

## O MODELOWANIU SPRĘŻYSTYCH PŁYT NIEJEDNORODNYCH PERIODYCZNIE

Katarzyna Jeleniewicz, Wiesław Nagórko

Szkoła Główna Gospodarstwa Wiejskiego – SGGW

**Streszczenie.** Rozważane w pracy konstrukcje budowlane są płytami, czyli trójwymiarowymi obiektami materialnymi, opisywanymi modelami dwuwymiarowymi, o pewnych charakterystycznych cechach. W przypadku płyt niejednorodnych periodycznie opis taki jest znacznie bardziej skomplikowany przez nieciągłe i silnie oscylujące współczynniki występujące w równaniach modelowych. Celem pracy jest przedstawienie zwięzłego opisu pewnej metody modelowania homogenizacyjnego, czyli metody uśredniania tych współczynników tak, by były zależne tylko od parametru wielkości mikrostruktury (średnicy komórki periodyczności). W wyniku zastosowania tej metody otrzymane równania statyki i dynamiki płyt mają współczynniki stałe. Jako przykład zastosowania modelu przedstawiono rozwiązanie zamknięte dla płyty przegubowo podpartej, niejednorodnej periodycznie w dwu kierunkach.

**Słowa kluczowe:** płyty sprężyste, ośrodki periodyczne, homogenizacja nieasymptotyczna, drgania płyt zbrojonych

### WSTĘP

Płyta jest ciałem trójwymiarowym, ale opisywanym przez przemieszczenia, odkształcenia i naprężenia zależne tylko od dwu zmiennych określonych na pewnej powierzchni w tym ciele, tzw. powierzchni środkowej. Oznacza to, że płytę, która ma grubość, sprowadza się do płaskiego obszaru i tylko na tym obszarze są określane poszukiwane przemieszczenia (np. ugięcie lub naprężenia).

Płytę można więc rozumieć jako pewien płaski obszar wraz z prostopadłymi do niej włóknami materialnymi, które wyznaczają górną i dolną powierzchnię graniczną. Odległość między górną i dolną powierzchnią może być zmienna. Jeśli jest stała, to można ją nazwać grubością ciała i oznaczyć przez  $h$ . W tym przypadku powierzchnia, będąca miej-

---

Adres do korespondencji – Corresponding author: Katarzyna Jeleniewicz, Szkoła Główna Gospodarstwa Wiejskiego, Wydział Budownictwa i Inżynierii Środowiska, Katedra Inżynierii Budowlanej, ul. Nowoursynowska 159, 02-787 Warszawa, e-mail: katarzyna\_jeleniewicz@sggw.pl

© Copyright by Wydawnictwo SGGW, Warszawa 2016

scem geometrycznym środków włókien, może być przyjęta za płaszczyznę środkową. Jeżeli grubość  $h$  jest daleko mniejsza od pozostałych wymiarów charakterystycznych płyty, to takie ciało można nazwać płytą cienką. Zwykle przyjmuje się, że stosunek grubości do wymiaru charakterystycznego nie powinien być większy niż 1 : 10.

Próby opisanego trójwymiarowego stanu odkształcenia i naprężenia płyty funkcjami określonymi na powierzchni środkowej były podjęte przez A. Cauchyego i S. Poissona w latach 1828–1829. Propozycje przedstawione wtedy zawierały błędy i dopiero w 1850 roku G. Kirchhoff opublikował pracę, którą uznaje się za początek teorii nazywanej dziś teorią Kirchhoffa lub Naviera-Kirchhoffa [Kirchhoff 1850].

Podstawowymi założeniami tej teorii są następujące hipotezy:

- 1) hipotezy kinematyczne
  - włókna prostoliniowe płyty, normalne do płaszczyzny środkowej, przed odkształceniem pozostają proste i normalne do powierzchni środkowej płyty po odkształceniu,
  - włókna te nie doznają wydłużeń,
  - płaszczyzna środkowa płyty nie ulega rozciąganiu podczas małych ugięć,
- 2) hipoteza statyczna
  - w płycie występuje płaski stan naprężenia.

Przyjęte hipotezy okazały się wewnętrznym sprzeczne, co doprowadziło do sytuacji, w której zbudowane na ich podstawie równania i relacje modelowe nie mogą być równocześnie spełnione przez poszukiwane przemieszczenia i naprężenia płyty.

W 2001 roku, w ramach serii „Mechanika techniczna”, ukazała się w Wydawnictwie Naukowym PWN praca zbiorowa pod redakcją Cz. Woźniaka „Mechanika sprężystych płyt i powłok” [Woźniak (red.) 2001], przedstawiająca bardzo obszerny przegląd metod modelowania oraz rozwiązywania zagadnień brzegowych płyt i powłok. W monografii znajduje się także obszerna literatura na ten temat.

## MODEL TRÓJWYMIAROWY PŁYTY

Modelem albo teorią mechaniki nazywa się pewien układ relacji określonych w klasie zbiorów będących kombinacjami iloczynów kartezyjskich przestrzeni liczb rzeczywistych  $R$ , które można zinterpretować w tych obszarach świata rzeczywistego, w których bada się ruch, spoczynek lub odkształcanie obiektów materialnych. Sam świat rzeczywisty utożsamiany jest z przestrzenią euklidesową  $R^3$  z kartezyjskim układem współrzędnych  $Ox_1x_2x_3$ , zwaną przestrzenią fizyczną.

Rzeczywista płyta (rys. 1) będzie więc w modelu matematycznym obiektem abstrakcyjnym, danym przez opis oparty na liczbach. Miejsce zajmowane przez płytę w przestrzeni fizycznej będzie obszarem w  $R^3$ , który oznaczono przez  $\Omega$ . Będzie to konfiguracja odniesienia. Powierzchnię środkową płyty oznaczono przez  $\Pi$ , a grubość (długość włókna materialnego) przez  $h$ . Konfiguracja odniesienia będzie więc iloczynem kartezyjskim powierzchni  $\Pi$  przez odcinek długości  $h$ :  $\Omega = \Pi \times (-h/2, h/2)$ . Punkty płyty oznaczono przez  $x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega$ . Brzeg płyty, czyli brzeg obszaru  $\Omega$ , oznaczono przez  $\partial\Omega$ .

W podobny sposób wprowadza się pojęcia sił działających na płytę, odkształceń i naprężeń płyty.



Rys. 1. Płytko-słupowa konstrukcja budynku mieszkalnego wielorodzinnego  
Fig. 1. Slab-column structure of a multi-family building

Niech na rozpatrywaną płytę na części  $\partial_1\Omega$  brzegu działają siły powierzchniowe:  $\mathbf{p} = [p_k(\mathbf{x}, t)]$ ,  $k = 1, 2, 3$ ,  $\mathbf{x} \in \partial_1\Omega$ ,  $t \in \langle t_0, t_1 \rangle$ , oraz siły masowe:  $\mathbf{b} = [b_k(\mathbf{x}, t)]$ ,  $k = 1, 2, 3$ , w całym  $\Omega$ . W wyniku tych oddziaływań płyta odkształca się, a punkty materialne przemieszczają. Oznaczono wektor przemieszczenia przez  $\mathbf{u} = [u_k(\mathbf{x}, t)]$ ,  $k = 1, 2, 3$ ,  $\mathbf{x} \in \Omega$ ,  $t \in \langle t_0, t_1 \rangle$ .

Związki geometryczne określające odkształcenia ciała przyjęto w postaci liniowej:

$$\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2}(u_{k,l} + u_{l,k}), \quad k, l = 1, 2, 3 \quad (1)$$

gdzie użyto oznaczenia na pochodne  $u_{k,l} = \frac{\partial u_k}{\partial x_l}$ .

Związki konstytutywne (fizyczne), łączące odkształcenia z naprężeniami, przyjęto w postaci:

$$\sigma_{kl} = B_{klmn}\varepsilon_{mn} \quad (2)$$

gdzie  $B_{klmn} = B_{klmn}(\mathbf{x})$  są funkcjami materiałowymi spełniającymi znane warunki.

Płytę opisaną relacjami (2) nazywa się sprężystą płytą anizotropową i niejednorodną.

W przypadku izotropowym funkcje materiałowe  $B_{klmn}$  przyjmują postać zależną od dwu funkcji materiałowych  $\lambda(x)$ ,  $\mu(x)$ , tzw. funkcji Lamégo (mogą to być także inne dwie stałe: moduł Younga i liczba Poissona, które łatwo przelicza się z odpowiednich wzorów):

$$B_{klmn}(\mathbf{x}) = \lambda(\mathbf{x})\delta_{kl}\delta_{mn} + \mu(\mathbf{x})(\delta_{km}\delta_{ln} + \delta_{kn}\delta_{lm}) \quad (3)$$

gdzie  $\delta_{kl}$  jest deltą Kroneckera.

W przypadku izotropii związki fizyczne (2) przekształcają się do postaci:

$$\sigma_{kl}(x, t) = 2\mu(x)\varepsilon_{kl}(x, t) + \lambda(x)\delta_{kl}e(x, t) \quad (4)$$

gdzie:  $e = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$ .

Dla płyt jednorodnych w związkach (4), zamiast funkcji  $\lambda(x)$ ,  $\mu(x)$ , należy przyjąć dwie stałe Lamégo:  $\lambda(x) \equiv \lambda$  i  $\mu(x) \equiv \mu$ .

Wprowadzone obciążenia zewnętrzne, przemieszczenia, odkształcenia i naprężenia wiąże się ze sobą równaniami równowagi lub ruchu. Powiązanie to może być w postaci całkowitej, jest to wtedy sformułowanie globalne teorii płyt. Z tego sformułowania globalnego wyprowadza się związki lokalne w postaci:

$$(B_{klmn}u_{m;n})_{,l} + b_k = \rho\ddot{u}_k \quad (5)$$

a dla płyt jednorodnych i izotropowych w postaci:

$$\mu u_{k;ll} + (\mu + \lambda)u_{l;lk} + b_k = \rho\ddot{u}_k \quad (6)$$

gdzie  $\rho$  jest gęstością masy oraz  $\ddot{u}_k = \frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2}$ .

W przypadku równań (5) lub (6) sformułowano warunki brzegowe:

$$- \text{dla } x \in \partial_1\Omega \quad \sigma_{kl}n_l = p_k \quad (7)$$

gdzie  $n_l$  są składowymi wektora zewnętrznemu normalnego do  $\partial_1\Omega$ ,

$$- \text{dla } x \in \partial_2\Omega \quad u_k = f_k \quad (8)$$

oraz warunki początkowe:

$$\begin{aligned} - \text{dla } t = t_0 \quad u_k(\mathbf{x}, t_0) &= U_k(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega \\ \dot{u}_k(\mathbf{x}, t_0) &= G_k(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega \end{aligned} \quad (9)$$

Dla tak opisanej płyty sprężystej można sformułować następujący problem:

Dla danych sił masowych  $\mathbf{b}$ , obciążeń zewnętrznych  $\mathbf{p}$ , położenia  $U_k$  i prędkości początkowej  $G_k$  płyty znaleźć przemieszczenia  $\mathbf{u}$  spełniające równania (5) lub (6) oraz warunki brzegowe (7) i (8) i początkowe (9).

Powyższe relacje, opisujące płyty jako trójwymiarowe ciała sprężyste, są wygodną podstawą do zbudowania modelu dwuwymiarowego płyt oraz do weryfikacji rozwiązań uzyskanych w takim modelu.

## KLASYCZNA TEORIA PŁYT

Klasyczna teoria płyt Kirchhoffa oparta jest na podanych we Wstępie założeniach. Założenia te można zapisać w postaci ograniczeń (wiązków) w klasie przemieszczeń w postaci:

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_2, x_3, t) &= -x_3 w_{,1}(x_1, x_2, t) \\ u_2(x_1, x_2, x_3, t) &= -x_3 w_{,2}(x_1, x_2, t) \\ u_3(x_1, x_2, x_3, t) &= w(x_1, x_2, t) \end{aligned} \quad (10)$$

gdzie funkcja  $w(x_1, x_2, t)$  jest ugięciem płyty.

Zakłada się ponadto, że funkcje opisujące własności sprężyste płyty powinny być inne niż stałe sprężystości  $B_{klmn}$ . Te nowe funkcje  $\bar{B}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ ,  $\alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, 2$ , zależne już od dwu zmiennych (określone na płaszczyźnie środkowej), nazywane modułami sztywności, są równe:

$$\bar{B}_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{h}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left( B_{\alpha\beta\gamma\delta} - \frac{B_{\alpha\beta 33} B_{\gamma\delta 33}}{B_{3333}} \right) x_3^2 dx_3, \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, 2 \quad (11)$$

gdzie:  $B_{\alpha\beta\gamma\delta}$ ,  $B_{\alpha\beta 33}$ ,  $B_{3333}$  są funkcjami materiałowymi występującymi w równaniu (2).

Zestawione wyżej założenia są zależne między sobą, na przykład przyjęcie więzów dla przemieszczeń determinuje już więzy dla naprężeń. Założenia te można nawet tak dobrać, że będą sprzeczne, na przykład więzy dla przemieszczeń i naprężeń mogą być takie, że zbiór naprężeń zgodnych z więzami i naprężeń dopuszczalnych przez więzy będzie pusty [Nagórko 1989].

Relacją łączącą wprowadzone pojęcia jest następujący związek globalny:

$$\left( \forall r \in \bar{V} \right) \left[ \int_{\Pi} \left( \bar{B}_{\alpha\beta\gamma\delta} w_{, \alpha\beta} r_{, \gamma\delta} \right) r da = \int_{\Pi_+ \cup \Pi_-} (p_+ + p_-) r da \right] \quad (12)$$

gdzie:  $\bar{V}$  jest przestrzenią dopuszczalnych ugięć  $r: \Pi \rightarrow R$ , zgodnych z więzami (10),  $p_+$ ,  $p_-$  są obciążeniami powierzchni górnej i dolnej płyty.

Po zastosowaniu do związku (12) formalizmu wariacyjnego otrzymano równanie na ugięcie płyty cienkiej:

$$\left( \bar{B}_{\alpha\beta\gamma\delta} w_{, \alpha\beta} \right)_{, \gamma\delta} + \rho h \ddot{w} = p \quad (13)$$

gdzie:  $p = p_+ + p_-$ .

Rozwiązanie równania (13), spełniające odpowiednie warunki brzegowo-początkowe, jest rozwiązaniem ścisłym w ramach modelu klasycznego płyt. To ścisłe rozwiązanie (ugięcie płyty) będzie rozwiązaniem przybliżonym w modelu trójwymiarowym opisanym wcześniej, o ile zostanie zinterpretowane jako trójwymiarowe przemieszczenie płyty, z wykorzystaniem więzów (10).

Równanie (13) znacznie się upraszcza, gdy płyta jest jednorodna i izotropowa, i ma znaną postać:

$$Dw_{,1111} + 2Dw_{,1122} + Dw_{,2222} + \rho h \ddot{w} = p \quad (14)$$

gdzie:  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$  jest sztywnością płyty,  $\nu$  – współczynnikiem Poissona,  $E$  – modu-  
 lem Younga, a  $h$  – grubością płyty.

W przypadku gdy płyta jest niejednorodna periodycznie model opisany równaniem (13) można uprościć do postaci, w której współczynniki równania nie będą funkcjami  $\bar{B}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ , lecz stałymi. Metody prowadzące do takiego modelu to metody uśredniania lub homogenizacji.

W pracy zastosowano jedną z takich metod, tzn. metodę uśredniania tolerancyjnego wprowadzoną do mechaniki przez Cz. Woźniaka [Woźniak 1983].

## MODEL PŁYT NIEJEDNORODNYCH PERIODYCZNIE

Założono, że płyta jest niejednorodna periodycznie oraz że elementem powtarzającym się – komórką periodyczności – jest odcinek długości  $l_1$ ,  $\Delta \equiv (0, l_1)$  – periodyczność w jednym kierunku, lub prostokąt o wymiarach  $l_1, l_2$ ,  $\Delta = (0, l_1) \times (0, l_2)$  – periodyczność w dwu kierunkach. W takich przypadkach powierzchnia środkowa płyty  $\Pi$  będzie podzielona – w pierwszym przypadku na warstwy  $\Delta \times (0, L_2)$ , a w drugim na prostokąty.

O każdej warstwie i każdym prostokącie założono, że są identyczne materiałowo, tzn. gdyby dokonać translacji warstwy na warstwę lub prostokąta na prostokąt, to otrzymano by identyczny ośrodek niejednorodny (opisany tymi samymi funkcjami materiałowymi).

Kolejnym założeniem jest to, że warstwy i prostokąty w płycie są konglomeratem różnych składników jednorodnych. Układ tych składników opisano następująco: w przypadku warstw odcinek  $\Delta = (0, l_1)$  podzielony jest na części  $\Delta^a \equiv \Delta(x_1^a) = (x_1^a - \frac{l_1}{2}, x_1^a + \frac{l_1}{2})$ , gdzie  $x_1^a = a \frac{l_1}{2}$ ,  $a = 1, 2, \dots, a_0$ . Warstwa  $\Delta \times (0, L_2)$  składa się więc z lamin  $\Delta^a \times (0, L_2)$ ,  $a = 1, 2, \dots, a_0$ , których jest w warstwie  $a_0$ .

Analogicznie prostokąt podzielony jest na części  $\Delta^{ab} \equiv \Delta(x_1^a, x_2^b)$ , gdzie  $x_1^a$  określone jest jak poprzednio, a  $x_2^b = b \frac{l_2}{2}$ ,  $b = 1, 2, \dots, b_0$ . Łatwo zauważyć, że punkty  $x_1^a$  są punktami środkowymi części  $\Delta^a$ , a  $(x_1^a, x_2^b)$  – punktami środkowymi części  $\Delta^{ab}$  (czyli punktami przecięcia prostych dzielących krawędzie prostokąta na połowę).

O częściach  $\Delta^a$  komórki periodyczności założono, że są jednorodne, co oznacza, że:

$$\bar{B}_{\alpha\beta\gamma\delta}^a = \bar{B}_{\alpha\beta\gamma\delta} \Big|_{\Delta^a} = \text{const}; \quad \rho^a \Big|_{\Delta^a} = \text{const} \quad (15)$$

i analogicznie dla  $\Delta^{ab}$ :

$$\bar{B}_{\alpha\beta\gamma\delta}^{ab} = \bar{B}_{\alpha\beta\gamma\delta} \Big|_{\Delta^{ab}} = \text{const}; \quad \rho^{ab} \Big|_{\Delta^{ab}} = \text{const} \quad (16)$$

Równanie ruchu płyt (13) jest także równaniem ruchu dla opisanych tutaj płyt niejednorodnych periodycznie. Jednakże zgodnie z zależnościami (15) i (16) występujące

w nim współczynniki są nieciągłe i szybko zmieniające wartości na małych przedziałach określoności, gdy komórek periodyczności jest dużo.

Skonstruowano model, w którym współczynniki (15) i (16) będą uśrednione. Uśrednienie to będzie zachowywać wpływ struktury niejednorodności na rozwiązanie oraz rozwiązania będą zależęć od wymiaru komórki podstawowej.

Istotnym elementem modelowania tolerancyjnego jest rozkład poszukiwanych wielkości (tutaj ugięcia płyty) na dwa składniki:

$$w(x_1, x_2, t) = u(x_1, x_2, t) + h^A(x_1, x_2)v^A(x_1, x_2, t) \quad (17)$$

gdzie:  $(x_1, x_2) \in \Pi$ ,  $t \in \langle t_0, t_1 \rangle$ ,  $A = 1, 2, 3, \dots, N$ .

W rozkładzie tym funkcje  $u$  i  $v^A$  są funkcjami poszukiwanymi (jest ich teraz  $1 + N$ ) i interpretuje się je odpowiednio jako ugięcie uśrednione oraz fluktuacje opisujące wpływ niejednorodności płyty na ugięcie. Funkcje  $h^A$  są znanymi, periodycznymi i oscylującymi funkcjami kształtu. O funkcjach tych założono, że są znane, bezwymiarowe i przyjmują wartość rzędu wymiaru komórki.

O funkcjach  $u$  i  $v^A$  założono ponadto, że są wolnozmiennie, tzn. odpowiednio regularne, i ich zmienność jest taka, że w obrębie komórki periodyczności funkcje i ich pochodne do odpowiedniego rzędu można uznać za stałe, z pewną tolerancją.

Tolerancyjne uśrednianie funkcji określonych dla  $\Pi$  zdefiniowano następująco:

$$\langle f \rangle(x_1, x_2) = \frac{1}{l_1 l_2} \int_{x_1 - \frac{l_1}{2}}^{x_1 + \frac{l_1}{2}} \int_{x_2 - \frac{l_2}{2}}^{x_2 + \frac{l_2}{2}} f(y_1, y_2) dy_1 dy_2 \quad (18)$$

Dla rozpatrywanych płyt przyjęto funkcjonał w postaci:

$$P = \frac{\tau^2}{2} \rho (\dot{w})^2 - \frac{1}{2} B_{\alpha\beta\gamma\delta} w_{,\alpha\beta} w_{,\gamma\delta} - Pw \quad (19)$$

gdzie  $\tau$  jest parametrem.

Podstawiając do funkcjonału (19) dekompozycję dla ugięcia płyt (17) oraz uśredniając go zgodnie z równaniem (18), otrzymano równania modelowe jako równania Eulera-Lagrange'a tego uśrednionego funkcjonału:

$$\begin{aligned} \langle \rho \rangle \ddot{u} + \langle B_{\alpha\beta\gamma\delta} \rangle u_{,\alpha\beta\gamma\delta} + E_{\alpha\beta}^A v_{,\alpha\beta}^A &= p \\ E_{\alpha\beta}^A u_{,\alpha\beta} + E^{AB} v^B &= 0 \end{aligned} \quad (20)$$

gdzie  $\langle \rho \rangle$  i  $\langle B_{\alpha\beta\gamma\delta} \rangle$  są uśrednioną gęstością masy i uśrednionymi funkcjami materiałowymi:

$$\begin{aligned} \langle \rho \rangle &= \eta^{ab} \rho^{ab} \\ \langle B_{\alpha\beta\gamma\delta} \rangle &= \eta^{ab} B_{\alpha\beta\gamma\delta}^{ab} \end{aligned} \quad (21)$$

oraz  $\eta^{ab} = \eta_{1a}\eta_{2b}$ ;  $\eta_{1a} = \frac{l_{1a}}{l_1}$ ;  $\eta_{2b} = \frac{l_{2b}}{l_2}$ .

Pozostałe współczynniki są równe:

$$\begin{aligned} E_{\alpha\beta}^A &\equiv \langle B_{\alpha\beta\gamma\delta} h_{,\gamma\delta}^A \rangle = \eta_{\gamma\delta}^{abA} B_{\alpha\beta\gamma\delta}^{ab} \\ E^{AB} &\equiv \langle B_{\alpha\beta\gamma\delta} h_{,\alpha\beta}^A h_{,\gamma\delta}^B \rangle = \eta_{\alpha\beta\gamma\delta}^{abAB} B_{\alpha\beta\gamma\delta}^{ab} \end{aligned} \quad (22)$$

gdzie:  $\eta^{abAB} = \frac{1}{l_1 l_2} \iint_{\Delta^{ab}} h^A h^B d\Delta$ ;  $\eta_{\alpha\beta\gamma\delta}^{abAB} = -\frac{1}{l_1 l_2} \iint_{\Delta^{ab}} h_{,\alpha\beta}^A h_{,\gamma\delta}^B d\Delta$ .

W przypadku gdy macierz  $E^{AB}$  będzie macierzą nieosobliwą, wtedy z równania (20)<sub>2</sub> można wyznaczyć fluktuacje  $v^A$ :

$$v^A = -(E^{AB})^{-1} E_{\alpha\beta}^B u_{,\alpha\beta} \quad (23)$$

gdzie:  $(E^{AB})^{-1}$  jest macierzą odwrotną do  $E^{AB}$ ,  $A, B = 1, 2, \dots, N$ ,  $\alpha, \beta = 1, 2$ .

Podstawiając fluktuacje (23) do równania (20)<sub>1</sub> otrzymano:

$$\langle \rho \rangle \ddot{u} + E_{\alpha\beta\gamma\delta}^0 u_{,\alpha\beta\gamma\delta} = p \quad (24)$$

gdzie:

$$E_{\alpha\beta\gamma\delta}^0 = \langle B_{\alpha\beta\gamma\delta} \rangle - E_{\alpha\beta}^A (E^{AB})^{-1} E_{\gamma\delta}^B \quad (25)$$

Wielkości zdefiniowane równaniem (25) są efektywnymi modułami sztywności otrzymanymi w wyniku uśredniania tolerancyjnego.

Równanie (24) ma postać analogiczną do znanego równania na ugięcie płyty, z tym że występują w nim nie moduły sztywności  $\bar{B}_{\alpha\beta\gamma\delta}$  (które są funkcjami), lecz efektywne moduły sztywności, które są stałe. Moduły te nie są postulowane, lecz wyliczone, o ile znane są funkcje kształtu.

Równanie (22) opisuje dynamikę płyt niejednorodnych periodycznie.

Zagadnienia dynamiczne płyt niejednorodnych były analizowane w wielu pracach. Tę samą technikę homogenizacyjną zastosowano na przykład w pracach: Michalak [2000, 2004] oraz Jędrzyak [2001, 2006].

## PRZYKŁAD DRGAŃ PŁYTY PERIODYCZNIE NIEJEDNORODNEJ W DWÓCH KIERUNKACH

Jako przykład rozpatrzono płytę periodyczną w dwóch kierunkach, przegubowo podpartą na wszystkich krawędziach. Zbadano drgania własne takiej płyty.



Warunki brzegowe przyjęto w postaci:

$$u = 0 \text{ oraz } \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = 0 \text{ przy } x_1 = 0 \text{ i } x_1 = L_1$$

$$u = 0 \text{ oraz } \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0 \text{ przy } x_2 = 0 \text{ i } x_2 = L_2$$

natomiast warunki początkowe będą analogiczne jak w pracy Kaliskiego [1966]:

$$u(x_1, x_2, 0) = u_0(x_1, x_2) = c_0 \left(1 - \cos \frac{2\pi}{L_1} x_1\right) \left(1 - \cos \frac{2\pi}{L_2} x_2\right)$$

$$\dot{u}(x_1, x_2, t)|_{t=0} = v_0(x_1, x_2) = 0$$

gdzie: przez  $c_0$  oznaczono początkową, dostatecznie małą wartość ugięcia w środku płyty, natomiast przez  $v_0$  – prędkość przemieszczania się powierzchni środkowej płyty w chwili  $t = 0$ .

Do rozwiązania równania ruchu (24) analizowanej płyty zastosowano metodę Naviera. Po wyznaczeniu uśrednionego ugięcia ze wzoru (23) wyznaczono fluktuacje i podstawiono je do wzoru (17), otrzymując:

$$w(x_1, x_2, t) = w_0(x_1, x_2, t) + w_1(x_1, x_2, t)$$

gdzie:  $w_0$  jest rozwiązaniem podanym przez Kaliskiego [1966] dla płyt jednorodnych, natomiast  $w_1$  jest rozwiązaniem otrzymanym przez Jeleniewicz [2014], które opisuje wpływ niejednorodności periodycznej.

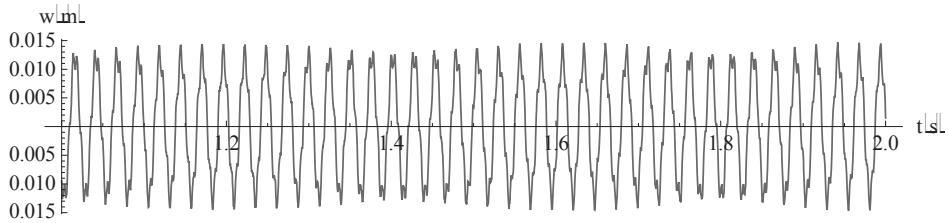
Funkcję  $h_1(x_1)$  kształtu przyjęto w tym przykładzie w postaci:

$$h^1(x_1) = \begin{cases} c_2 x_1 (2x_1 - l_1), & x_1 \in \left(0, \frac{l_1}{2}\right) \\ -c_2 (2x_1 - l_1)(x_1 - l_1), & x_1 \in \left(\frac{l_1}{2}, l_1\right) \end{cases}$$

Funkcję  $h_2 = h_2(x_2)$  zdefiniowano analogicznie do  $h_1 = h_1(x_1)$ , zastępując  $x_1$  przez  $x_2$ ,  $l_1$  przez  $l_2$  raz  $c_2$  przez  $\bar{c}_2$ . Stałe  $c_2$  i  $\bar{c}_2$  są rzędu  $l^2$ . Funkcje  $h^A$ ,  $A = 1, 2$ , są bezwymiarowe, periodyczne i oscylujące.

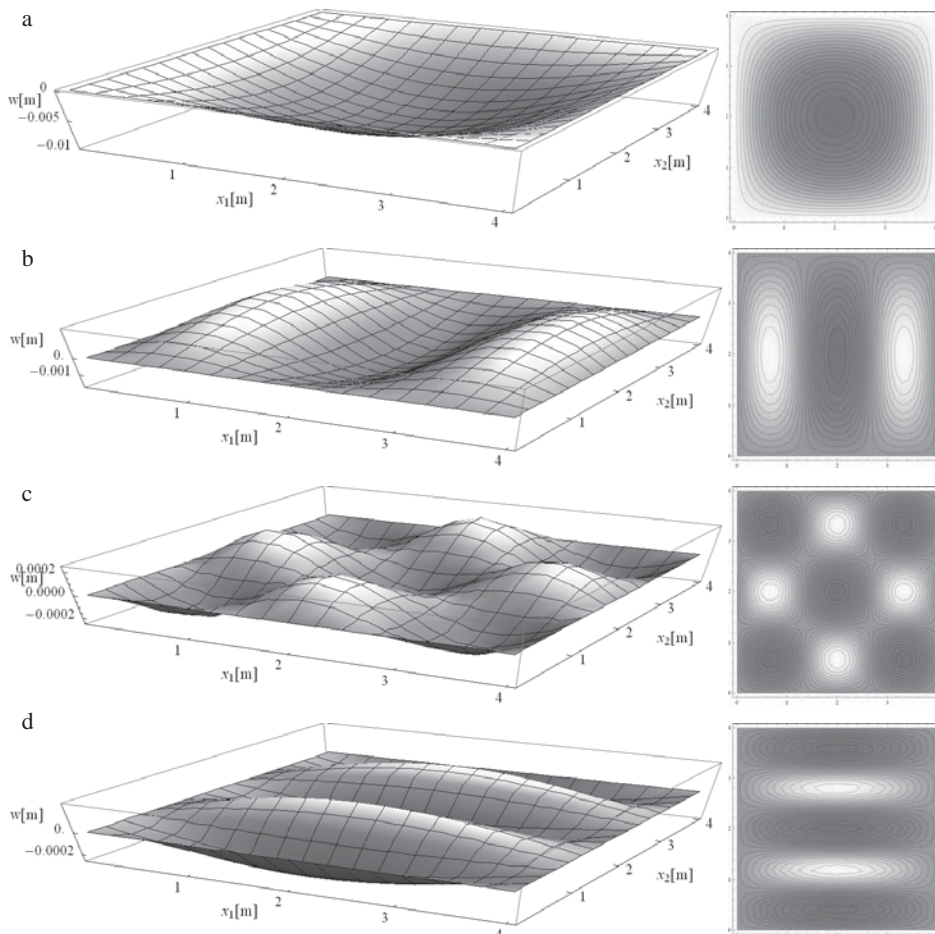
W celu graficznego przedstawienia otrzymanych rozwiązań analitycznych przyjęto następujące parametry płyty: wymiary boków  $L_1 = L_2 = 4$  m, grubość  $h = 0,15$  m oraz wymiary komórki periodyczności  $l_1 = l_2 = 0,3$  m, stałe materiałowe:  $E_1 = 27 \cdot 10^9$  Pa,  $\nu_1 = 0,2$ ,  $\rho_1 = 2200 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ,  $E_2 = 190 \cdot 10^9$  Pa,  $\nu_2 = 0,29$ ,  $\rho_2 = 7900 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ .

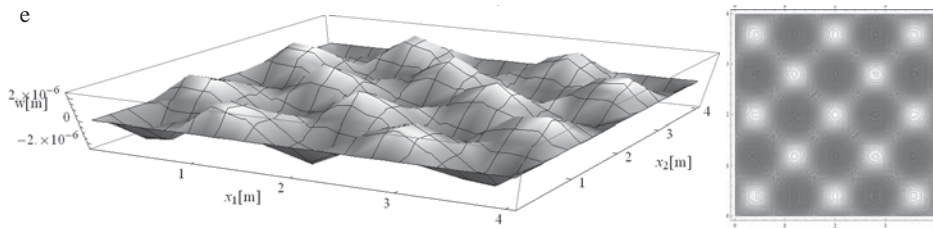
Rysunek 2 przedstawia drgania punktu środkowego płyty o współrzędnych  $(x_1, x_2) = (2, 2)$  w przedziale czasu od 1 do 2 sekund.



Rys. 2. Drgania punktu środkowego płyty  
Fig. 2. Vibration of central point of a plate

Rysunek 3 pokazuje ugięcia płyty dla częstości kołowych:  $\omega_{11}$  (rys. 3a),  $\omega_{31}$  (rys. 3b),  $\omega_{33}$  (rys. 3c),  $\omega_{15}$  (rys. 3d),  $\omega_{55}$  (rys. 3e).



Rys. 3. Ugięcie płyty dla różnych częstości kołowych w chwili  $t = 1$ Fig. 3. The plate deflection for different angular frequencies at time  $t = 1$ 

W powyższych rysunkach zmienne nasycenie kolorem związane jest z wielkością ugięcia (im jaśniejszy kolor, tym wyżej położony punkt).

## PODSUMOWANIE

Praca poświęcona jest sprężystym płytom niejednorodnym, które opisano najpierw jako ciała trójwymiarowe, a następnie w uproszczonej postaci płaskiego kontinuum materialnego. W przypadku periodycznej niejednorodności przedstawiono nowy model dwuwymiarowy, w którym płyty opisywane są nie tylko ugięciem, ale także pewnymi nowymi niewiadomymi – fluktuacjami, które pozwalają, mimo uśrednienia własności fizycznych, zachować wpływ niejednorodności na ugięcie.

Wykazano, że w modelu zhomogenizowanym układ równań na ugięcie i fluktuacje można zredukować do jednego równania, analogicznego do klasycznego równania na ugięcie, w którym występują nowe stałe materiałowe. Stałe te można w modelu wyznaczyć z odpowiednich procedur. Przedstawiony model pozwala badać nie tylko drgania własne, ale także drgania wymuszone i fale.

## PIŚMIENNICTWO

- Jeleniewicz, K. (2014). Drgania konstrukcji sprężystych wzmocnionych prętami. Praca doktorska. SGGW, Warszawa.
- Jędrzyak, J. (2001). Dispersion models of thin periodic plates. Theory and applications. Sci. Bul. Łódź Tech. Univ., 872, Series: Sci. Trans, 289, Łódź.
- Jędrzyak, J. (2006). Vibrations of thin periodic plates under moving loads. In: Selected Topics in the Mechanics of Inhomogeneous Media. Ed. Cz. Woźniak, R. Świtka, M. Kuczma, Zielona Góra, 113–131.
- Kaliski, S. (1966). Drgania i fale w ciałach stałych. PWN, Warszawa.
- Kirchhoff, G. (1850). Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe. J. Reine u. Angew. Math. (Crelle Journal), 40, 1, 55–88.
- Michalak, B. (2000). Vibration of plates with initial geometrical periodical imperfections interacted with a periodic elastic foundation. Arch. Appl. Mech., 70, 508–518.
- Michalak, B. (2004). Stability of composite plates with non-uniform distribution of constituents. J. Theor. Appl. Mech., 42, 281–297.
- Nagórko, W. (1989). Modele powierzchniowe i mikrolokalne płyt sprężystych. UW, Warszawa.

- Woźniak, Cz., (1983). Tolerance and fuzziness in problems of mechanics. *Archive of Applied Mechanics*, 35, 567–578.
- Woźniak, Cz., red. (2001). *Mechanika techniczna. Mechanika sprężystych płyt i powłok*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
- Woźniak, Cz., red. (2010). *Mathematical modelling and analysis in continuum mechanics of micro-structured media*. Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice.

## MODELLING OF PERIODICALLY HETEROGENEOUS ELASTIC PLATES

**Abstract.** The building structures considered in the paper are plates. Plates are three-dimensional material objects, which are described by two-dimensional models. Plates have some specific qualities. Two-dimensional models, where displacements, deformations and stresses are described by two-variable functions. These functions are determined in a plate's mid-surface. In case of periodically heterogeneous plates the two-dimensional description is much more difficult due to the fact of a non-linear and oscillating coefficients present in the model equations. The aim of the paper is to provide a brief description of a homogenous modeling method, i.e. the method of averaging those coefficients to make them dependent the diameter of a basic cell only. By the use of that method static and dynamic equations result in constant coefficients. As an example, using this described model, we submitted the precise result for a simply supported plate which is periodically heterogeneous in two dimensions.

**Key words:** elastic plate, periodic media, non-asymptotic homogenization, vibrations of reinforced plate

Zaakceptowano do druku – Accepted for print: 21.03.2016

Cytowanie: Jeleniewicz, K., Nagórko, W. (2016). O modelowaniu sprężystych płyt niejednorodnych periodycznie. *Acta Sci. Pol. Architectura*, 15 (1), 3–14.