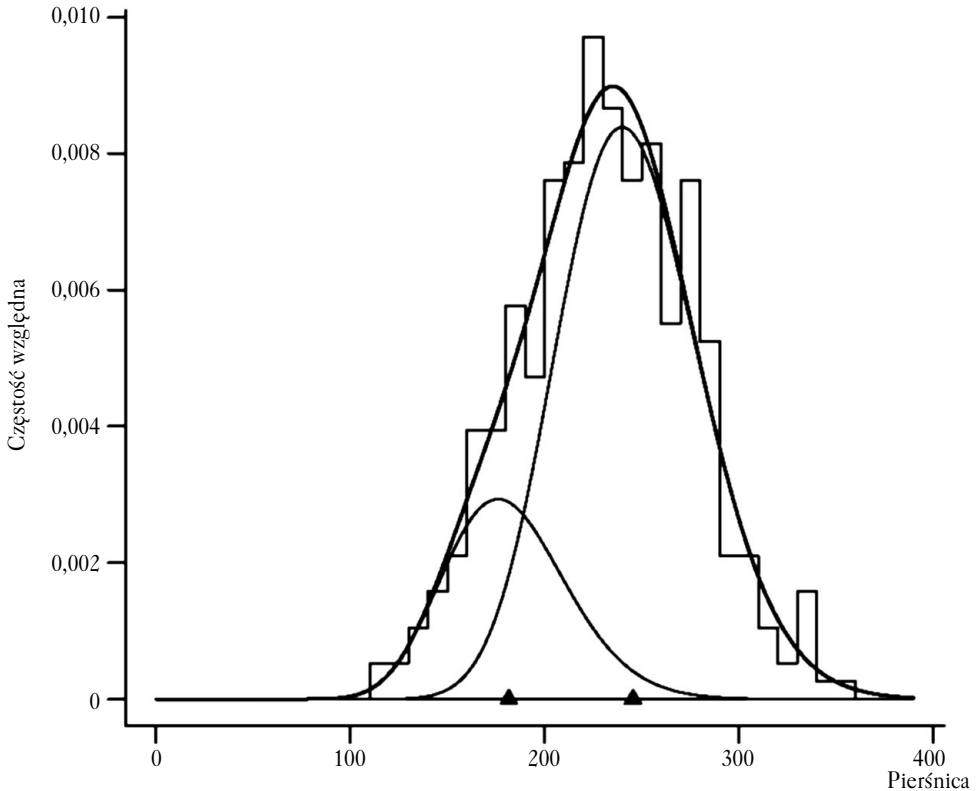
Mixture distributions (two normal distributions) fitted to the Karl Pearson data (Pearson 1822, MacDonald 1988, the figure allowed for publishing as agreed with Professor Peter MacDonald)

w literaturze, głównie angielskojęzycznej [np.: Everitt i Hand 1981, Titterton i in. 1985, McLachlan i Basford 1988, McLachlan i Peel 2000].

O ile postulat stosowania rozkładów mieszanych do modelowania rozkładów pierśnic drzew pojawił się ponad 30 lat temu [Bailey i Dell 1971, Goff i West 1975], o tyle pierwsze praktyczne zastosowanie tej metody w leśnictwie opisane zostało dopiero na początku XXI wieku. Liu i inni [2002] pokazali przykład zastosowania rozkładów mieszanych do modelowania bimodalnych rozkładów pierśnic drzew w drzewostanach mieszanych północno-wschodniej części Stanów Zjednoczonych. Zastosowali oni funkcję Weibulla [1951] jako element składowy mieszanki rozkładów. Analizowane przez autorów rozkłady mieszane okazały się na tyle elastyczne, że możliwe było ich dopasowanie do nieregularnych, multimodalnych czy silnie asymetrycznych rozkładów pierśnic. Zhang i inni [2001] zastosowali rozkład mieszany złożony z dwóch rozkładów Weibulla do opisu rozkładu pierśnic czterech drzewostanów mieszanych. Drzewostany te charakteryzowały się bimodalną formą rozkładów o kształcie odwróconej sigmoidy. W odróżnieniu od pojedynczego rozkładu Weibulla i funkcji wykładniczej, tylko rozkład mieszany był w stanie w sposób zadowalający opisać sumaryczny rozkład pierśnic i dał błąd standardowy co najmniej cztery razy mniejszy, niż dla dwóch pozostałych rozkładów porównawczych. Wyniki pokazały, że rozkład mieszany jest dobrą alternatywą służącą do modelowania rozkładów pierśnic drzewostanów mieszanych i różnowiekowych. Von Hessenmoller i von Gadov [2001] pokazali możliwość zastosowania złożenia dwóch rozkładów do opisu rozkładów pierśnic w zagospodarowanych drzewostanach bukowych w Niemczech. Struktura pionowa tych drzewostanów zależy silnie od rodzaju stosowanej w nich trzebieży. Podczas trzebieży górnej z drzewostanu usuwane są tylko drzewa o większych rozmiarach, podczas gdy drzewa cieńsze mogą wegetować przez długi czas. Powoduje to powstanie typowej struktury złożonej z dwóch populacji składowych. Do tego rodzaju bimodalnego rozkładu pierśnic drzew autorzy dopasowali dwa rozkłady Weibulla, których parametry otrzymali używając największej i najmniejszej pierśnicy drzewostanu, wysokości drzewostanu i pierśnicowego pola przekroju obydwu warstw jako zmiennych niezależnych. Nowym podejściem do modelowania struktury drzewostanu jest również zastosowanie wielowymiarowych rozkładów mieszanych, jak to opisuje Zucchini i inni [2001]. W swojej pracy autorzy pokazali zastosowanie modelu mieszanego złożonego z dwóch dwuwymiarowych rozkładów normalnych do opisu dwuwymiarowego rozkładu pierśnic i wysokości drzew rosnących w różnowiekowych drzewostanach bukowych. Zaletami zastosowanego modelu jest nie tylko to, że nadspodziewanie dobrze pasuje on do dużego zbioru danych, ale również to, że poszczególne parametry modelu mają praktyczną i znaną interpretację [Zucchini i in. 2001].

Analiza rozkładów, które mogą być rozpatrywane jako mieszaniny, polega na znalezieniu zbioru zachodzących na siebie komponentów (rozkładów składowych), dla których uzyskuje się najlepsze dopasowanie do rozkładu sumarycznego (ryc. 2, 3). Kompletny zestaw parametrów mieszanki zawiera parametry poszczególnych rozkładów składowych oraz proporcję, w jakiej komponenty występują w rozkładzie sumarycznym. Estymacja parametrów rozkładów mieszanych może odbywać się przy założeniu zastosowania do modelowania różnej liczby rozkładów składowych, różnych funkcji rozkładu/gęstości prawdopodobieństwa oraz różnych wartości początkowych parametrów.

W niektórych wypadkach do określenia liczby komponentów w mieszaninie stosuje się formalne testy statystyczne [McLachlan i Peel 2000, Everitt i Hand 1981]. Najczęściej jednak liczbę komponentów w rozkładzie sumarycznym zakłada się z góry na podstawie logicznej interpretacji badanego zjawiska. I tak na przykład, ponieważ w niniejszej pracy przedmiotem zain-



Ryc 3.

Przykład dopasowania rozkładów mieszanych do rozkładów pierśnic drzew w naturalnych klasach biosocjalnych (powierzchnia PP76, mieszanka dwóch rozkładów gamma o parametrach szacowanych za pomocą dwustopniowej metody największej wiarygodności z poprawką na proporcje rozkładów)

An example of fitting mixture distributions to diameter distributions in natural biosocial classes (study plot PP76, mixture of two gamma distributions with parameters estimated using two-stage maximum likelihood method taking account of distribution proportions)

teresowania były parametry rozkładów dla dwóch klas: drzewostanu panującego i opanowanego, liczba rozkładów została ustalona jako 2.

Po wstępnych analizach do dalszych badań zastosowano rozkład gamma, który był z powodzeniem używany w przeszłości do modelowania rozkładów pierśnic [Nelson 1964]. Z powodu trudności w estymacji parametrów silnie zachodzących na siebie rozkładów metodą największej wiarygodności, zastosowano dwustopniowe szacowanie ostatecznych parametrów rozkładu. W pierwszej fazie szacowane były wartości średnich arytmetycznych i odchyłeń standardowych rozkładów składowych przy założonej, stałej wartości proporcji składników rozkładu sumarycznego. W drugiej fazie wartość proporcji rozkładów składowych była korygowana przez ponowne użycie metody największej wiarygodności przy założonych stałych wartościach średnich i odchyłeń standardowych, które uzyskane zostały w pierwszej fazie estymacji. Wartości startowe dla proporcji liczby drzew drzewostanu panującego i opanowanego obliczono za pomocą prostego równania regresji nieliniowej wykorzystującego średnią pierśnicę całego drzewostanu jako zmiennej niezależnej. Początkowe wartości średnich arytmetycznych rozkładów składowych zostały określone jako iloczyn średniej pierśnicy drzew w całym drzewostanie i współczynników określających stosunek średnich danej klasy do średniej pierśnicy drzewo-

stanu. Początkowe wartości odchyień standardowych rozkładów składowych zostały określone jako iloczyn odchylenia standardowego pierśnic drzew w całym drzewostanie i współczynników określających stosunek odchyień danej klasy do odchylenia w całym drzewostanie. Sposób obliczenia wartości startowych został przedstawiony szczegółowo w tabeli 2.

**Tabela 2.**

Sposób obliczenia wartości startowych poszczególnych parametrów drzewostanu panującego i opanowanego (oznaczenie jak w tab. 1)

Mean of parameter's starting values calculation for the dominant and suppressed stand (notation as in the tab. 1)

Zmienna	Symbol	Równanie
Średnia arytmetyczna drzewostanu opanowanego	$\mu_{op}$	$\mu \cdot 0,79$
Średnia arytmetyczna drzewostanu panującego	$\mu_{pan}$	$\mu \cdot 1,07$
Odchylenie standardowe drzewostanu opanowanego	$S_{op}$	$S \cdot 0,65$
Odchylenie standardowe drzewostanu panującego	$S_{pan}$	$S \cdot 0,85$
Udział drzew drzewostanu panującego	$N_{pan}/N$	$0,18079 \cdot \mu^{0,26647}$

Wszystkie obliczenia i analizy wykonane zostały przy użyciu programów wchodzących w skład środowiska „R” – darmowego języka i środowiska programistycznego rozwijanego obecnie jako oprogramowanie Open Source [Ihaka i Gentleman 1996]. Estymację parametrów komponentów rozkładów mieszanych wykonano przy użyciu funkcji wchodzących w skład pakietu Rmix. Pakiet ten jest efektywną implementacją algorytmów EM i quasi-Newtona metody największej wiarygodności. W istocie jest to przeniesiony w środowisko R program MIX, opracowany przez prof. Petera Macdonalda i jego współpracowników [Macdonald i Pitcher 1979, Macdonald 1988, Macdonald i Green 1988]. Parametry funkcji potęgowej służącej określeniu wartości startowych proporcji rozkładów składowych na podstawie średniej pierśnicy drzewostanu oszacowane zostały przy użyciu nieliniowej funkcji najmniejszych kwadratów, będącej częścią modułu „nls” dla środowiska „R”.

Dla każdej analizowanej powierzchni próbnej określono parametry rozkładów pierśnic (średnia arytmetyczna i odchylenie standardowe) drzewostanu panującego i opanowanego oraz udział liczby drzew w naturalnych klasach socjalnych. Dla rozkładu pierśnic całego drzewostanu zbadano zgodność otrzymanego sumarycznego rozkładu z rozkładem empirycznym za pomocą testu Chi-kwadrat. Parametry rozkładu pierśnic drzewostanu panującego otrzymane ze wzorów Wróblewskiego i metody wykorzystującej rozkłady mieszane, porównano z rzeczywistymi wartościami tych parametrów obliczając błąd procentowy wtórny.

## Wyniki

Przykład zastosowania rozkładów mieszanych do modelowania rozkładów pierśnic drzew należących do drzewostanu panującego i opanowanego przedstawiono na ryc. 3. Szczegółowe wyniki dopasowania rozkładów dla poszczególnych powierzchni uzyskane z dwustopniowej estymacji za pomocą metody największej wiarygodności, jak również wartości poszczególnych parametrów rozkładów składowych uzyskane z metody opartej na rozkładach mieszanych oraz obliczonych na podstawie wzorów Wróblewskiego przedstawiono w tabeli 3.

Hipotezę o braku zgodności sumarycznego rozkładu teoretycznego z rozkładem empirycznym odrzucono tylko w jednym przypadku (pow. PP84). W sześciu przypadkach stwierdzono istotną różnicę między oszacowaną a rzeczywistą wartością proporcji liczby drzew należących do drzewostanu panującego. Istotną różnicę między estymowanymi a rzeczywistymi

Tabela 3.

Szczegółowe porównanie parametrów rozkładów piersińc drzew drzewostanu panującego i opanowanego szacowanych z zastosowaniem rozkładów mieszananych i wzorów Wróblewskiego

Comparison of diameter distribution parameters in the dominant and suppressed stands estimated using mixture distributions and equations by Wróblewski

Pow.	Pomiar powierzchni próbnych				Rozkłady mieszanane				Wróblewski				Błąd % (R.miesz.)					
	$N_{\text{pan}}/N$	$D_{\text{pan}}$	$S_{\text{pan}}$	$S_{\text{pod}}$	$N_{\text{pan}}/N$	$D_{\text{pan}}$	$S_{\text{pan}}$	$D_{\text{pod}}$	$S_{\text{pod}}$	$D_{\text{pan}}$	$S_{\text{pan}}$	Miesz. Wróbl.	$D_{\text{pan}}$	$S_{\text{pan}}$	Miesz. Wróbl.	$D_{\text{pod}}$	$S_{\text{pod}}$	
PP66	0,60	112	20,2	69	16,7	0,61	110	21	69	18	13	-1,8	-15,2	4,0	-81,2	0,0	7,8	
PP67	0,58	154	29,5	106	16,7	0,66*	147*	33	107	18	134	23	-4,5	-13,0	11,9	-78,3	0,9	7,8
PP68	0,64	181	31,7	126	21,5	0,70	177	33	122	18	160	24	-2,2	-11,6	4,1	-81,0	-3,2	-16,3
PP69	0,91	310	42,1	249	21,7	0,83*	314	41	257	21	297	48	1,3	-4,2	-2,6	-80,7	3,2	-3,2
PP71	0,60	146	23,5	104	16,3	0,66	143	25	102	15	128	21	-2,1	-12,3	6,4	-79,8	-1,9	-8,0
PP72	0,61	147	27,4	102	18,0	0,66	143	29	100	17	128	22	-2,7	-12,9	5,8	-78,4	-2,0	-5,6
PP73	0,66	168	27,9	112	20,7	0,70	166	29	109	18	148	26	-1,2	-11,9	3,9	-76,8	-2,7	-13
PP74	0,68	184	28,8	127	20,7	0,70	182	30	126	19	164	29	-1,1	-10,9	4,2	-77,2	-0,8	-8,2
PP75	0,85	224	31,6	162	26,4	0,76*	227	30	172	28	211	31	1,3	-5,8	-5,1	-80,9	6,2	6,1
PP76	0,80	244	37,6	180	31,5	0,77	246	37	182	32	227	34	0,8	-7,0	-1,6	-81,1	1,1	1,6
PP77	0,89	230	33,4	178	43,1	0,78*	230	33	200*	47	220	37	0,0	-4,3	-1,2	-79,2	12,4	9,0
PP78	0,77	229	37,6	159	33,7	0,76	225	40	174	45	211	32	-1,7	-7,9	6,4	-79,9	9,4	33,5
PP79	0,73	267	38,8	214	27,2	0,84	252*	41	252*	50*	248	36	-5,6	-7,1	5,7	-83,2	17,8	83,8
PP80	0,65	250	33,5	179	29,8	0,76*	240*	38*	174	33	222	34	-4,0	-11,2	13,4	-81,0	-2,8	10,7
PP82	0,80	266	43,8	208	38,3	0,79	267	45	207	29	251	41	0,4	-5,6	2,7	-80,3	-0,5	-24,3
PP83	0,79	294	48,8	219	32,9	0,84	290	53*	227	21*	275	44	-1,4	-6,5	12,7	-79,9	3,7	-36,2
PP84*	0,81	301	43,4	226	37,7	0,82	300	44	228	37	283	46	-0,3	-6,0	1,4	-79,6	0,9	-1,9
PP85	0,78	303	40,2	247	34,2	0,82	301	41	241	28	284	44	-0,7	-6,3	2,0	-82,2	-2,4	-18,1
PP86	0,85	307	44,5	228	37,1	0,82	309	44	231	35	290	48	0,7	-5,5	-1,1	-78,9	1,3	-5,7
PP87	0,69	331	44,3	268	31,7	0,83*	321*	48	262	28	305	49	-3,0	-7,9	8,4	-81,7	-2,2	-11,7
PP88	0,86	311	48,2	226	38,4	0,83	310	49	246	53	295	48	-0,3	-5,1	1,7	-78,8	8,8	38,0
PP89	0,88	317	46,0	253	38,6	0,84	320	45	252	29	303	50	0,9	-4,4	-2,2	-80,2	-0,4	-24,9
PP90	0,81	311	49,7	231	34,9	0,82	310	50	226	31	290	48	-0,3	-6,8	0,6	-79,2	-2,2	-11,9
PP91	0,81	339	53,2	275	30,9	0,83	325	56	280	19	320	55	-4,1	-5,6	5,3	-80,0	1,8	-38,5
											Min		-5,6	-15,2	-5,1	-83,2	-3,2	-38,5
											Max		1,3	-4,2	13,4	-76,8	17,8	83,8
											Śred		-1,3	-8,1	3,6	-80,0	1,9	-1,2

\* oznacza brak zgodności rozkładu teoretycznego z rozkładem empirycznym lub istotną różnicę między wartością estymowaną a rzeczywistą wartością danego parametru (poziom istotności  $\alpha=0,05$ ). Pozostałe oznaczenia jak w innych tabelach

\* means lack of concordance between theoretical and empirical distribution or significant difference between the estimated and real values of a given parameter (significance level  $\alpha=0,05$ ). The remaining description – as in other tables



wartościami parametrów udowodniono w 4 przypadkach dla średniej arytmetycznej pierśnic drzewostanu panującego i 2 razy dla pozostałych wartości. Wartości błędu procentowego wtórnego dla poszczególnych parametrów wyniosły od  $-5,6$  do  $+1,3\%$  (średnio  $-1,3\%$ ) dla średniej arytmetycznej i od  $-5,6$  do  $+13,4\%$  (średnio  $+3,6\%$ ) dla odchylenia standardowego pierśnic drzew drzewostanu panującego. Odpowiadające błędy dla wartości określonych wzorami Wróblewskiego były kilka razy większe, zwłaszcza dla odchylenia standardowego.

## Dyskusja

Pomimo tego, że tak Liu i in. [2002], jak i Zhang i in. [2001] twierdzą, że do uzyskania zadowalającego oszacowania parametrów mieszanki rozkładów dla drzewostanów charakteryzujących się bimodalną formą rozkładu pierśnic drzew wystarczy podanie tylko liczby rozkładów składowych, w przypadku zastosowania rozkładów mieszanych do modelowania rozkładów pierśnic drzew w drzewostanach jednopiętrowych konieczne jest dostarczenie bardziej dokładnych wartości startowych oraz zastosowanie ograniczeń w stosunku do parametrów lub zastosowanie dwustopniowego ich oszacowania. Pomimo tego, że wartości startowe były dość bliskie wartościom rzeczywistym i pomimo zastosowania dwustopniowego procesu dopasowania, nie we wszystkich przypadkach możliwe było uzyskanie zadowalającego dopasowania rozkładów. Wynika to z tego, że rozkłady pierśnic drzew drzewostanu panującego i opanowanego silnie zachodzą na siebie, co fałszuje informacje na temat mieszaniny rozkładów i znacznie utrudnia pomyślne oszacowanie parametrów rozkładów. Stąd konieczne jest wypracowanie skutecznych sposobów ustalania wartości startowych parametrów, wśród których na uwagę zasługują tak wyniki analizy zależności między parametrami (tab. 1), jak i istniejące wzory, jak wzory Wróblewskiego.

Pomimo opisanych tutaj trudności, zastosowanie rozkładów mieszanych do określania parametrów rozkładów pierśnic drzew w naturalnych klasach biosocjalnych przyniosło zaskakująco dobre wyniki. Błąd procentowy wtórny szacowania tych parametrów nie przekroczył kilku procent i był kilka razy mniejszy, niż błędy uzyskane z zastosowania alternatywnych metod. Wynika to głównie z tego, że parametry rozkładów pierśnic w klasach biosocjalnych, szczególnie dla odchylenia standardowego pierśnic drzew drzewostanu opanowanego, charakteryzują się dużą zmiennością (tab. 1). Zastosowanie w tym przypadku wzorów empirycznych opracowanych nawet na podstawie dużego materiału empirycznego nie gwarantuje tego, że dla danego drzewostanu uzyskanie zadowalającego oszacowania parametrów jest pewne. Z kolei proces szacowania parametrów przy użyciu metody największej wiarygodności pozwala na indywidualne podejście do każdej analizowanej powierzchni, a co za tym idzie – lepsze wyniki oszacowania. Dodatkową zaletą zaprezentowanej metody, mimo większych trudności w jej praktycznej aplikacji jest to, że możliwe jest jej zastosowanie w sytuacji, gdy dysponujemy tylko podstawowymi wynikami pomiarów danego drzewostanu, czyli wynikami pomiarów pierśnic. Uzyskana na tym etapie badań dokładność wyników oraz stosunkowo duża niezawodność czyni z opisanej metody obiecujący obiekt badań jak i przemawia za jej włączeniem do istniejących modeli wzrostu jako element modułu trzebieżowego.

## Podsumowanie i wnioski

W celu polepszenia szczegółowości i użyteczności opisu drzewostanów podlegających pomiarowi i obserwacji oraz w celu ułatwienia wykonywania zabiegów pielęgnacyjnych, leśnicy często posługują się różnorodnymi klasyfikacjami drzew, w tym najbardziej rozpowszechnioną, „klasyczną” klasyfikacją Krafta, opartą na pozycji drzewa w strukturze pionowej drzewostanu

(przynależności do określonej grupy biosocjalnej) oraz wielkości i pozycji korony [Kraft 1884, Assmann 1961]. Oryginalne klasy Krafta są często łączone w szersze grupy. Powszechnie stosowanym w leśnictwie polskim przykładem jest wyróżnienie drzewostanu panującego (klasy 1-3) i opanowanego (klasy 4-5). Taki podział drzew ma szczególnie istotne znaczenie w przypadku planowania i wyznaczania trzebieży.

W niniejszej pracy przedstawiony został przykład możliwości zastosowania rozkładów mieszanych do określania parametrów rozkładów pierśnic drzew drzewostanu panującego i opanowanego w jednopiętrowych, równowiekowych, jednogatunkowych drzewostanach sosnowych. Analizy wykorzystujące rozkłady mieszane były wykonywane przy założeniu, że jedyne dostępne danymi są dane pochodzące z rutynowych pomiarów lasu. Wyniki uzyskane za pomocą metody opartej na rozkładach mieszanych zostały również porównane z wynikami pochodzącymi z zastosowania równań Wróblewskiego [1984, 1993].

Szczegółowe wyniki dopasowania rozkładów dla poszczególnych powierzchni uzyskane z dwustopniowej estymacji przy pomocy metody największej wiarygodności, jak również wartości poszczególnych parametrów rozkładów składowych uzyskane z metody opartej na rozkładach mieszanych oraz obliczonych na podstawie wzorów Wróblewskiego, przedstawiono w tabeli 3. Pomimo pewnych trudności jakie mogą się pojawić w trakcie dopasowania parametrów, zastosowanie rozkładów mieszanych do określania parametrów rozkładów pierśnic drzew w naturalnych klasach biosocjalnych przyniosło zaskakująco dobre wyniki. Błąd procentowy wtórny szacowania nie przekroczył kilku procent, i był kilka razy mniejszy, niż błędy uzyskane z zastosowania alternatywnych metod. Dodatkową zaletą zaprezentowanej metody, mimo większych trudności w jej praktycznej aplikacji jest to, że możliwe jest jej zastosowanie w sytuacji, gdy jedynymi dostępnymi są podstawowe wyniki pomiarów danego drzewostanu. Uzyskana na tym etapie badań dokładność wyników oraz stosunkowo wysoka niezawodność czyni z niej obiecujący obiekt badań oraz przemawia za jej włączeniem do istniejących modeli wzrostu jako element modułu trzebieżowego.

## Literatura

- Assmann E. 1961. *Waldetragskunde*. BLV Bayerischen Landwirtschaftsverlag GmbH, München
- Bailey R.L., Dell T.R. 1973. Qualifying diameter distributions with the Weibull function. *For. Sci.* 19: 97-104.
- Bruchwald A., Michalak K., Wróblewski L., Zasada M. 2000. Analiza funkcji wzrostu wysokości dla różnych regionów Polski. W: *Przeźrenie zróżnicowanie wzrostu sosny*. Fundacja „Rozwój SGGW”. 84-91
- Champion H.G., Griffith A.L. 1948. *Manual of general silviculture for India*. Oxford Univ. Press, London.
- Cieszewski C.J., Zasada M. 2002. Dynamiczna forma anamorficznego modelu bonitacyjnego dla sosny pospolitej w Polsce. *Sylvan* 7: 17-24.
- Hawley R.C. 1921. *The practice of silviculture*. John Wiley & Sons, Inc., New York. 1st edition. 352pp.
- Everitt B.S., Hand D.J. 1981. *Finite Mixture Distributions*. Chapman and Hall, London. xi+143 pp.
- Gevorkiantz S.R., Rudolf P.O., Zehngraff P.J. 1943. A tree classification for aspen, jack pine and second growth red pine. *J. Forestry*, 41: 268-274.
- Goff F.G., West D. 1975. Canopy-understory interaction effects on forest population structure. *For. Sci.* 21: 98-108.
- von Hessenmoller D., von Gadow K. 2001. Beschreibung der Durchmessererteilung von Buchenbeständen mit Hilfe der bimodalen WEIBULLfunktion. *Allgemeine Forst und Jagdzeitung*, 172(3):46-50.
- Ihaka R., Gentleman R. 1996. R: A language for data analysis and graphics. *J. Comput. Graph. Stat.*, 5(3):299-314.
- Kraft G. 1884. *Beiträge z. Lehre v. d. Durchforstungen usw.* Hannover. Germany
- Liu C., Zhang L., Davis C.J., Solomon D.S., Grove J.H. 2002. A finite mixture model for characterizing the diameter distribution of mixed-species forest stands. *For. Sci.* 48(4): 653-661.
- Macdonald P.D.M., Pitcher T.J. 1979. Age-groups from size-frequency data: a versatile and efficient method of analyzing distribution mixtures. *J. Fish. Res. Board of Canada* 36, 987-1001.
- Macdonald P.D.M., Green P.E.J. 1988. *User's Guide to Program MIX: An Interactive Program for Fitting Mixtures of Distributions*, Release 2.3. Hamilton, Ichthus Data Systems. ISBN 0-9692305-1-6
- Macdonald P.D.M. 1988. *Demonstration examples for MIX 2.3*. Hamilton, Ichthus Data Systems. ISBN 0-9692305-2-4

- McLachlan G.J., Basford K.E. 1988. *Mixture Models: Inference and Applications to Clustering*. Marcel Dekker, New York. xi+253 pp.
- McLachlan G.J., Peel D. 2000. *Finite Mixture Models*. Wiley Series in Probability and Statistics. Applied Probability and Statistics Section. John Wiley & Sons Inc. New York.
- Nelson T.C. 1964. Diameter distribution and growth of loblolly pine. *For. Sci.*, 10: 105-115.
- Pearson K. 1894. Contributions to the mathematical theory of evolution. *Phil. Trans. Roy. Soc. London A*, 185: 71-110.
- Titterton D.M., Smith A.M.F., Makov U.E. 1985. *Statistical Analysis of Finite Mixture Distributions*. Wiley series in probability and mathematical statistics, Applied section. John Wiley & Sons, New York.
- Weibull W. 1951. A statistical distribution function of wide applicability. *J. Appl. Mech.*, 18: 293-297.
- Wróblewski L. 1984. Badania nad strukturą socjalną określoną sposobem Krafta w drzewostanach sosnowych. *Fol. For. Pol.*, A, 27: 23-36.
- Wróblewski L. 1993. Attributes of diameter distributions in Kraft biosocial classes in Scots pine stands. *Ann. Warsaw Agric. Univ. – SGGW, For. and Wood Technol.* 44: 7-12.
- Zhang L.J., Gove J.H., Liu C.M., Leak W.B. 2001. A finite mixture of two Weibull distributions for modeling the diameter distributions of rotated-sigmoid, uneven-aged stands. *Can. J. Forest Res.* 31 (9): 1654-1659.
- Zucchini W., Schmidt M., von Gadow K. 2001. A model for the diameter-height distribution in an uneven-aged beech forest and a method to assess the fit of such models. *Silva Fenn.* 35(2): 169-183.

## SUMMARY

### Potential of mixture distributions application for modelling tree diameter distributions by natural social classes

The overall diameter distribution can be treated as a compound of distributions of trees belonging to various classes. The aim of the presented study was to show an applicability of finite mixture distribution approach for estimating diameter distribution parameters of the dominant and suppressed stands on an example of one-layer, even-aged, pure Scots pine stands. The parameters of compound distributions, estimated using two-stage maximum likelihood method, were compared to measurement data and results coming from application of equations by Wróblewski [Wróblewski 1993]. Attributes of diameter distributions in Kraft biosocial classes in Scots pine stands. *Annals of Warsaw Agric. Univ. – SGGW*, 44: 7-12. Despite problems with fitting parameters to the strongly overlapping distributions, this approach gave a good fit of compound distribution proportions, average d.b.h for the dominant and suppressed stands (average errors equal – 1.3% and 1.9%, respectively), and standard deviations of d.b.h. for the analysed classes (average error 3.6% and – 1.2%).