przez daną organellę w komórce. Światło emitowane przez taką organellę odznacza się większą długością fali i mniejszą energią niż światło pochłonięte.

Tylko nieliczne organelle komórkowe, takie jak lizosomy i mitochondria, wykazują autofluorescencję, czyli naturalną emisję światła dzięki obecności w ich wnętrzu fluoroforów. W przypadku pozostałych organelli, ich wyodrębnienie odbywa się poprzez wyznakowanie fluoroforem sztucznie wprowadzonym do komórki. Fluorofory to związki chemiczne, które mogą absorbować energię o określonej długości fali, a następnie wyemitować światło o innej długości fali. Kolor fluorescencji zależy od własności fluoroforu. Przykładowe fluorofory najczęściej stosowane to DAPI – barwnik jądrowy (ryc.13B), fluoresceina czy jodek propidyny. Bardzo dużym zainteresowaniem cieszy się także fluorofor wyodrębniony z tkanek meduzy (*Aequorea victoria*). Jest to wykazujące autofluorescencję białko GFP (ang. *Green Fluorescent Protein*), szeroko obecnie stosowane m.in. w inżynierii genetycznej do badań nad ekspresją genów.

Zastosowanie fluorescencji pozwala na znakowanie organelli komórkowych i związków chemicznych obecnych w komórce w minimalnych ilościach oraz na wgląd w toczące się we wnętrzu komórki procesy chemiczne. Oglądanie tkanek i komórek wyznakowanych fluorescencyjnie możliwe jest dzięki mikroskopii fluorescencyjnej.

Wraz z rozwojem nauk biologicznych i biotechnologicznych ciągłym modyfikacjom podlegają tradycyjne techniki barwień, jak również pojawiają się nowe, bardziej zaawansowane. Obecnie stosuje się różne kombinacje opisanych powyżej technik histologicznych. Udoskonalenie procedur barwienia pozwala na poszerzenie możliwości klasycznych barwień histologicznych, zwiększenie precyzyji i szybkości wykonania preparatu.

Nasze krótkie spotkanie z barwnikami histologicznymi i ich niezwykle interesującą historią powoli dobiega końca. Zapoznajmy się jeszcze ze zdjęciami preparatów mikroskopowych i alizarynowych przedstawiającymi niektóre z dawniej i obecnie stosowanych technik barwień histologicznych. Część preparatów mikroskopowych pochodzi ze zbiorów Zakładu Anatomii Porównawczej UJ z 1900 roku. Porównując współczesne preparaty mikroskopowe z XX-wiecznymi czytelnik może sam przekonać się o zmianach jakie zaszły w dziedzinie barwień histologicznych. Dotyczą one rodzaju używanych barwników oraz sposobu wykonania i opisu preparatów. Dawniej czynności te wymagały od badacza o wiele większego nakładu czasu i były bardzo pracochłonne.

Obecnie stosowane techniki barwień są wciąż udoskonalane i wspomagane coraz bardziej precyzyjną aparaturą badawczą. Kariera barwników w histologii trwa nieprzerwanie, a one same wciąż inspirują badaczy.

Mgr Ewa E. Bres jest doktorantką w Zakładzie Anatomii Porównawczej UJ przy Instytucie Zoologii UJ w Krakowie. E-mail: ewa.bres@uj.edu.pl.

ZWIERZĘTA-„MATEMATYCY” – FAKTY, ROZWAŻANIA

Jerzy Andrzej Chmurzyński (Warszawa)

Wprowadzenie. O czym będzie mowa?

Czyż zwierzę może być matematykiem?

– To zależy od rozumienia dwóch terminów. Jeśli *matematykę* będziemy rozumieli ściśle jako „zespół nauk posługujących się metodą dedukcyjną, zajmujących się głównie badaniem zbiorów liczb, punktów i innych elementów abstrakcyjnych", a *matematyka* jako „pracownika naukowego zajmującego się matematyką", albo jako osobę (a więc człowieka) „studiującą matematykę, uzdolnioną w tej dziedzinie" – to oczywiście zwierzę nie może być matematykiem!

Jeżeli wszakże dokonać pewnej modyfikacji znaczenia tych terminów (ktoś może powiedzieć... manipulacji), to się okaże, iż istnieją zwierzęta, które można uznać za matematyków – choćby w cudzysłowie.

Przede wszystkim trzeba z definicji matematyka usunąć jednoznaczną charakterystykę podmiotu jako człowieka; wystarczy powiedzieć, że jest nim – „istota żywa". A matematykę określmy po staroświecku jako „umiejętność posługiwania się liczbami i utworami przestrzennymi (figurami geometrycznymi)"; wszak gr. *mathēmatikḗ* wywodzi się z *máthēma* ‘umiejętność, a dopiero wtórnie – nauka'. Wypada też dopuścić, że „matematyk" nie musi *expressis verbis* posługiwać się liczbami, ale tym, co one wyrażają – a więc, że zajmuje się tym, co można *liczyć* i *mierzyć*: własnościami ciał, zjawiskami i relacjami.

Jednym słowem, że „**matematykiem**" może być fizyk, mierniczy lub inżynier – istotne, **żeby rozwiązywał praktycznie zadania matematyczne**. Można zresztą przypuszczać, że takie właśnie były początki matematyki. Na przykład w starożytnym Egipcie wszystko liczono, a pola – mierzono i wytyczano. Przy tym wczesne zadania geometryczne zapewne miały charakter konstrukcyjny, a nie abstrakcyjny.

Pierwsza była liczba, dopiero wtórnie pojawił się zapis cyfrowy (według M. Kuckenburga właśnie z niego miało powstać pismo). A liczenie mogło na początku polegać na korzystaniu z pojęć 'jeden', 'dwa', 'wiele'. Ślady takiego kategoryzowania pozostały bowiem w wielu językach – choćby w staropolszczyźnie mieliśmy nie tylko liczbę *pojedynczą* i *mnogą*, ale też *podwójną*. Przypuszczalnie dopiero z czasem zaczęto wykorzystywać dziesięć palców u rąk – co się stało podstawą systemu dziesiętnego. Dodać zresztą trzeba, że bardziej elementarną od liczenia i mierzenia czynnością jest *szacowanie* liczebności i wielkości na dualne kategorie: liczne – nieliczne, wiele – mało (niewiele), duże – małe (długie – krótkie, szerokie, grube – wąskie), podobnie jak głośne – ciche itd.

Zatem przedmiotem naszego zainteresowania będzie najpierw to –

- czy zwierzęta potrafią rozróżniać i oceniać liczebności, rozmiary, wielkości natężenia jakichś cech,
- rozwiązywać praktycznie zadania z geometrii konstrukcyjnej, przestrzennie organizować wykorzystywane tworzywa, na przykład aby optymalizować stosunek efektów do wykorzystanych nakładów, jak i –
- stwierdzenie, czy umieją orientować się w czasie i przestrzeni.

Następnie nasze zainteresowanie sięgnie do zagadnienia –

- czy potrafią komunikować te ilościowe cechy innym osobnikom – choćby analogowo.

Wreszcie zobaczymy –

- czy są zwierzęta potrafiące liczyć,

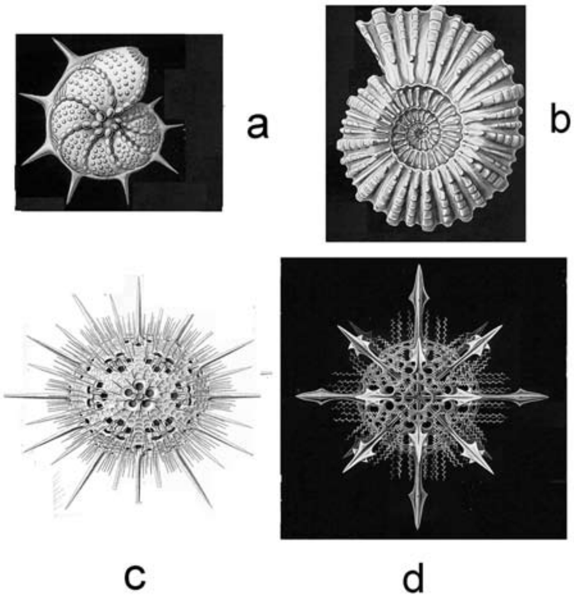
Chcę jednak zacząć od czegoś, o czym wszyscy „wiemy", ale – na ogół – nie wiemy, że... wiemy.

Matematyka w przyrodzie

Oto matematyka niejako „tkwi" w przyrodzie – w całej przyrodzie. Co więcej: jest wiele przykładów na to, że przyroda jest „matematyczna". Niemało ich można znaleźć w arcyciekawych książkach popularnych naszego znanego fizyka i kosmologa, laureata Nagrody Templetona, Michała Hellera. Ot, choćby taki cytat z jednej z nowszych jego książek. „Struktura matematyczna staje się teorią fizyki z chwilą, gdy się ją potraktuje jako swoisty plan architektoniczny, zgodnie z którym została skonstruowana pewna część lub pewien aspekt struktury świata. Po wykonaniu tego zabiegu zamiast badać strukturę świata można badać odpowiednią strukturę matematyczną i jest rzeczą zupełnie zadziwiającą, że metoda ta daje wyniki, nadzwyczaj często potwierdzane zgodnością teorii z danymi eksperymentu" (podkreślenia moje, JAC). Ba, dalej czytamy, że „trzeba [...] bardziej wierzyć strukturom matematycznym niż własnym wyobrażeniom". Z historii tworzenia teorii atomu okazało się bowiem, że „bardziej subtelne doświadczenia musiały wejść w oddziaływanie z bardziej subtelnymi strukturami matematycznymi". Co więcej niektóre z nich „trzeba było dopiero wymyślać, a [...] nierzadko okazywało się, że od dość dawna były już znane matematykom". Zadziwiające zaś jest to, że „nauka nie tworzy świata, lecz go odkrywa". Ale pomiędzy światem a ludzkim umysłem istnieje przedziwny rezonans i na tym właśnie polega zagadka zrozumiałości świata, której – jak sądził Einstein – „nigdy nie pojmiemy".

Matematyzacja nauki ma trzy aspekty: 1° – matematyzacji rezultatów (wyników poznawczych), 2° – matematyzacji metod poznawczych, czyli używania metod wypracowanych przez matematyków (stosowania różnych rachunków) i 3° – matematyzacji struktury, czyli aksjomatyzowania i formalizowania teorii naukowych. Biologia – w przeciwieństwie do fizyki – jak dotąd „opiera się" matematyzowaniu w ostatnim znaczeniu. Ale jednak – struktury biologiczne wcale nierzadko niejako modelują struktury matematyczne. Choćby widok tęczówki oka i źrenicy wielu gatunków zwierząt jest obrazem okręgu, a kolonia toczka (*Volvox*) w ogólnym zarysie – kuli. Interesująca jest też sprawa proporcji budowy ciała różnych organizmów – od pierwotniaków przez rośliny do zwierząt i człowieka, tak jak mikrostruktury cząsteczek. Można tu myśleć o helisach DNA, o spiralnej strukturze skorupek niektórych otwornic czy muszli ślimaków i głowonogów (łodzika, amonitów). Wielokrotne symetrie – np. wieloosiową – można znaleźć w budowie różnych promienionóżek (*Actinopoda*) –

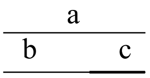
pierwotniaków wodnych, obejmujących trzy gromady: kolconóżki (*Acantharia*), promienice (*Radiolaria*) i słonecznice (*Heliozoa*) – ryc. 1.



Ryc. 1. Przykłady „matematycznych" proporcji skorupek wg Haeckla: a – otwornica *Cristellaria echinata*, b – *Ammonites ornatus*, c – pierwotniak *Haeckeliana porcelana* z typu Cercozoa, d – kolconóżka *Lychnaspis miranda* (wg Haeckla, zmienione).

Na tym rysunku pojawiło się określenie 'proporcja'. Jest ono wieloznaczne. Tutaj zostało użyte nie w znaczeniu przyjętym w opracowywaniu statystycznym wyników naukowych, np. porównywaniu frakcji jakiejś całości. Gdy są dwie – *a* i *b*, proporcjami nazwiemy stosunek $\frac{a}{a+b} : \frac{b}{a+b}$ Natomiast w znaczeniu potocznym ma się na myśli prawidłowy, a nawet harmonijny według subiektywnej oceny estetycznej – stosunek do siebie dwu lub więcej części składowych jakiejś całości, np. figury geometrycznej płaskiej lub trójwymiarowej.

Taki charakter ma tak zwana – zwłaszcza w starożytności – ***boska proporcja***, później najczęściej zwana ***złotą proporcją*** albo ***złotym podziałem*** (inne nazwy, a są liczne, może Czytelnik znaleźć w internecie). Wygodnie tę proporcję zilustrować właśnie przykładem podziału odcinka na dwie części. Jeśli cały odcinek oznaczymy jako *a*, zaś jego części – jako *b* i *c* (tzn. *b*+*c*=*a*),



ze złotym podziałem mamy do czynienia, jeżeli

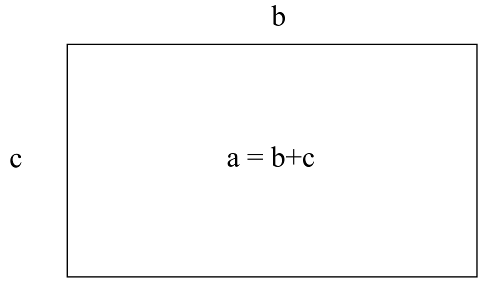
$\frac{b}{c} = \frac{a}{b} \approx 1{,}61803398.$

Tę liczbę matematyk Mark Barr zaproponował oznaczyć grecką literą *φ* (fi), od której zaczynało się imię słynnego rzeźbiarza starożytności, Fidiasza. Jej wartość wynosi:

$$n \ \hat{A} \frac{1U\sqrt{5}}{2} \ 1{,}618\ 033\ 98$$

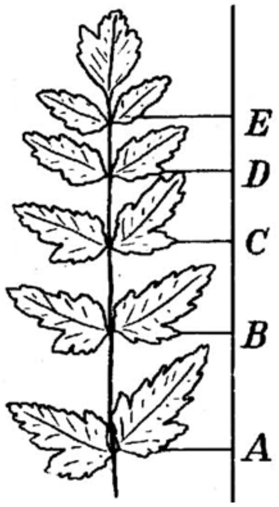
Czasami dużą literą *Φ* oznacza się odwrotność, 1/*φ* czyli $\frac{c}{b} = \frac{b}{a} \approx 0{,}61804.$

W świecie ludzkim często mamy do czynienia z prostokątami. Okazuje się, że ludzie preferują takie, które spełniają warunki złotej proporcji (ryc. 2). Co dziwniejsze podobne wyniki dają testy z różnymi gatunkami zwierząt.



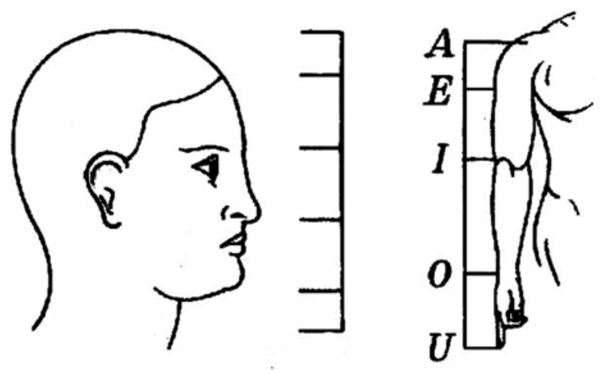
Ryc. 2. Prostokąt, którego boki spełniają kanon złotej proporcji $\frac{(b+c)}{b} = \frac{b}{c}$, skąd b » 1,618 033 98 c.

Pochodzenie boskiej proporcji nie jest jasne. Zwykle uważa się, że można ją znaleźć w całym Wszechświecie (co oczywiście nie znaczy, że wszędzie!) – od skoku niektórych spiralnych galaktyk po muszle mięczaków (por. ryc. 1a, b), od rozmieszczenia listków na gałązce (ryc. 3) po budowę ludzkiego ciała (ryc. 4, 5).



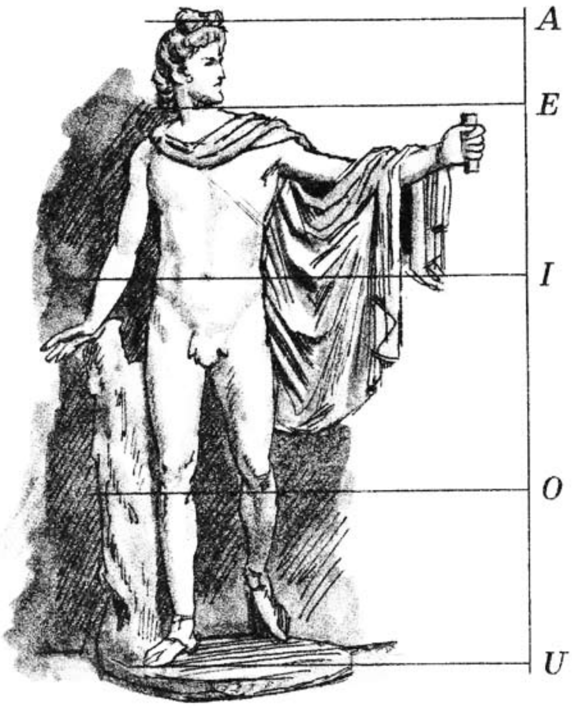
Ryc. 3. Między każdymi parami listków trzecia leży w miejscu złotego cięcia (wg Jeleńskiego, zmienione).

W budowie ciała ludzkiego od starożytności doszukiwano się różnych proporcji kanonicznych. Najbardziej bodaj jest spopularyzowany rysunek Leonarda da Vinci (1452–1519), z ok. r. 1487 przedstawiający figurę nagiego mężczyzny, w dwóch nałożonych na



Ryc. 4. Przykłady odległości odcinków ludzkiej twarzy i ręki – wskazujące na realizację reguły złotego cięcia (wg Jeleńskiego, zmienione).

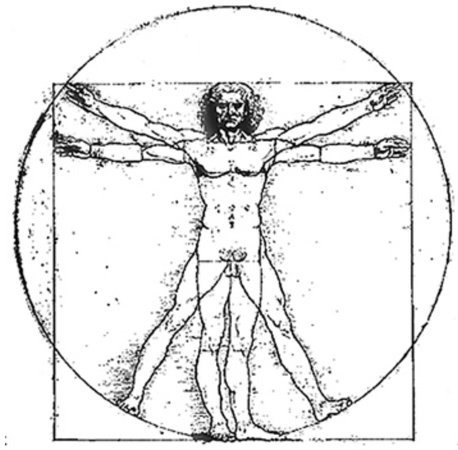
siebie pozycjach, wpisaną w kwadrat (łac. *Homo Quadratus*) i okrąg koła, którego środek stanowi pępek. Stanowi on ilustrację do starożytnego traktatu Witruwiusza (Marcus Vitruvius Pollio, ur. ok. 80–70 p.n.e., zm. po ok. 15 n.e.), rzymskiego architekta, budowniczego i mechanika z I w., który pracował jako nadworny architekt wojenny Juliusza Cezara i cesarza Augusta. Wg tego „Człowieka Witruwiańskiego" (ryc. 6) wysokość człowieka to 10 modułów, a moduł – to wy-



Ryc. 5. Linia *I* dzieli całą postać Apollona Belwederskiego wg złotej proporcji (*IU versus IA*). Taki sam jest stosunek odcinków *IE* do *EA* (wysokości głowy). Linia *O* zaznacza podział nóg według złotego cięcia (wg Jeleńskiego, zmienione).

sokość głowy mierzona od brody do nasady włosów. Na rysunku Leonarda wysokość dorosłego człowieka równa się w przybliżeniu szerokości jego rozstawionych ramion.

Matematykę „widać" także w członowanej strukturze wielu roślin, zwierząt i ludzi – stanowiącej jakby rytm morfologiczny. Analogicznie – procesualne są różne rytmy fizjologiczne. Ich matematyczny aspekt kryje się w odwrotnej ich proporcjonalności do wymiarów ciała zwierzęcia.



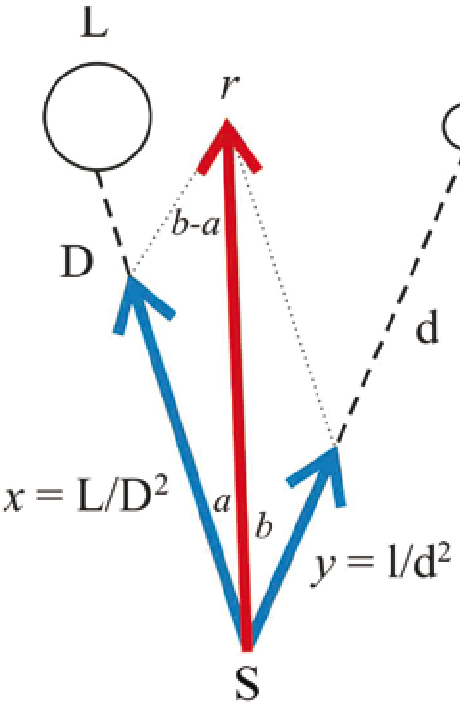
Ryc. 6. „Człowiek Witruwiański" Leonarda da Vinci.

Quasi-geometryczne, -inżynierskie i podobne działania zwierząt. Przedustawna wiedza *know–how*

Ciekawa jest sprawa przedustawnej „wiedzy" o charakterze *know–how* u wielu gatunków zwierząt. Chodzi mi tu o znajomość właściwego zachowania się niepoprzedzonego żadną nauką. Szczególnie fascynujące z punktu widzenia naszej tematyki są takie działania, które od człowieka wymagałyby stosowania matematyki.

Weźmy prosty przykład tak zwanego doświadczenia z dwoma światłami (niem. *Zweilichterversuch*). Jeśli dodatnio fototaktyczne zwierzę posadzić w zacienionym pomieszczeniu z widokiem w poziomej płaszczyźnie na dwa źródła światła o jednakowym natężeniu, będzie ono początkowo szło po dwusiecznej kąta wyznaczonego przez punkt startu i oba światła, by na końcu zakręcić do jednego z nich. Przy światłach o niejednakowym natężeniu, znajdujących się w jednakowych odległościach od punktu startowego (na ryc. 7 – S oraz, odpowiednio, D i d, przy czym $D = d$) – tendencja ruchu fototaktycznego jest wprost proporcjonalna do natężeń świateł (L i l, a wyrażają ją graficznie niebieskie wektory x i y). W efekcie zwierzę podąży wzdłuż wypadkowej (wektor czerwony r). Zgodnie z tzw. *regułą równoległoboku* – stanowi ją przekątna równoległoboku uworzonego na bokach x i y [wraz z liniami kropkowanymi], która jest skierowana bliżej światła jaśniejszego (na ryc. 7 światło L jest dwa razy silniejsze od świateł l – i odpowiednio wektor x jest dwukrotnie większy od y).

W przeciwieństwie do rozwiązania geometrycznego przy pomocy linijki i kątomierza, rachunkowe wyznaczenie kąta *a* odległości wektora *r* od kierunku poło-



Ryc. 7. Reguła równoległoboku w fototaktycznym wyborze dwóch świateł różnej jasności. Objaśnienia w tekście (oprac. J.A. Chmurzyński, rys. J. Korczyńska).

żenia silniejszego światła (*D* na ryc. 7) jest znacznie bardziej skomplikowane – i wg Roberta Bartoszyńskiego (dane bezpośrednie) wynosi:

$$a = \arcsin\left(\frac{l \sin b}{d^2\sqrt{\left(\frac{L}{D^2}\right)^2 + \left(\frac{l}{d^2}\right)^2 + 2\left(\frac{L}{D^2}\cdot\frac{l}{d^2}\right)\cos b}}\right),$$

gdzie *b* jest kątem między wektorami *R* i *y*.

Jeśliby uznać za działania matematyczne ocenę wielkości fizycznych – w rodzaju mierzenia długości, szacowania kątów i azymutów, a także ocenę obfitości czy jakości wyznaczanej np. przez stężenie jakiejś substancji w roztworze – to wiele zwierząt dysponuje takimi zdolnościami.

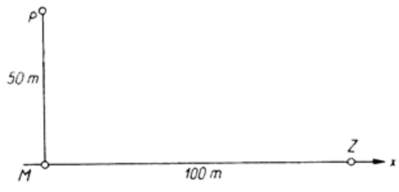
Z pierwszych – korzystają w orientacji przestrzennej, zwłaszcza w nawigacji zwanej zliczeniową (ang. *dead reckoning*). Jak wiadomo, opiera się ona na ustaleniu azymutu trasy względem słońca czy biegunów magnetycznych i ocenie długości przebytej drogi. Tak choćby „nawiguje” pszczoła–zbieraczka na znanej trasie po wziątek i do ula. Długość przebytej trasy ocenia po prostu zmęczeniem. Zbieraczkę zwerbowała do pracy zwiadowczyni, która geometrią i prędkością tańca na plastrze wyraziła kierunek właściwego lotu i odległość źródła pożytku. Intensywnością tańca przekazała też informację o wydajności źródła względnie stężeniu cukru w nektarze. Z kolei poziomy azymut lotu względem słońca przetransponowała w tańcu na ciemnym pionowym plastrze na kąt względem siły ciężkości. Takimi zdolnościami do przekładania poziomego azymutu na pionowy kąt dysponuje wiele innych gatunków owadów – niekoniecznie do celów porozumiewania się.

Wiele zwierząt ma wrodzone algorytmy zachowania się, które człowiek opisuje matematycznie. Chciałoby się powiedzieć, że „wie” matematykę, tak jakby miało wrodzoną znajomość praktycznej geometrii czy rachunku całkowego. Przykłady? – Proszę bardzo.

Skracanie trajektorii odbywanej przez mrówkę drogi z mrowiska do źródła pożytku, albo powrotu do gniazda chrząszcza krawca (*Lethrus apterus*) z liściem rośliny pokarmowej – jak wykazał ukraiński entomolog, Leonid Francewicz – są z matematycznego punktu widzenia równoważne rozwiązywaniu skomplikowanej całki.

Podobnym pseudomatematycznym problemem jest tzw. psia krzywa. Jest to krzywa trajektorii drapieżnika, który ściga uciekającą zwierzynę, np. zająca. Równanie tej krzywej jest dla biologa nieprzyjemnie skomplikowane, a jednak zwierzę – choć oczywiście nie rozwiązuje go matematycznie – zachowuje się zgodnie z jego rozwiązaniem. Przedstawił to S. Kowal w książce *Przez rozrywkę do wiedzy.* (*Rozmaitości matematyczne*).

„Pies znajduje się w punkcie P w odległości 50 m od myśliwego znajdującego się w punkcie M. Pies zobaczył zająca w punkcie Z odległym o 100 m od punktu M. Pies puścił się w pościg za zającem, który ucieka na prawo po prostej MZ (ryc. 8). Przez cały czas pies widzi zająca i na niego kieruje swój pościg. Jaka jest trajektoria pościgu psa, jeżeli prędkość ucieczki wynosi 5 m/s, a prędkość pościgu 10 m/s? Zadanie to można rozwiązać rachunkowo. Otrzymuje się wówczas dość skomplikowane równanie, którego sposób rozwiązania dla czytelnika jest niedostępny i mało atrakcyjny.

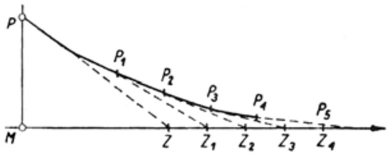


Ryc. 8. Sytuacja doświadczalna z psem i zającem – objaśnienia w tekście (wg Kowala).

$$y = -\frac{a^{\frac{v}{w}}}{2\left(1-\frac{v}{w}\right)}(a-x)^{1-\frac{v}{w}} + \frac{(a-x)^{1+\frac{v}{w}}}{2a^{\frac{v}{w}}\left(1+\frac{v}{w}\right)} + \frac{a^{\frac{v}{w}}}{1-\frac{v^2}{w^2}}$$

a — początkowa odległość punktu Z od początku układu współrzędnych;
w — prędkość pościgu;
v — prędkość ucieczki.

Jak postępuje pies, który przecież nie zna się na równaniach, a jednak rozwiązuje to zadanie bez wahania. Wyjaśnię tę sprawę graficznie (ryc. 9).



Ryc. 9. Faktyczne zachowanie psa – objaśnienia w tekście (wg Kowala).

W punkcie Z znajduje się zając, w punkcie P pies. Pies biegnie wprost na zająca po linii PZ. W pierwszej sekundzie zając przebiegnie dystans ZZ_1, a pies dystans PP_1. W drugiej sekundzie zając przebiegnie dystans Z_1Z_2, a pies biegnący wprost na zająca – P_1P_2. W trzeciej sekundzie zając przebiegnie dystans Z_2Z_3 pies zaś P_2P_3 itd. – zając Z_3Z_4, pies – P_3P_4... Z ryciny 9 widać, że w pierwszym przybliżeniu trajektoria pościgu przedstawia się jako linia łamana $PP_1P_2P_3P_4$.... Jednakże decyzje psa co do kierunku pościgu zmieniają się w odstępach czasu mniejszych od 1 sekundy: mogą to być 0,1 lub 0,01 lub 0,001 lub jeszcze mniejsze części sekundy, bowiem proces pościgu jest ciągły. Gdybyśmy mogli przedstawić na rysunku trajektorię pościgu obliczoną co 0,1 sekundy, byłaby to linia łamana składająca się z dziesięciokrotnie większej liczby dziesięciokrotnie mniejszych odcinków; dla 0,01 sekundy otrzymalibyśmy jeszcze lepsze przybliżenie trajektorii pościgu psa, która jest linią krzywą ciągłą. Matematycy dali jej nazwę „psia krzywa".

Zwierzęca gra

Alboż zwierzęta w coś grają?

– I nie, i tak. Rzeczywiście nawet małpy człekokształtne nie grywają w karty czy w warcaby. Jednakże można powiedzieć, że *życie jest grą*. Wszystkie bowiem zwierzęta znajdują się w sytuacjach konfliktu interesów – czy to z innymi osobnikami swego gatunku, a nawet grupy społecznej (np. dzieci jednych rodziców w gnieździe przy małej podaży pokarmu) czy też ze zwierzętami innych gatunków (np. pasożytami i drapieżnikami) lub ludźmi (*exemplum* bobry i leśnicy) czy wreszcie – z wrogim „światem" (niesprzyjającą pogodą, powodziami itp.).

Otóż badaniem optymalnego zachowania w przypadku konfliktu interesów zajmuje się dział matematyki, nazwany *teorią gier*, gdyż wywodzi się z badania gier hazardowych i taką też zachował terminologię, choć główne zastosowanie znajduje w ekonomii, biologii (a szczególnie socjobiologii i ekologii behawioralnej), socjologii oraz w informatyce. Do biologii wprowadził ją George R. Price i John Maynard Smith, twórcy ewolucyjnej teorii gier. W teorii gier działania podejmowane przez każdego z uczestników mają wpływ na pozostałych uczestników gry – przy czym należy pamiętać, że dla zwierzęcia takim „uczestnikiem gry" mogą być warunki życia, jeśli podlegają one wpływowi zachowania zwierzęcia i gdy zwierzę podejmując kolejne decyzje co do wyboru swoich strategii bierze te zmiany pod uwagę. Prócz tego zachowanie zwierząt można analizować w świetle innej dziedziny matematyki, zwanej *teorią decyzji*, w której decyzje są podejmowane w warunkach ryzyka lub niepewności, ale nie zależą one od strategicznych działań innych „graczy" niż samego decydenta.

W tych badaniach poszukuje się elementów niezmienniczych zachowania, które w danym gatunku zwierząt lub w danych gatunkach, stanowiących strony konfliktu mają podłoże dziedziczne, ukształtowane w toku ewolucji. Podstawą rozważań jest tu założenie oparte na teorii ewolucji, że określony sposób zachowania się może zostać utrzymany przez dobór naturalny tylko wtedy, gdy osobnikom nim się posługującym zapewnia dostateczną wartość dostosowawczą, a więc pozwala im się utrzymać (albo uzyskać przewagę) w populacji. Jednakże takie zachowanie się oprócz korzyści pociąga za sobą pewne ‘koszty', czyli straty czasu i energii (zwane ‘nakładem', ang. *investment*), często niosące też ze sobą ryzyko (np. ataku drapieżnika). Tak więc korzyść ewolucyjna musi przeważać nad stratami, zaś dobór naturalny zgodnie z tzw. teorią optymalizacji będzie faworyzował taki typ zachowania się, który da największe korzyści dostosowania (darwinowskiego *fitness*) przy najmniejszych kosztach. Rozważanie takiego zachowania się przez teorię decyzji musi oczywiście prowadzić do próby oceny płynących z niego możliwych zysków i strat, a następnie porównania ich z alternatywną strategią behawioralną. W przypadku współżycia lub stałych konfliktów (drapieżnictwo, pasożytnictwo) mówimy o *koewolucji* – np. kwiatów i owadów. Pewne aspekty takich zachowań niedawno poruszałem w artykule „O łowach – niemal wszystko" (*Wszechświat*, 113, 2012 Nr 7–9, ss. 199–210). Oczywiście też w mechanizmach ewolucyjnych należy szukać wyjaśnienia cytowanych wcześniej form zachowania, które tak niezwykle zdawałoby się odpowiadają na „matematyczne" wymogi sytuacji. Przypomnijmy: lepsze 'dostosowanie' – to zdolność danego osobnika do przekazania swych genów większej liczbie potomstwa niż porównywany z nim osobnik, a ściślej jest to iloczyn prawdopodobieństwa przeżycia i liczby wydanego potomstwa. Jeżeli użyć terminu *dostosowanie łączne* (ang. *inclusive fitness*) na określenie dostosowania uzyskanego pośrednio w działaniach społecznych osobnika, możemy zrozumieć np. altruizm nepotyczny ('hamiltonowski'). Przykładem może służyć pomoc tzw. piastuna w wychowaniu młodszego o rok rodzeństwa – popiera on oczywiście część dzielonych z nim własnych genów, a osobniki, które rodzice wychowali dzięki niemu ponad własne minimum, można przypisać jego wpływowi.

Dajmy parę przykładów dziedzicznego zachowania wpływającego na dostosowanie osobnika.

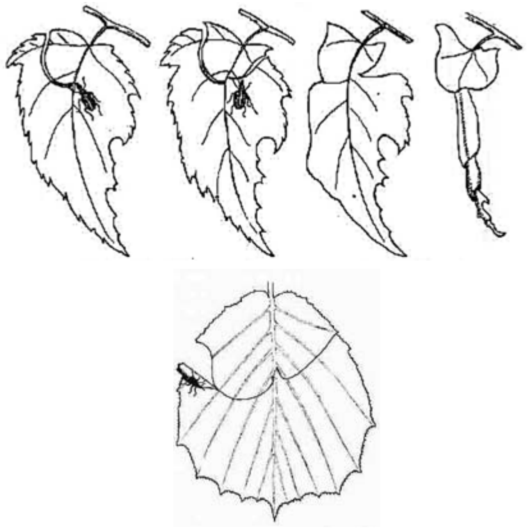
Niech pierwszy dotyczy przekazu informacji. Zwierzę może „wysyłać" informacje rzetelne lub fałszywe (na przykład żeby się okazać lepszym konkurentem czy groźniejszym przeciwnikiem niż jest w rzeczywistości). Teoretyczne wskazówki daje tu socjobiologiczna *zasada pokerzysty*, która głosi, że pierwszą regułą dobrej gry w pokera jest pamiętać, że „kto n i g d y nie blefuje, n i g d y nie wygrywa; kto z a w s z e blefuje, z a w s z e traci"; innymi słowy na porozumiewaniu się można wygrać bardzo wiele, gdy jego prawdziwość i blefowanie jest oszczędnie i zręcznie racjonowane – tyle prawdy, by zachować swą wiarygodność – tyle fałszu, by zachować możliwości manewru. Oszukiwanie (biologia ewolucyjna nie stroni od takich antropomorficznych określeń!) w pewnym niewielkim stosunku do komunikatów prawdziwych jest stosowane przez zwierzęta i może stanowić przejaw tzw. strategii ewolucyjnie stabilnej (SES).

W socjobiologii 'legalistą' (ang. *bourgeois*) nazwano osobnika, który w populacji zachowuje się odmiennie w zależności od tego, czy jest posiadaczem jakiejś wartości, czy nie. Wartością tą może być rewir tokowy, nora – czy to wykopana przez siebie, czy też zawładnięta przez przedstawiciela gatunku, który sam jej nie kopie. *Strategia legalisty* jest postępowaniem osobnika, którego zachowanie się zależy od sytuacji, w jakiej się znajduje: j e ś l i p r z y b y ł p i e r w s z y – to zachowuje się jak agresor, j e ś l i p r z y b y ł p ó ź n i e j – zachowuje się jak ustępujący. Z analizy teorii gier okazuje się, że właśnie 'legaliści' w pewnych okolicznościach reprezentują strategię ewolucyjnie stabilną i po pojawieniu się w populacji z czasem doprowadzają do wyeliminowania innych strategii. Strategię legalisty stosują niektóre kraby korzystające z nor służących im za schronienie, pająki konkurujące o miejsce na założenie sieci, samce pawiana zabiegające o samicę. J.-H. Fabre taką strategię, stosowaną przez samotne pszczoły – mularki murówki (*Chalicodoma muraria*), nazwał „prawem pierwszego zaborcy". Jak wie z obserwacji każdy podróżny, ludzie stosują typową strategię legalisty przy zajmowaniu miejsca w przedziale kolejowym.

Bywają wszakże zwierzęta stosujące strategię przeciwną do strategii legalisty; nazwano ją *strategią legalisty paradoksalnego*. Tu przykładem może służyć zachowanie się pająka *Oecobius civitas*, u którego przedmiotem konkurencji są norki, w których ukrywają się osobniki. Pająk mający norkę ustępuje przed przybyszem usiłującym mu ją odebrać, a sam wyrzuca mieszkańca sąsiedniej norki. Mam nadzieję, że jest zbędne podkreślenie tego, że oczywiście zwierzęta nie dokonują żadnej analizy w oparciu o teorię gier, lecz opierają się na genetycznie utrwalonych tendencjach w toku długotrwałego procesu ewolucji – tak jak drapieżnik polujący na ruchliwe ofiary nie oblicza 'psiej krzywej'.

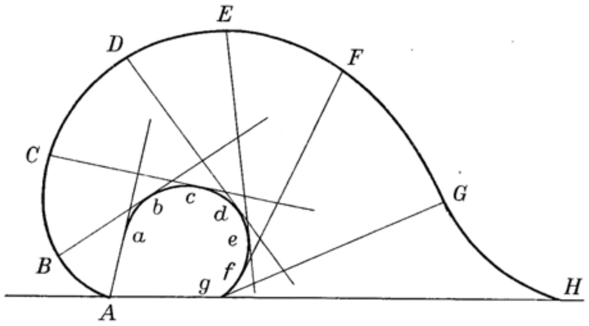
Zwierzęta-„inżynierowie" i ich *quasi*-matematyczne wyczyny

Praktyczne zdolności „matematyczne" ujawniają zwierzęta rozwiązujące – zazwyczaj instynktowo – zadania „inżynierskie". Tak ryjkowce wycinają liść wzdłuż krzywej będącej ewolutą linii jego brzegu (rys. pierwszy z lewej na ryc. 10). '**Ewoluta' krzywej** [z niem. *Evolute* < łac. *evólvĕre* 'rozwijać'] jest to krzywa płaska złożona ze środków krzywizny odpowiadających punktom krzywej, inaczej: miejsce geometryczne środków krzywizn danej krzywej. Jak pisze



Ryc. 10. Cięcia liści i zwijanie tutki przez chrząszcza ryjkowca – zwijacza czarnego czyli tutkarza brzozowego (*Rhynchites s. Deporaus betulae*), u góry – na brzozie, rysunek dolny – na leszczynie (wg różnych autorów, zmienione).

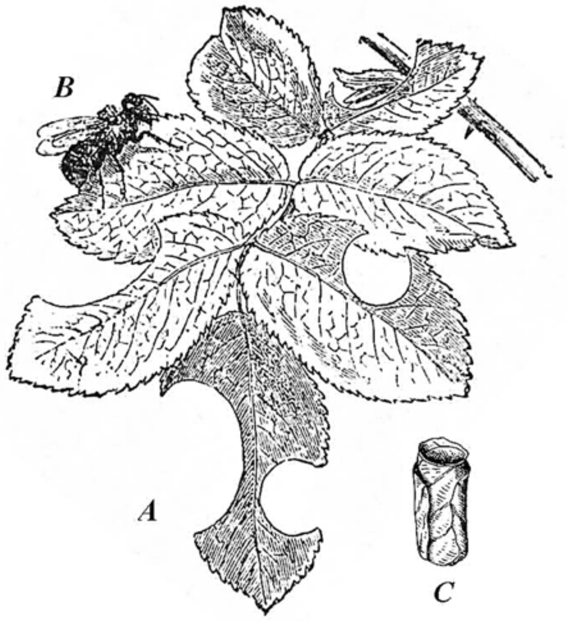
S. Jeleński, zwijacz zaczyna od wycięcia ewoluty lewego brzegu liścia. Załóżmy, że krzywa *ABCDEFGH* (na ryc. 11) obrazuje brzeg połowy liścia, dla którego chcemy znaleźć ewolutę. W tym celu przeprowadzamy w tych punktach szereg normalnych – tj. linii prostopadłych do tej krzywej, a następnie w obrębie powstałego w nich pola wrysowujemy styczne do tych normalnych i łączymy je krzywą *abdcefg*; jest to właśnie szukana ewoluta. Zgodnie z zasadą ekonomii pracy – następną połowę w drugiej części blaszki liścia ryjkowiec wycina już mniej dokładnie, „na oko" (ryc. 10 – obrazek 2. i ostatni). Następnie dolną, większą, odciętą część liścia zwija w kształcie cygara (ryc. 10, czwarty rys. od lewej) – tworząc w ten sposób gniazdo dla swych przyszłych larw.



Ryc. 11. Wykreślanie ewoluty *abcdefg* krzywej płaskiej ABCDEFG obrazującej część brzegu liścia (bez fragmentu GH) (z Jeleńskiego, zmienione).

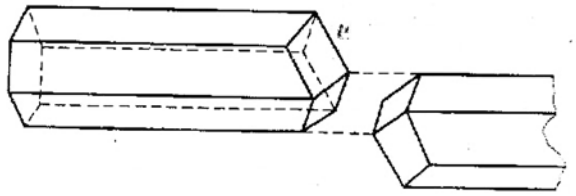
Spotkanie ryjkowca wymaga pewnego wysiłku. Natomiast łatwiejszy jest kontakt z działalnością innego „matematyka" – samotnej pszczoły, miesierki różówki (*Megachile centuncularis*). Nawet posiadacz miejskiej działki może spotkać na brzegach listków swej róży tajemnicze, koliste lub owalne otwory (ryc. 12 – *A*). Cierpliwy obserwator może z czasem zobaczyć ich sprawcę – małego owada (ryc. 12 – *B*), który siada na brzegu blaszki i zaczyna ją ciąć żuwaczkami posuwając się w kółko. Gdy zrobi całe okrążenie i dotrze znów do brzegu – odlatuje ze zwiniętym w tutkę kawałkiem liścia. Po przyniesieniu na upatrzone miejsce – do dziury w ziemi, w starym murze czy do podłużnego otworu w drzewie, miesierka wsuwa ją tam, wyściełając liśćmi dno i ściany mieszkania, niby naparstek (ryc. 12 – *C*). W zadaniu konstrukcyjnym z geometrii, które owad „rozwiązuje" na listku, nożyczkami – jak pisze Jean-Henri Fabre – są jego żuwaczki, zaś cyrklem oś własnego ciała.

Inny „inżynierski" problem rozwiązuje pszczoła miodna (*Apis mellifera*). Chodzi o architekturę plastra pszczelego. Jak pisze S. Kowal w cytowanej już książce, zagadnienie to fascynowało już starożytnych filozofów: zajmowali się nim Arystoteles (IV w. p.n.e.), przyrodnik Pliniusz Starszy (I w. n.e.), a w czasach nowożytnych fizyk R.A.F de Réaumur (1683–1757) oraz liczni matematycy. „Badali oni architekturę komórki i podziwiali przedziwny instynkt pszczół, które woskowym celkom swoim nadały taką postać, aby przy najmniejszym zużyciu materiału (wosku) i pracy zbudować jak najpojemniejsze pomieszczenie i jak najkorzystniej zagospodarować niewielką przestrzeń ula. [...] Najmniejszy obwód i zarazem największe pole powierzchni [ma] sześciokąt foremny". Z kolei dno komórki, żeby najekonomiczniej łączyło się z położonymi z przeciwnej strony komórkami (a wszystkie są nieco podniesione ku górze przy wlocie, żeby się z nich nie wylewał miód) – muszą mieć skomplikowaną geometrycznie postać tzw. *piramidy Maraldiego* (od nazwiska włoskiego astronoma i matematyka, który ją opisał). Składa się ona z trzech rombów o wspólnym wierzchołku, położonym na przedłużeniu osi graniastosłupa komórki. W każdym z rombów kąty mają zawsze po 109°28' i po 70°32' i tylko przy takich kątach powierzchnia celek jest najmniejsza; gdyby dno komórek było płaskie, strata wosku wynosiłaby ok. 2% (na 54 celkach zaoszczędzają wosk na celkę pięćdziesiątą piątą) – ryc. 13.

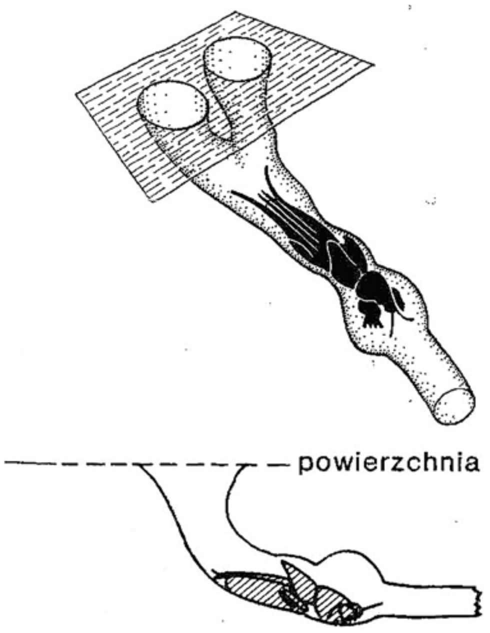


Ryc. 12. Owalne i kołowe ślady wycięcia fragmentów liści róży przez miesierkę różówkę (wg Künckela i in., zmienione).

Najmniej chyba jest znany fakt stwierdzony przez panią H.C. Bennet-Clark, że norki strydulacyjne, w których śpiewają samce turkuci – zwłaszcza z gatunku *Gryllotalpa vinea* (ryc. 14), mają przekrój zbliżony do krzywej wykładniczej, przez co dźwięki emitowane u nasady rożka są emitowane z najwyższą możliwą wydajnością.



Ryc. 13. Widok z boku dwóch przylegających do siebie spodami sześciobocznych komórek plastra pszczelego – na rysunku sztucznie rozsuniętych, aby uwidocznić rombościenne *Piramidy Maraldiego* (P) (wg Viauda, zmienione).



Ryc. 14. Widok z góry i przekrój podłużny norki strydulacyjnej turkucia *Gryllotalpa vinea* (wg różnych autorów).

„Bezsłowne liczenie" ... fizjologiczne

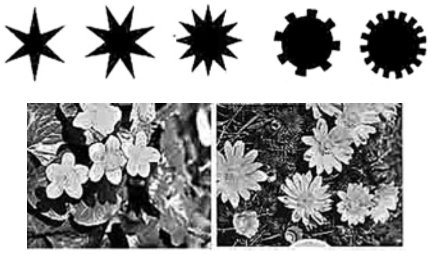
Dobrym przykładem „matematyczności fizjologii" zwierzęcej może być teoria faz Borysa P. Uwarowa (1889–1990). Ten rosyjsko-brytyjski badacz w latach 1921 i 1937 opublikował wyniki swych badań nad szarańczą wędrowną (*Locusta migratoria*) i stacjonarną, samotną (*L. danica*). Jak zdołał wykazać, obie nazwy dotyczą tego samego gatunku, któremu pozostawił nazwę szarańczy wędrownej. Zgodnie z zaproponowaną przez niego „teorią faz" – może ona występować w formie dwóch głównych faz – samotnej (*solitaria*) i stadnej (*gregaria*), wędrownej. Przejście z pierwszej w drugą jest złożonym procesem biologicznym i zachodzi podczas paru pokoleń, prowadząc do różnic morfologicznych, fizjologicznych i psychiczno-behawioralnych między odpowiednimi osobnikami. Jak wykazali następni badacze, osobniki fazy samotnej mogą jednak nabyć eto-psychiczne cechy fazy stadnej bardzo szybko, w ciągu 4–8 godzin – wskutek zagęszczenia ich populacji. Efekt ten wymaga niejako „scałkowanych" pobudzeń od innych osobników, wśród których dominujące znaczenie mają bodźce czuciowe pochodzące z piszczeli III pary odnóży, tzw. skocznej. Inicjuje to zmiany nerwowe i biochemiczne leżące u podłoża zachodzącej następnie fazy tej zmiany. Z tymi bodźcami sumuje się wpływ bodźców wzrokowych i węchowych, które jednak same nie dają tego efektu. Stwierdzono też, że bodźce wzrokowe muszą pochodzić od osobników poruszających się niezależnie od odbiorcy (odbicie w lustrach tego efektu nie powoduje). Takie „scałkowane" pobudzenie, jak się wydaje, daje „zero–jedynkowe" poczucie organizmu: „mało pobudzeń socjalnych – wiele pobudzeń" (przy czym najpewniej nie ma tu percepcji – czyli uświadamiania sobie bodźców).

Inne zjawisko, ale również przebiegające na poziomie czysto fizjologicznym, polega na sterowaniu częstotliwością rytmu. Przed samą wojną pochodzący z Inflant, niemiecki fizjolog zachowania, Erich von Holst opisał zjawisko tzw. efektu magnetycznego (niem. *Magneteffekt*). Polega ono na „pociąganiu" *zależnego* rytmu fizjologicznego lub behawioralnego przez częstotliwość *niezależnego* rytmu. Może ono zachodzić w obrębie jednego organizmu (np. synchronizacja płetw u ryby), ale też może polegać na naśladowaniu przez osobnika doznawanego w wyniku nieświadomej recepcji zewnętrznego rytmu zjawiska fizycznego, osobnika zwierzęcego lub człowieka. I to właśnie może nas interesować w kontekście naszego tematu. Wiele przykładów podążania wewnętrznego rytmu za doznawaną częstotliwością zewnętrzną przytacza w swej książce znany popularyzator nauk behawioralnych, Vitus B. Dröscher. I tak – typowy rytm skoków wiewiórki 120/min (po 30–40 cm) pod wpływem cykania metronomu może się zmieniać na 144/min lub 92/min. Takie zjawisko jest znane z cyrku z pokazów z końmi i niedźwiedziami, a także z kobrami indyjskich fakirów. Jak wiadomo, węże są generalnie głuche i w istocie reagują na widok rytmicznego kiwania się fakira w takt granej przezeń melodii. Rytmiczną synchronizację śpiewu obserwowano też u pd.-wsch. azjatyckiego sroczka białorzytnego (*Copsychus malabaricus*), ptaka z rodziny muchołówek, znanego z najbardziej melodyjnego śpiewu ze wszystkich. U człowieka podobny efekt magnetyczny dotyczy pulsu. Wynosi on typowo ok. 70/min, ale przy budziku może się zsynchronizować do 100/min, co powoduje bezsenność, podczas gdy spowolnienie go przez efekt magnetyczny do 55/min wywołuje senność. Pies reaguje jeszcze silniej:

przy normie 100–120/min – rytmem egzogennym można go podnieść nawet do 300/min, przy czym stosunek rytmu wewnętrznego do zewnętrznego nie musi wynosić 1:1, ale może być 2:1, 3:2 itp.

...i percepcyjne

Gdy się rozejrzeć po świecie zwierząt łatwo zobaczyć, że jednakowe „zadania" bywają rozwiązywane na różne sposoby. Czasem dzieje się tak nie tylko w różnych gatunkach, ale wręcz u jednego i tego samego osobnika. Tę zdolność nazywa się *ekwifinalnością* [łac. *aéquūs* 'równy', *fīnis* 'koniec, cel']. W artykule o myśleniu zwierząt (*Wszechświat*, 112, 2011 Nr 10–12 (2574–2576), ss. 251–257) wspominałem o imitowaniu myślenia przez postaciowe spostrzeganie. Przypomnijmy: *postaciowość* jest to właściwość spostrzeżenia wyrażająca się w tym, że najważniejszą cechą jest jego całościowa struktura, np. „bukiet" woni czy smaku – „współczesna" (tzn. jednoczesna) struktura przestrzenna spostrzeżeń wzrokowych czy „następcza" (tj. zachodząca w czasie) – słuchowych, jak swoistego rytmu czy melodii. Postać w jednym akcie poznania percepcyjnego pozwala też na ocenę relacji między różnymi ilościami. Jak podają słowniki, ***ilość*** jest to kategoria pojęciowa obejmująca to, co może podlegać mierzeniu albo jest oceniane bez liczenia, jak określenie mnogości rzeczy nieprzeliczalnych lub niepoliczonych, to, czego może być więcej lub mniej albo równo, jak też może mieć wielkość rosnącą lub malejącą. Wprawdzie liczba płatków kwiatów, tak jak promieni w gwiazdkach i ząbków w zębatkach jest przeliczalna, ale można je też oceniać *ilościowo* – gdzie jest ich więcej, a gdzie mniej – na podstawie stopnia rozczłonkowania konturu. Na takiej ocenie postaciowej opiera się najprostsza forma tzw. ***bezsłownego liczenia*** (niem. *unbenanntes Denken*) pszczół, trzmieli i in. owadów, które oczywiście nie liczą płatków (ryc. 15).

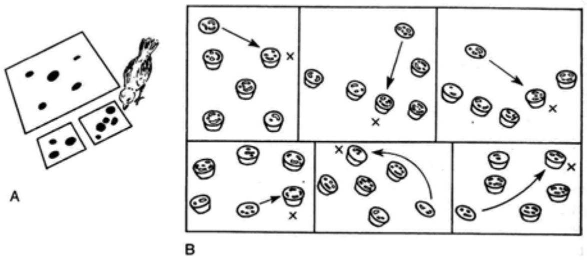


Ryc. 15. Figury, które może rozróżniać pszczoła miodna i wiele innych owadów dzięki percepcji postaciowej (oryg.); u dołu – przykłady podobnych naturalnych bodźców, kwiatów.

Ocena liczebności może się opierać nie tylko na postaci 'współczesnej' (czyli jednoczesnej), ale i 'następczej': kura może się nauczyć dziobać kilka kolejnych ziaren, następnie pominąć jedno lub więcej i znów dziobać ziarna tę samą, co poprzednio liczbę razy. Gdy zaś człowiek uważając na liczbę regularnych puknięć „pogrupuje je w myśli" na pewne „paczki", jak w sygnałach werbla w wojsku – możemy ustalić bez liczenia tożsamość ponad 15 puknięć.

„Mózgowe" szacowanie liczebności

Wydaje się, że inny mechanizm psychiczny odpowiada za **szacowanie liczebności rzeczy** (np. punktów) na pewnej ograniczonej powierzchni – także bez ich liczenia. Oto wiewórki i różne ptaki mogą się nauczyć wybierania wzorów zawierających określoną liczbę plam – i tak: gołębie do 5, papużka falista i kawka do 6, kruk, sroka, sójka do 7, papugi szare (*Psittacus*) do 8, niezależnie od ich względnych wielkości i ułożenia (ryc. 16); tę samą górną granicę (8) zdradza w doświadczeniach człowiek.



Ryc. 16. Przykład bezsłownego liczenia u ptaków. A – wybór przez sójkę wieczka z taką liczbą plamek jak na wzorcu (duży kwadrat); B – wybierane przez kruka naczynie zawierające nagrodę (x) na podstawie takiej samej liczby plamek na przykrywce, co na wzorcowej płaskiej płytce (w kolejnych testach strzałki łączą wybrane naczynie ze wzorem) (wg Koehlera).

A. Nieder i współautorzy tresowali makaki, by odpowiadały, gdy kolejno zaprezentowano im taką samą liczbę kropek. Okazało się, że małpy mają w korze przedczołowej (*cortex praefrontalis*) neurony, które reagują wybiórczo na daną liczbę obiektów, co pozwala im nie tylko na uczenie się liczebności – ale na taką generalizację, że przy rozpoznaniu nie odgrywa roli różna wielkość obiektów, ich kształty i rozmieszczenie.

Dlatego niektórzy mawiają w tym kontekście o ***'bezsłownych pojęciach'*** (niem. *averbale Begriffsbildung*). Przy bezsłownym „liczeniu" tego typu pojawiać się mogą błędy.

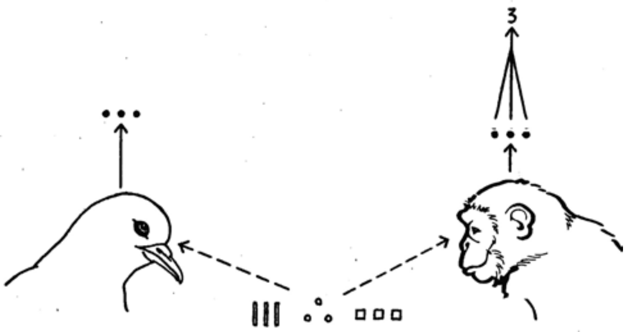
Praktycznie nie pojawiają się błędy przy **natychmiastowej ocenie liczebności** w granicach do 3–4 elementów, co zostało nazwane ***subitacją*** (ang. *subitizing* [z łac. *súbĭtus* 'nagły', *súbĭtō* 'nagle, bez przygotowania']). W tych granicach ocena jest szybka, dokładna i wiarygodna. Gdy wszakże liczba elementów przekracza 4, oceny są mniej dokładne i wiarygodne, a czas reakcji dramatycznie się wydłuża o 250–350 ms na każdy dodatkowy element. Być może, iż właśnie w ten sposób dochodzi się do omówionych wyżej wyników z szacowaniem liczby punktów.

Oczywiście subitacja może się ujawniać w różny sposób. Pamiętam, że w czasie gdy hodowaliśmy w domu dwa małe ptaszki, mewki japońskie (*Lonchura striata domestica*), córka przyniosła do nas „w depozyt" kota Mysia. Kot był na tyle przyzwoity, że nie próbował ich wyciągnąć i zjeść, natomiast chętnie je obserwował w klatce. Trwało to ponad rok – aż samiczka ze starości zasnęła i została z klatki usunięta. Mysia przy tym nie było. Gdy przyszedł do kuchni, gdzie stała klatka i podszedł do niej – wyraźnie był zaskoczony: zaglądał z jednej strony, z drugiej strony; nie ulegało wątpliwości, że szukał *gdzie jest drugi ptaszek*!

Liczenie przez zwierzęta

Chyba już czas „wyciągnąć królika z kapelusza" – i przejść do zwierząt, które potrafią liczyć. ***Liczenie*** ma dwa podstawowe znaczenia: (**1**) wymieniania liczb w kolejności i (**2**) obliczania czyli wykonywania działań arytmetycznych, np. rachowania czyli dodawania do siebie poszczególnych jednostek, inaczej sumowania. Warto zwrócić uwagę, że w najprostszym wypadku – ta ostatnia czynność niewiele się różni od pierwszej, gdyż może polegać na wymienianiu liczb w kolejności przypisując liczby przedmiotom (jak przy liczeniu jednakowych banknotów czy liczeniu uderzeń bijącego zegara ściennego). Przy okazji: ***liczba*** jest to (**a**) określenie mnogości rzeczy przeliczalnych, (**b**) wynik liczenia, a także (**c**) wyrażający to znak graficzny (składający się z ***cyfr***).

Przed z górą dwudziestu laty (1989) udało się Sarze Boysen i Gary'emu Berntsonowi stwierdzić istnienie u szympansa zdolności do liczenia. Po nauczeniu 4-letniej Sheby wybierania okrągłej kartki z liczbą kropek odpowiadającą 1–3 prezentowanych jej kawałków jedzenia, stopniowo zastępowano poprawną kartę – prostokątną z właściwą cyfrą *arabską*. Następnie (po kolejnych *ca* 300 próbach) wprowadzono cyfrę 0 przy pustej tacy – i nadliczbową kartę z cyfrą ‘4'; dla zgeneralizowania wyników zastąpiono kawałki jedzenia różnymi innymi przedmiotami (np. bateriami do latarki). Po osiągnięciu 68–85% poprawnych wyborów, przeprowadzono II serię doświadczalną. Wykonywano ją w podłużnej sali doświadczalnej, w której znajdowały się 3 możliwe miejsca z pokarmem oraz platforma startowa, tworzące w przybliżeniu kwadrat. W 1–2 z tych trzech miejsc umieszczano 0–4 pomarańczy. Z żadnego z tych punktów nie było widać, w których pojemnikach znajdowały się pomarańcze. Zadaniem Sheby było obejście wszystkich pojemników, sprawdzenie i powrót do platformy startowej (co następowało przeciętnie po 10–20 s) – a tam wybranie właściwej karty z arabską cyfrą odpowiadającą liczbie znalezionych w obu pojemnikach pomarańczy. W kolejnym doświadczeniu zastąpiono pomarańcze „etykietowaniem" dwóch z trzech karmników kartami z różnymi cyframi arabskimi od 0 do 4, dającymi pary 1, 0; 1, 1; 1, 2; 1, 3; 2, 0; 2, 2; i 3, 0. Sheba powinna była obejść wszystkie *trzy* miejsca, a następnie wybrać cyfrę odpowiadającą liczbie stanowiącej sumę obu znalezionych liczb. Udało jej się osiągnąć 73–84% poprawnych odpowiedzi (przy przypadkowej szansie równej 33% dla trzech kart i 25% – dla czterech. Jest tu więc podstawowa różnica w porównaniu nawet z subitacją (ryc. 17).



Ryc. 17. Szacowanie liczebności przez ptaka a liczenie szympansa (wg Tembrocka, zmienione).

Jak się wydaje, żadna praca ze zwierzętami innych gatunków nie dała równie spektakularnych wyników.

Prof. dr hab. Jerzy Andrzej Chmurzyński jest etologiem, emerytowanym kierownikiem Pracowni Etologii w Zakładzie Neurofizjologii Instytutu Biologii Doświadczalnej im. M. Nenckiego PAN w Warszawie (http://www.nencki.gov.pl/pracownia-etologii). E-mail: j.chmurzynski@nencki.gov.pl.