

RADOSŁAW JAGIEŁŁO, CEZARY BEKER, ANDRZEJ M. JAGODZIŃSKI

## Ocena zgodności rozkładów empirycznych pierśnic drzewostanów bukowych różnych klas wieku z wybranymi rozkładami teoretycznymi\*

Goodness of fit evaluation of the breast height diameter distributions of beech stands differing in age with selected theoretical distributions

### ABSTRACT

Jagiello R., Beker C., Jagodziński A. M. 2016. Ocena zgodności rozkładów empirycznych pierśnic drzewostanów bukowych różnych klas wieku z wybranymi rozkładami teoretycznymi. Sylwan 160 (2): 107-119.

Modelling is one of the basic activities in the field of biological sciences. The main purpose of modelling is to illustrate relationships and phenomena of biological objects (and traits describing them) and present reality as close as it is possible with expected range of error. In the paper we presented results of approximation of the selected theoretical distributions, i.e. singular (normal, log-normal, gamma, two- and three-parameter Weibull, Johnsons SB) and finite mixture (normal, log-normal, gamma and Weibull) to tree diameter distributions in beech stands (*Fagus sylvatica* L.). The main aim of the study was to evaluate goodness of fit of selected distributions, prove legitimacy of using mixture distributions in even-aged, single-species beech stands and find the best distribution of model diameter distribution in a whole production cycle of this kind of stands. The study was conducted in 32 sample plots located in north-western Poland in stands at the age between 9 and 140. For the evaluation  $\chi^2$  test, a modified error index ( $\epsilon$ ) and a root mean square error (RMSE) were used. We found that the RMSE and  $\epsilon$  are related in most cases with stand density. Mean values of used indicators show that finite mixture distributions are better in comparison to singular distributions. The best fitted distributions were Johnsons SB and mixture of gamma ones. Range of error index expressed with number of trees per hectare ranges 16.5-32.8% and 7.7-27.0% for this distributions, respectively. Conversely the worst results were obtained by fitting two-parameter Weibull distribution both in singular and mixture. Future diameter distribution model based on the probability distribution should be based on Johnson SB or 3-parameter Weibull distribution from singular ones or gamma from finite mixture. In case of age class apportionment unequivocal the best result were obtained with Johnson SB and partially with mixture gamma distributions.

### KEY WORDS

diameter distribution, finite mixture distribution, beech stand, *Fagus sylvatica*

### ADDRESSES

Radosław Jagiełło <sup>(1)</sup> – e-mail: rjagiello@man.poznan.pl

Cezary Beker <sup>(2)</sup> – e-mail: bekerce@up.poznan.pl

Andrzej M. Jagodziński <sup>(1, 3)</sup> – e-mail: amj@man.poznan.pl

\*Praca była częściowo finansowana w ramach projektu „Bilans węgla w biomase drzew głównych gatunków lasotwórczych Polski” zleconego przez Dyрекcję Generalną Lasów Państwowych w Warszawie (2007-2011).

<sup>(1)</sup> Instytut Dendrologii Polskiej Akademii Nauk; ul. Parkowa 5, 62-035 Kórnik

<sup>(2)</sup> Katedra Urządzania Lasu, Uniwersytet Przyrodniczy w Poznaniu; ul. Wojska Polskiego 71C, 60-625 Poznań

<sup>(3)</sup> Katedra Łowiectwa i Ochrony Lasu, Uniwersytet Przyrodniczy w Poznaniu; ul. Wojska Polskiego 71D, 60-625 Poznań

## Wstęp

Zadaniem modeli biomatematycznych jest obrazowanie zależności i zjawisk zachodzących w przyrodzie w sposób jak najbardziej zbliżony do rzeczywistości. Dobór sposobów i narzędzi do matematycznego opisu przebiegu zjawisk przyrodniczych jest zadaniem trudnym [Barnes, Chu 2010; Jopp i in. 2011].

Model wzrostu drzewostanu wykorzystujący rozkład frekwencji drzew w poszczególnych stopniach grubości może być pomocny przy prognozowaniu rozwoju drzewostanu i planowaniu działań gospodarczych. Ponadto może posłużyć do tworzenia symulacji różnych scenariuszy prowadzenia gospodarki leśnej czy też oceny efektów planowanych zabiegów gospodarczych. W zależności od poziomu złożoności modelu można na jego podstawie uzyskać wiele dodatkowych informacji o drzewostanie przy stosunkowo niewielkich nakładach, polegających m.in. na ustaleniu wieku, bonitacji i zagęszczenia drzewostanu [Bailey 1980]. Może być on też pomocny przy uzyskiwaniu informacji o potencjalnych kosztach będących skutkiem planowanych zabiegów gospodarczych, o grubości sortymentów, jakie można otrzymać w procesie pozyskania drewna, lub też o spodziewanym przyroście drzewostanu w jednostce czasu.

Jednym ze sposobów mających szerokie zastosowanie w modelowaniu rozkładów pierśnic jest użycie funkcji rozkładu teoretycznego. Wybór rozkładu, który będzie można w późniejszym etapie zastosować przy budowie modelu, powinien być oparty na następujących kryteriach: 1) łatwość estymacji parametrów, 2) szeroki zakres kształtów funkcji oraz 3) adaptacja do rzeczywistego rozkładu analizowanej cechy [Burkhardt, Tomé 2012]. Pierwsze dwa kryteria wynikają głównie z możliwych rozwiązań matematycznych, natomiast kryterium ostatnie musi być oparte na materiale empirycznym.

Początek naukowego zainteresowania leśników problematyką frekwencji drzew w klasach grubości datuje się na 1898 rok, kiedy to Francis de Liocourte stwierdził, że rozkłady grubości w siedmiu różnowiekowych drzewostanach jodłowych miały podobny kształt, zbliżony do krzywej wykładniczej [Kerr 2014]. W kolejnych latach podjęto próby dopasowania rzeczywistych rozkładów grubości drzew w drzewostanach do różnych rozkładów teoretycznych – wykładniczego, logarytmicznie normalnego [Bliss, Reinker 1964], beta, gamma [Nelson 1964], Weibulla [Bailey, Dell 1973; Shiver 1988; Kilkki i in. 1989] i SB Johnsona [Hafley, Schreuder 1977; Siekierski 1992]. Bardziej zaawansowanym rozwiązaniem jest zastosowanie rozkładów mieszanych [Zhang i in. 2001; Liu i in. 2002; Zhang, Liu 2006]. Ich zasadniczą zaletą jest wysoka elastyczność dla zmiennej, której rozkład jest nieregularny, z dwoma lub więcej maksimumami lokalnymi. Sytuacja taka zachodzi najczęściej w drzewostanach wielogatunkowych i wielogeneracyjnych.

W Polsce wcześniejsze badania aproksymacji rozkładów teoretycznych w kontekście struktury grubości w drzewostanach bukowych prowadzone były przez Rymer-Dudzińską i Dudzińską [1999, 2001]. Model rozkładu grubości dla jednowiekowych drzewostanów bukowych w Danii oparty na rozkładzie Weibulla przedstawili Nord-Larsen i Cao [2006]. Warto zauważyć, że w publikacjach obrazujących dopasowanie rozkładów w drzewostanach mieszanych o nieregularnej strukturze grubości z udziałem buka, włączono dodatkowo do analiz, oprócz rozkładów pojedynczych

[Podlaski 2006; Podlaski, Zasada 2008], również rozkłady mieszane [Podlaski 2010a, b; Jaworski, Podlaski 2012].

W niniejszej pracy zastosowano rozkłady mieszane w jednogatunkowych drzewostanach bukowych. Założono, że podział na klasy wieku umożliwi wychwycenie ewentualnych różnic i trudności związanych z adaptowaniem wybranego modelu względem kolejnych faz rozwojowych drzewostanów. Zastosowanie trzech różnych wskaźników do oceny aproksymacji powinno pozwolić także na trafniejsze wnioskowanie o zasadności wyboru najlepszego rozkładu teoretycznego.

Główne cele pracy to: (1) ocena zgodności wybranych rozkładów teoretycznych z rozkładami pierśnic w drzewostanach bukowych różnych klas wieku, (2) przeanalizowanie zasadności wykorzystania rozkładów mieszanych w jednowiekowych monokulturach bukowych oraz (3) wybranie odpowiedniego rozkładu teoretycznego do modelowania rozkładu grubości w ciągu całego cyklu produkcyjnego drzewostanów bukowych.

## Materiał i metody

Badania przeprowadzono na obszarze Nadleśnictwa Gryfino w Puszczy Bukowej pod Szczecinem – kompleksie monokultur bukowych obejmującym obszar blisko 8000 ha (53°20'N 14°36'E - 53°16'N 14°44'E). Pomiarów wykonano na 32 powierzchniach próbnych w lasach użytkowanych gospodarczo. Drzewostany wybrano w taki sposób, aby reprezentowały przekrój klas wieku obejmujący cykl produkcyjny tego gatunku – od I do VII. W każdej klasie do analiz wybrano co najmniej cztery drzewostany (tab. 1). Wzrastały one w warunkach siedliskowych lasu świeżego (Lśw).

Pierśnice wszystkich żywych drzew zmierzono w dwóch prostopadłych kierunkach z dokładnością do 1 mm. Jako grubość drzewa przyjęto średnią z dwóch pomiarów zaokrągloną do 1 mm. Do aproksymacji wybrano następujące rozkłady teoretyczne: normalny (N), logarytmicznie normalny (LN), Weibulla 2- (W2) i 3-parametrowy (W3), 2-parametrowy gamma (G) oraz SB Johnsona (SBJ). Wybrane rozkłady mają następującą postać funkcji gęstości prawdopodobieństwa:

– rozkład normalny:

$$f(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2} \right] \quad [1]$$

**Tabela 1.**

Minimum i maksimum wieku drzewostanu (W [lata]), wielkości powierzchni próbnej (A [ha]), liczby drzew (N) i liczby drzew na hektar (N/ha) oraz pierśnicy (D [cm]) na powierzchniach próbnych (n) w klasach wieku (I-VII)

Minimum and maximum of stand age (W [years]), study plot area (A [ha]), number of trees (N) and number of trees per hectare (N/ha) as well as breast height diameter (D [cm]) on study plots (n) in age classes (I-VII)

	n	W	A	N	N/ha	D
I	4	9-19	0,0036-0,04	182-207	4550-50278	2,8-9,5
II	5	25-35	0,03-0,375	178-293	781-6967	10,0-24,1
III	6	45-60	0,20-0,50	159-293	318-1430	31,6-46,4
IV	5	63-77	0,25-0,60	103-210	297-490	31,8-40,4
V	4	85-95	0,45-1,31	99-270	195-360	33,3-46,3
VI	4	101-112	0,50-0,56	76-189	99-336	34,7-43,7
VII	4	121-140	0,50-1,50	85-199	131-265	38,8-44,7

– rozkład logarytmicznie normalny:

$$f(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right] \quad [2]$$

– dwuparametrowy rozkład Weibulla:

$$f(x; \alpha, \beta) = \frac{\alpha}{\beta} \left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha-1} \exp\left[-\left(\frac{x}{\beta}\right)^\alpha\right] \quad [3]$$

– trójparametrowy rozkład Weibulla:

$$f(x; \alpha, \beta, \gamma) = \frac{\alpha}{\beta} \left(\frac{x-\gamma}{\beta}\right)^{\alpha-1} \exp\left[-\left(\frac{x-\gamma}{\beta}\right)^\alpha\right] \quad [4]$$

– rozkład gamma:

$$f(x; \alpha, \beta) = \frac{x^{\alpha-1}}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} \exp\left(-\frac{x}{\beta}\right) \quad [5]$$

gdzie dla poszczególnych funkcji:

$x$  – zmienna losowa (pierśnica),

$\alpha$  – parametr kształtu,

$\beta$  – parametr skali,

$\gamma$  – parametr położenia,

$\mu$  – średnia,

$\sigma$  – odchylenie standardowe,

$\Gamma(\cdot)$  – funkcja gamma;

– rozkład SB Johnsona:

$$f(x; \xi, \lambda, \gamma, \delta) = \frac{\delta}{\sqrt{2\pi}} \frac{\lambda}{(\xi + \lambda - x)(x - \xi)} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\gamma + \delta \ln\left(\frac{x - \xi}{\xi + \lambda - x}\right)\right)^2\right] \quad [6]$$

gdzie:

$x$  – zmienna losowa (pierśnica),

$\gamma, \delta$  – parametry kształtu,

$\lambda$  – parametr skali,

$\xi$  – parametr położenia.

W dalszej części pracy będą one nazywane rozkładami pojedynczymi. Estymację parametrów tych rozkładów wykonano w programie JMP 7.

Rozkład mieszany złożony z dwóch rozkładów składowych ma następującą postać:

$$f(x; \psi) = \pi_1 f_1(x; \theta_1) + \pi_2 f_2(x; \theta_2) \quad [7]$$

gdzie:

$x$  – zmienna losowa (pierśnica),

$\psi$  – zestaw wszystkich parametrów rozkładu mieszanego,

$\pi_i$  – waga rozkładu składowego  $f_i$  ( $\sum \pi_i = 1$ ),

$\theta_i$  – parametry rozkładu składowego  $i$ .

Estymację parametrów rozkładów mieszanych kolejno z dwóch rozkładów normalnych (mN), logarytmicznie normalnych (mLN) oraz dwuparametrowych gamma (mG) i dwuparametrowych Weibulla (mW) wykonano metodą największej wiarygodności z użyciem algorytmu EM połączonego z metodą Newtona [Macdonald, Du 2014]. W pierwszym etapie procedury estymacji parametrów wartości startowe ustalono dwoma sposobami [Podlaski, Roesch 2013]:

$$\text{Sposób 1.:} \quad \pi_i=0,5; \sigma_i=s; \mu_1=\min.k; \mu_2=\max.k \quad [8]$$

$$\text{Sposób 2.:} \quad \pi_i=0,5; \sigma_i=s; \mu_1=0,5d; \mu_2=1,5d \quad [9]$$

gdzie:

- $i$  – kolejny rozkład składowy dla  $i=1,2$ ,
- $\min.k$  – minimalna  $k$ -ta pierśnica,
- $\max.k$  – maksymalna  $k$ -ta pierśnica dla  $k=1, 5$  i  $10$ ,
- $s$  – odchylenie standardowe,
- $d$  – średnia pierśnica drzew na powierzchni próbnej.

Łącznie wykonano cztery estymacje parametrów rozkładów mieszanych dla każdej powierzchni próbnej – trzy sposobem 1. oraz jedną sposobem 2. W wypadku nieuzyskania przynajmniej dwóch takich samych rozwiązań przy użyciu powyższych sposobów parametry startowe ustalano następująco:

$$\pi_i=0,5; \sigma_i=s; \mu_1=u_{1...9}; \mu_2=u_{2...10} \quad [10]$$

gdzie:

- $u_{1...9}$  i  $u_{2...10}$  – kolejne pary liczb od  $u_1$  do  $u_{10}$ :  $u_1, u_2; u_1, u_3; \dots; u_1, u_{10}; u_2, u_3; \dots; u_2, u_{10}; \dots$ ;  
 $u_{\varphi}, u_{10}$  obliczone w następujący sposób:
- $u_1$  – najmniejsza pierśnica,
- $u_{10}$  – największa pierśnica,
- $u_2, u_3, \dots, u_9$  – kolejne percentyle 20%, 30%, ..., 90% pierśnic z powierzchni próbnej.

Estymację parametrów rozkładów mieszanych wykonano przy użyciu pakietu *mixdist* [Macdonald, Du 2014] w środowisku R (<http://www.R-project.org>).

Do oceny zgodności rozkładu teoretycznego z empirycznym obliczono statystykę  $\chi^2$ . Zgodność rozkładu empirycznego z teoretycznym testowano na poziomie istotności  $\alpha=0,05$ . Ocenę błędu aproksymacji wykonano przy pomocy pierwiastka błędu średniokwadratowego (RMSE). Zastosowanie do oceny pierwiastka błędu średniokwadratowego pozwala na ustalenie różnicy liczby drzew między stopniami grubości z uwzględnieniem liczby stopni grubości w analizowanym drzewostanie.

Indeks błędu [Reynolds i in. 1988] zmodyfikowano w taki sposób, aby umożliwił porównanie częstości wystąpienia  $i$ -tego drzewa w  $k$ -tej klasie grubości:

$$e = \sum_{i=1}^k |p_e - p_i| \quad [11]$$

gdzie:

- $p_e$  – obserwowana względna frekwencja  $i$ -tego stopnia,
- $p_i$  – oczekiwana względna frekwencja  $i$ -tego stopnia.

Zastosowany zmodyfikowany indeks błędu pozwala na wyłączenie wpływu zagęszczenia drzewostanu na ocenę dopasowania rozkładu teoretycznego do empirycznego. Jest to wyrażona w wartościach bezwzględnych frakcja nietrafnie zakwalifikowanych drzew w klasach grubości.

## Wyniki

Przeciętna pierśnica drzew na powierzchniach próbnych wahała się od 1,0 do 57,2 cm, natomiast pierśnicowe pole przekroju od 4,12 do 45,23 m<sup>2</sup>/ha. Miary dyspersji pierśnic wyrażone odchyleniem standardowym ( $\sigma$ ) oraz współczynnikiem zmienności ( $V$ ) wynosiły odpowiednio od 0,51 do 9,79 cm oraz 15,16 do 79,64%. Drzewostany młodsze charakteryzowały się mniejszą zmiennością bezwzględną ( $\sigma$ ) oraz wyższą względną ( $V$ ) od drzewostanów starszych. Obliczone współczynniki korelacji liniowej ( $r$ ) tych cech z wiekiem wynoszą dla  $\sigma$   $r=0,833$ , a dla  $V$   $r=-0,732$ . Asymetria wyrażona współczynnikiem skośności wystąpiła w zakresie od  $-0,143$  do  $1,410$  – w trzech przypadkach była lewostronna.

W wyniku estymacji parametrów dla rozkładów mieszanych przy pomocy sposobu 1. i 2. (formuła 8 i 9) w czterech przypadkach nie uzyskano przynajmniej dwóch takich samych rozwiązań. W tych przypadkach estymację wykonano na podstawie parametrów startowych ustalonych sposobem trzecim (formuła 10).

W rezultacie dopasowania wybranych rozkładów do rozkładów empirycznych pierśnic rozkłady mieszane sumarycznie dały lepszy rezultat od rozkładów pojedynczych (tab. 2). Wśród rozkładów pojedynczych sumarycznie najwyższa średnia wartość prawdopodobieństwa dla zgodności rozkładu teoretycznego z empirycznym wystąpiła w przypadku zastosowania rozkładu W3 oraz G. W takiej samej ocenie wśród rozkładów mieszanych najbliższy rozkładowi empirycznemu był rozkład mG.

Rozpatrując dopasowanie pod kątem klas wieku, nie stwierdzono jednoznacznie najlepszego rozkładu teoretycznego w kontekście rozkładów pojedynczych, natomiast dla rozkładów mieszanych wyraźnie najlepsze okazało się zastosowanie rozkładu mG i mLN.

Średnie wartości indeksu błędu  $e$  potwierdzają zróżnicowanie uzyskanych wyników w stosunku do zastosowanego wnioskowania na podstawie testu  $\chi^2$  (tab. 3). Sumaryczna ocena wykonana na podstawie średniej  $e$  dla wszystkich drzewostanów wykazała, że wśród rozkładów pojedynczych najlepszy był rozkład SBJ, a następnie W3 i G. Z kolei z zastosowanych rozkładów mieszanych ponownie najlepszy był rozkład mG oraz mLN. Rozpatrując wyniki pod kątem rozdziału na klasy wieku wśród rozkładów pojedynczych, stwierdzono, że najniższe wartości  $e$  uzyskano dla rozkładu SBJ.

Średnia wartość RMSE (tab. 4) jest niższa dla rozkładów mieszanych i jest potwierdzeniem ich lepszego dopasowania do rozkładów empirycznych ustalonego przy pomocy testu  $\chi^2$  i indeksu błędu  $e$ . W kontekście rozkładów pojedynczych wyraźnie najniższe wartości błędu wskazują jako najlepszy rozkład SBJ i W3. Z kolei wśród rozkładów mieszanych najmniejszy błąd uzyskano przy zastosowaniu rozkładu mG oraz mLN.

W podziale na klasy wieku najmniejszym błędem charakteryzował się rozkład SBJ. Uśrednione wyniki dla rozkładów mieszanych nie wskazują jednoznacznie na rozkład najlepszy. W trzech klasach wieku najniższy błąd uzyskano dla rozkładu mG – w drzewostanach I, IV i VI klasy wieku rozkład ten zajął drugie miejsce.

Do zastosowanych w pracy wskaźników oceny aproksymacji obliczono współczynniki regresji liniowej względem logarytmu dziesiętnego zagęszczenia drzewostanów oraz odchylenia standardowego pierśnic (tab. 5). W przypadku trzech rozkładów pojedynczych i wszystkich mieszanych odnotowano istotne obniżenie wielkości indeksu błędu zgodne z gradientem zagęszczenia. Włączając wpływ zagęszczenia drzewostanów oraz rozłożenia wielkości błędu na liczbę klas grubości (RMSE), dla rozkładów pojedynczych odnotowano dodatnią korelację z zagęszczeniem. Zatem w przypadku tych rozkładów uzyskany błąd jest związany z zagęszczeniem

Tabela 2.

Średnie wartości prawdopodobieństwa  $p$  w teście  $\chi^2$  dla poszczególnych rozkładów dla klas wieku (I-VII) oraz dla wszystkich powierzchni próbnych łącznie  
 Mean values of  $p$  in  $\chi^2$  test for age classes (I-VII) and all sample plots jointly

	N	LN	W2	W3	G	SBJ	mN	mLN	mG	mW
I	0,022	0,127	0,108	0,124	0,223*	0,102	0,349	0,449	0,479*	0,434
II	0,238	0,170	0,312	0,404*	0,268	0,309	0,394	0,532	0,596*	0,272
III	0,193	0,302	0,213	0,476	0,432	0,499*	0,483	0,540	0,627*	0,465
IV	0,226	0,204	0,165	0,232	0,236*	0,163	0,239	0,404*	0,319	0,122
V	0,302*	0,219	0,154	0,208	0,286	0,182	0,405*	0,364	0,373	0,286
VI	0,236	0,317*	0,121	0,273	0,311	0,232	0,456	0,489	0,495*	0,452
VII	0,327	0,325	0,246	0,357	0,361*	0,333	0,578*	0,369	0,420	0,374
Łącznie	0,220	0,238	0,193	0,309*	0,307	0,273	0,413	0,456	0,481*	0,342
Total										

N – normalny, LN – logarymicznie normalny, W2 i W3 – 2- i 3-parametrowy Weibull, G – gamma, SBJ – SB Johnsona, m – mieszane  
 N – normal, LN – lognormal, W2 i W3 – 2- i 3-parameter Weibull, G – gamma, SBJ – Johnsons SB, m – mixed

\*najlepszy rezultat z rozdziałem na rozkłady pojedyncze oraz mieszane; best result separately for singular and finite mixture distributions

Tabela 3.

Średnie wartości indeksu błędów  $e$  dla klas wieku (I-VII) oraz dla wszystkich powierzchni próbnych łącznie  
 Mean error index  $e$  in age classes (I-VII) and in all sample plots jointly

	N	LN	W2	W3	G	SBJ	mN	mLN	mG	mW
I	0,220	0,238	0,196	0,170	0,191	0,165*	0,109	0,081	0,077*	0,078
II	0,286	0,259	0,288	0,224	0,230	0,223*	0,124	0,111	0,101*	0,151
III	0,322	0,307	0,310	0,266	0,277	0,243*	0,177	0,170	0,155*	0,167
IV	0,319	0,280	0,338	0,272	0,287	0,247*	0,220	0,203*	0,212	0,253
V	0,286	0,299	0,322	0,302	0,287	0,280*	0,225*	0,270	0,270	0,264
VI	0,326	0,321	0,370	0,328	0,319*	0,328	0,283	0,251*	0,268	0,292
VII	0,237	0,249	0,285	0,233	0,241	0,230*	0,189*	0,206	0,207	0,222
Łącznie	0,288	0,280	0,302	0,256	0,262	0,244*	0,188	0,182	0,181*	0,201
Total										

oznaczenia jak w tabeli 2, denotes as in table 2

Tabela 4.

Średnie wartości pierwiastka błędu średniokwadratowego (RMSE) dla klas wieku (I-VII) oraz dla wszystkich powierzchni próbnych łącznie  
Mean root mean square error (RMSE) in age classes (I-VII) and in all sample plots jointly

	N	LN	W2	W3	G	SBJ	mN	mLN	mG	mW
I	6,485	9,131	6,481	5,870*	6,983	6,334	2,641	2,172	2,021	1,985*
II	6,004	5,488	6,186	4,750	5,063	4,691*	2,910	2,540	2,324*	3,635
III	4,716	4,431	4,519	3,817	4,053	3,453*	2,661	2,453	2,197*	2,923
IV	3,888	3,307	4,307	3,247	3,382	3,047*	2,789	2,476*	2,667	3,127
V	2,812	2,897	3,204	2,983	2,792	2,734*	2,489*	2,594	2,605	2,694
VI	2,542	2,471	2,783	2,498	2,456	2,433*	2,164	2,151	2,147*	2,316
VII	2,502	2,490	2,971	2,400	2,421	2,371*	1,910*	2,270	2,224	2,289
Łącznie	4,222	4,329	4,417	3,684	3,911	3,590*	2,540	2,392	2,316*	2,765
Total										

oznaczenia jak w tabeli 2; denotes as in table 2

Tabela 5.

Współczynniki regresji liniowej  $\log_{10}$  zagęszczenia drzewostanów ( $\log_{10}N$ ) oraz odchylenia standardowego pierścni ( $\sigma$ ) względem wskaźników zastosowanych do oceny aproksymacji

Linear regression coefficients between  $\log_{10}$  of stands density ( $\log_{10}N$ ) and standard deviation of DBH ( $\sigma$ ) and obtained indicators for evaluation of approximation

	N	LN	W2	W3	G	SBJ	mN	mLN	mG	mW
$p$ ( $\chi^2$ )	-0,267	-0,258	0,030	-0,129	-0,184	-0,178	-0,047	0,118	0,160	0,088
$e$	-0,124	0,012	-0,540**	-0,378**	-0,275	-0,402**	-0,648**	-0,805**	-0,802**	-0,764**
RMSE	0,554**	0,772**	0,645**	0,732**	0,751**	0,787**	0,094	-0,130	-0,203	-0,044
$p$ ( $\chi^2$ )	0,247	0,184	0,047	0,147	0,157	0,195	0,101	-0,087	-0,110	0,023
$e$	0,295	0,214	0,525**	0,493**	0,405**	0,472**	0,635**	0,807**	0,770**	0,697**
RMSE	-0,524**	-0,645**	-0,635**	-0,630**	-0,637**	-0,675**	-0,164	0,024	0,097	-0,076

oznaczenia jak w tabeli 2; denotes as in table 2

\*\* wartości istotne przy  $\alpha=0,05$ ; values significant at  $\alpha=0,05$



drzewostanów. Brak podobnej korelacji dla rozkładów mieszanych świadczy, że w ich przypadku cecha ta ma mniejszy wpływ na wynik aproksymacji. W odniesieniu do odchylenia standardowego stwierdzono podobne trendy. Wzrost zmienności pierśnic w większości przypadków koreluje dodatnio ze wzrostem wielkości indeksu błędu, a w przypadku RMSE – odwrotnie. Należy się zatem spodziewać, że teoretyczny błąd aproksymacji nieobciążony przez zagęszczenie będzie wynikał głównie ze zróżnicowanej budowy drzewostanów. Trend spadku RMSE korelujący ze wzrostem odchylenia standardowego potwierdza, że zagęszczenie wywiera większy wpływ na wielkość frakcji nietrafnie zakwalifikowanych drzew w przypadku rozkładów pojedynczych niż budowa drzewostanu. Dla wszystkich ocenianych rozkładów nie stwierdzono istotnej korelacji z wartością  $p$  testu  $\chi^2$ .

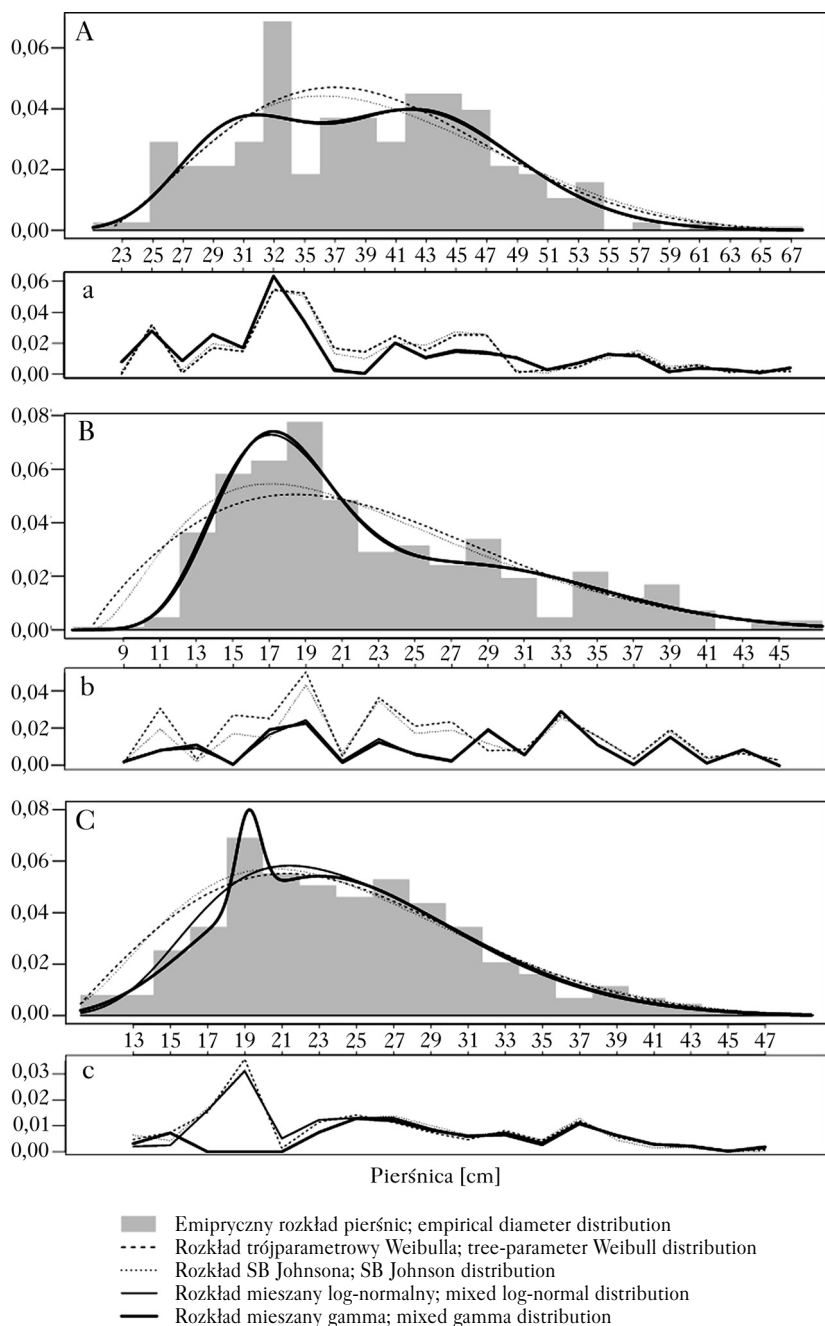
Przeanalizowano przebieg cząstkowych wartości indeksu błędu  $e$  w klasach grubości składających się na całość tego wskaźnika. Dla przykładu przedstawiono trzy różne warianty w zależności od końcowej wartości indeksu wraz z najlepszymi rozkładami teoretycznymi (ryc.). Przebieg rozkładów empirycznych w poszczególnych wariantach przebiegał następująco: A – wielomodalny, B – dwumodalny, C – jednomodalny. W wariantcie A(a) wszystkie rozkłady dalece odbiegały od rozkładu empirycznego. Zastosowanie rozkładów mieszanych zmniejszyło wartość  $e$  o ~0,04, czego przyczyną było uzyskane przegięcie w pobliżu jednego z minimów lokalnych. Z kolei wariant B(b) został lepiej aproksymowany przez rozkłady mieszane niż przez pojedyncze. Różnice indeksu błędu pomiędzy rozkładami mieszanymi i pojedynczymi przyjęły wartości w zakresie od 0,09 do 0,14, odpowiednio dla rozkładu SBJ oraz W3, na korzyść rozkładów mieszanych. W przykładzie C(c) wynik aproksymacji jest bardzo dobry dla wszystkich przedstawionych rozkładów ( $e$  na poziomie ~0,15), a najlepszy wynik uzyskano dla rozkładu mG ( $e=0,09$ ).

## Dyskusja

W badaniach dopasowania rozkładów pierśnic w drzewostanach bukowych na niżu Polski wykazano, że do opisu tych rozkładów odpowiedni jest rozkład normalny i podwójny normalny oraz nie powinien być stosowany rozkład SB. Wyniki analiz rozkładów grubości w drzewostanach Puszczy Bukowej przedstawione w niniejszej pracy wskazują, że aproksymacja z użyciem rozkładu normalnego charakteryzowała się stosunkowo wysokimi wartościami błędów. Z kolei rozkład SB Johnsona charakteryzował się średnio najniższym błędem wyrażonym przez indeks błędu  $e$  oraz RMSE dla wszystkich drzewostanów łącznie oraz z podziałem na klasy wieku. Rozkład ten posiada największą liczbę parametrów w stosunku do pozostałych testowanych rozkładów pojedynczych i teoretycznie jest najbardziej elastyczny. Wyniki badań innych autorów wskazują również na dobre dopasowanie rozkładu SB Johnsona [Hafley, Schreuder 1977; Zasada 1995; Gorgoso i in. 2012] w drzewostanach innych gatunków.

Podlaski [2006] do modelowania struktury grubości w drzewostanach bukowo-jodłowych walczy jako uniwersalne rozkłady Weibulla i gamma. Uzyskane w ramach niniejszych badań wyniki, wyłączając rozkład SBJ oraz rozkłady mieszane, potwierdzają uniwersalność ich zastosowania.

Duński model rozkładu pierśnic dla jednowiekowych drzewostanów bukowych [Nord-Larsen, Cao 2006] oparto na trójparametrowym rozkładzie Weibulla. Analizy struktury drzewostanów z Nadleśnictwa Gryfino wskazują, że rozkład ten dobrze opisuje rozkład pierśnic, a średni błąd aproksymacji jest niższy jedynie dla rozkładu SB Johnsona. Nord-Larsen i Cao [2006] wykazali na podstawie testów nieparametrycznych, że ich model jest częściej niezgodny z rozkładem empirycznym w drzewostanach młodszych. Jako przyczynę takich wyników wskazują różnice w zagęszczeniu początkowym drzewostanów oraz redukcję liczby drzew w kolejnych



Ryc.

Empiryczny rozkład pierśnic drzewostanów z wybranych powierzchni próbnych z naniesionymi funkcjami gęstości prawdopodobieństwa najlepiej dopasowanych rozkładów teoretycznych (duże litery) oraz przebieg cząstkowych wartości indeksu błęd  $\epsilon$  (małe litery)

Empirical breast height diameter distribution of stands selected from sample plots with probability density functions of best fitted theoretical distributions (capital letters) and error index  $\epsilon$  fractional values course (small letters) from selected sample plots

fazach rozwojowych drzewostanów, co najpewniej jest związane ze zróżnicowanym wpływem zagęszczenia na strukturę drzewostanu [Jagodziński, Oleksyn 2009]. Przedstawione wyniki badań przeprowadzonych w Nadleśnictwie Gryfino wskazują, że zagęszczenie jest istotnym czynnikiem wpływającym na wielkość błędu i ważną przyczyną słabszego dopasowania w drzewostanach młodszych (o wyższym zagęszczeniu) względem starszych.

Drugim elementem, który ma wpływ na wielkość błędu aproksymacji, jest budowa drzewostanów. Rozkład pierśnic analizowanych drzewostanów bukowych charakteryzuje się bardzo zróżnicowaną zmiennością. Podobne wyniki w stosunku do buczyn na niżu przedstawiły Rymer-Dudzińska i Dudzińska [2001].

W pracy wykazano zróżnicowanie pomiędzy porównywanymi rozkładami mieszanymi. Jeśli uznać za miarę średnie wartości ocen ( $p$  dla testu  $\chi^2$ , RMSE i indeks błędu  $e$ ) dla wszystkich powierzchni próbnych łącznie, najlepszy był rozkład mG i kolejno mLN, mN oraz mW. W badaniach innych autorów przedstawiających dopasowanie rozkładów mieszanych do struktury grubości w drzewostanach o jej nieregularnym przebiegu (drzewostany mieszane z udziałem buka) testowano rozkłady mG i mW [Podlaski 2010a, b; Jaworski, Podlaski 2012]. Wyniki analiz przedstawione w niniejszej pracy wskazują jednoznacznie, że rozkłady mG, mLN oraz mN dały sumarycznie i w podziale na klasy wieku lepszy rezultat od rozkładu mW.

Zastosowana metodyka [Podlaski, Roesch 2013] pozwoliła na prawidłową estymację parametrów dla rozkładów mieszanych, znacznie zmniejszając czasochłonność obliczeń. Jedynie w czterech przypadkach (na 128) obliczenia wymagały użycia metody wielopunktowej. Brak zbieżności procedury numerycznej podczas estymacji parametrów odnotowano tylko w przypadku rozkładu mieszanego Weibulla. W pracy Podlaskiego [2010b] również dla tego rozkładu problem ten występował najczęściej.

Spośród zastosowanych do oceny wskaźników średnia wartość prawdopodobieństwa  $p$  dla testu  $\chi^2$  nie wskazuje jednoznacznie na wielkość uzyskanego w procesie aproksymacji błędu. Informacja na temat zgodności lub niezgodności danego rozkładu z rozkładem empirycznym z praktycznego punktu widzenia jest niewystarczająca [Reynolds i in. 1988]. W przypadku rozkładów mieszanych ocena na podstawie wartości  $p$  jest zbliżona do RMSE i  $e$ . W odniesieniu do rozkładów pojedynczych stwierdzono inną kolejność poziomu dopasowania pomiędzy oceną na podstawie średnich wartości  $p$  a RMSE i  $e$ .

## Podsumowanie

W pracy przedstawiono ocenę aproksymacji rozkładów grubości drzewostanów bukowych przy użyciu różnych rozkładów teoretycznych. Spośród rozwiązań mniej skomplikowanych – rozkładów pojedynczych – średnio najniższy błąd (RMSE i  $e$ ) uzyskano przy użyciu rozkładów SB Johnsona oraz trójparametrowego Weibulla. Zakres średnich błędów w obrębie klas wieku wyniósł odpowiednio 16,5-32,8% i 17,0-32,8% liczby drzew w stopniach grubości na jednostce powierzchni. Wśród rozkładów mieszanych najwyżżej oceniono rozkład gamma i logarytmicznie normalny. Zakres błędów wyniósł odpowiednio 7,7-27,0% i 8,1-27,0%. Dzięki zastosowaniu rozkładów mieszanych uzyskano wyraźne przesunięcie granic błędów.

Na badanych powierzchniach próbnych w wielu przypadkach, mimo jednowiekowości i jednogeneracyjności, analizowane drzewostany miały nieregularny przebieg liczebności drzew w klasach grubości – szczególnie w drzewostanach starszych klas wieku. Fakt lepszej aproksymacji rozkładu grubości przy pomocy rozkładów mieszanych nie budzi wątpliwości. Potencjalnie rozkłady te przeznaczone są dla drzewostanów o złożonej strukturze – dwu- lub wielopiętrowej oraz generacyjnej. W wypadku drzewostanów bukowych, szczególnie starszych klas

wieku, mogą one znaleźć zastosowanie ze względu na nieregularną strukturę grubości. Ze względu na złożoność i skomplikowanie tego typu rozwiązań zastosowanie rozkładów mieszanych do modelowania rozkładów grubości będzie dużo trudniejsze niż zastosowanie rozkładów pojedynczych. Należy mieć na uwadze, że stopień skomplikowania przyszłego modelu musi być proporcjonalny do uzyskanych korzyści, np. w postaci ewidentnego zmniejszenia błędu. W podziale na klasy wieku najniższe rozbieżności występowały najczęściej dla rozkładu SB Johnsona oraz mieszanego gamma.

Dowiedziano, że budowa drzewostanu ma istotny wpływ na błąd dopasowania rozkładu teoretycznego wyrażony różnicą pomiędzy względną liczbą drzew w klasach grubości. Jeśli uznać za miarę różnicę pomiędzy empiryczną i dopasowaną liczbą drzew w klasach grubości, wpływ budowy zanika, a uwypukla się wyraźny związek wielkości błędu z zagęszczeniem. Ta sama wartość indeksu błędu  $\epsilon$  w drzewostanie młodszym i starszym będzie skutkowała wyższym błędem modelu w pierwszym przypadku niż w drugim.

Monokultury drzew leśnych, z założenia o uproszczonej strukturze, w przypadku buka zwyczajnego – gatunku o wysokiej cienioznośności – wykazują bardzo zróżnicowaną i złożoną strukturę grubości. Cienioznośność tego gatunku predysponuje drzewa przygłuszone do dłuższej vegetacji pod okapem drzew panujących i jest przyczynkiem do kształtowania się budowy dwupiętrowej takich drzewostanów. Drugim aspektem jest rola człowieka, który odpowiednio modyfikuje przebieg konkurencji wewnątrzgatunkowej warstw drzew w drzewostanie. Model dla obiektu tego typu, bez względu na zaawansowanie zastosowanych rozwiązań matematycznych przedstawionych w niniejszej pracy, może być obciążony stosunkowo wysokim błędem.

## Literatura

- Bailey R. L. 1980. Individual tree growth derived from diameter distribution models. *Forest Science* 26 (4): 626-632.
- Bailey R. L., Dell T. R. 1973. Quantifying diameter distributions with the Weibull function. *Forest Science* 19 (2): 97-104.
- Barnes D. J., Chu D. 2010. Introduction to Modeling for Biosciences. Springer Science + Business Media, Dordrecht – Heidelberg – New York – London.
- Bliss C. I., Reinker K. A. 1964. A lognormal approach to diameter distributions in even-aged stands. *Forest Science* 10 (3): 350-360.
- Burkhardt H. E., Tomé M. 2012. Diameter-distribution models for even-aged stands. W: Burkhardt H. E., Tomé M. [red.]. *Modeling Forest Trees and Stands*. Springer Science + Business Media, Dordrecht – Heidelberg – New York – London. 261-297.
- Gorgoso J. J., Rojo A., Camara-Obregon A., Dieguez-Aranda U. 2012. A comparison of estimation methods for fitting Weibull, Johnson's SB and beta functions to *Pinus pinaster*, *Pinus radiata* and *Pinus sylvestris* stands in north-west Spain. *Forest Systems* 21 (3): 446-459.
- Hafley W. L., Schreuder H. T. 1977. Statistical distributions for fitting diameter and height data in even-aged stands. *Canadian Journal of Forest Research* 7 (3): 481-487.
- Jagodziński A. M., Oleksyn J. 2009. Ekologiczne konsekwencje hodowli drzew w różnym zagęszczeniu. I. Wzrost i rozwój drzewostanu. *Sylvan* 153 (2): 75-85.
- Jaworski A., Podlaski R. 2012. Modelling irregular and multimodal tree diameter distributions by finite mixture models: an approach to stand structure characterization. *Journal of Forest Research* 17 (1): 79-88.
- Jopp F., Reuter H., Breckling B. [red.]. 2011. *Modelling Complex Ecological Dynamics*. Springer Science + Business Media, Dordrecht – Heidelberg – New York – London.
- Kerr G. 2014. The management of silver fir forests: de Liocourt (1898) revisited. *Forestry* 87 (1): 29-38.
- Kilkki P., Maltamo M., Mykkänen R., Päivinen R. 1989. Use of the Weibull function in estimating the basal area dbh-distribution. *Silva Fennica* 23 (4): 311-318.
- Liu Ch., Zhang L., Davis C. J., Solomon D. S., Gove J. H. 2002. A finite mixture model for characterizing the diameter distributions of mixed-species forest stands. *Forest Science* 48 (4): 653-661.
- Macdonald P., Du J. 2014. Finite mixture distribution models. Package 'mixdist' ver. 0.5-4. <http://ms.mcmaster.ca/peter/mix/mix.html>
- Nelson T. C. 1964. Diameter distribution and growth of loblolly pine. *Forest Science* 10 (1): 105-114.
- Nord-Larsen T., Cao Q. V. 2006. A diameter distribution model for even-aged beech in Denmark. *Forest Ecology and Management* 231 (1-3): 218-225.

- Podlaski R. 2006. Suitability of the selected statistical distributions for fitting diameter data in distinguished development stages and phases of near-natural mixed forests in the Świętokrzyski National Park (Poland). *Forest Ecology and Management* 236 (2-3): 393-402.
- Podlaski R. 2010a. Diversity of patch structure in Central European forests: are tree diameter distributions in near-natural multilayered *Abies-Fagus* stands heterogeneous? *Ecological Research* 25 (3): 599-608.
- Podlaski R. 2010b. Two-component mixture models for diameter distributions in mixed-species, two-age cohort stands. *Forest Science* 56 (4): 379-390.
- Podlaski R., Roesch F. A. 2013. Aproksymacja rozkładów pierśnic w dwugeneracyjnych drzewostanach za pomocą rozkładów mieszanych. I. Estymacja parametrów. *Sylvan* 157 (8): 587-596.
- Podlaski R., Zasada M. 2008. Comparison of selected statistical distributions for modeling the diameter distributions in near-natural *Abies-Fagus* forests in the Świętokrzyski National Park (Poland). *European Journal of Forest Research* 127 (6): 455-463.
- Reynolds M. R., Burk T. E., Huang W.-Ch. 1988. Goodness-of-fit tests and model selection procedures for diameter distribution models. *Forest Science* 34 (2): 373-399.
- Rymer-Dudzińska T., Dudzińska M. 1999. Analiza rozkładu pierśnic w drzewostanach bukowych. *Sylvan* 143 (8): 5-24.
- Rymer-Dudzińska T., Dudzińska M. 2001. Rozkład pierśnic drzew w nizinnych drzewostanach bukowych. *Sylvan* 145 (8): 13-22.
- Shiver B. D. 1988. Sample sizes and estimation methods for the Weibull distribution for unthinned slash pine plantation diameter distributions. *Forest Science* 34 (3): 809-814.
- Siekierski K. 1992. Evaluation of the goodness of fit of some statistical distributions to tree diameter distributions. *Annals of Warsaw Agricultural University, Forestry and Wood Technology* 43: 7-14.
- Zasada M. 1995. Ocena zgodności rozkładów pierśnic w drzewostanach jodłowych z niektórymi rozkładami teoretycznymi. *Sylvan* 139 (12): 61-69.
- Zhang L., Gove J. H., Liu Ch., Leak W. B. 2001. A finite mixture of two Weibull distributions for modeling the diameter distributions of rotated-sigmoid, uneven-aged stands. *Canadian Journal of Forest Research* 31 (9): 1654-1659.
- Zhang L., Liu Ch. 2006. Fitting irregular diameter distributions of forest stands by Weibull, modified Weibull, and mixture Weibull models. *Journal of Forest Research* 11 (5): 369-372.