

2/4

ZASTOSOWANIE METODY NAJMNIEJSZYCH KWADRATÓW
DO OBLICZANIA WSPÓŁCZYNNIKA FILTRACJI

J. DOBRZYCKI

Katedra Cukrownictwa i Technologii Środków Spożywczych
Politechniki Łódzkiej, Łódź

Kierownik Katedry: Prof. dr S. Zagrodzki

Jednym z kryteriów oceny pracy stacji oczyszczania soków jest pomiar zdolności filtracyjnej soku po I saturacji. Spośród różnych metod uzyskał ostatnio większe znaczenie pomiar współczynnika oporu filtracji F_k według Brieghel-Müllera [1]. Definiując jako opór filtracji z czas filtracji jednostki objętości $\frac{dt}{dv}$ Brieghel-Müller nazwał przyrost oporu filtracji na jednostkę objętości współczynnikiem F_k ;

$$F_k = \frac{dz}{dv} = \frac{d^2t}{dv^2}$$

W przeciwieństwie do współczynników szybkości filtracji oznaczanych dotychczas różnymi metodami, wielkość współczynnika F_k nie zależy od oporu stawianego przez tkaninę lub bibułę filtracyjną. Stanowi to ważną zaletę, gdyż uniezależnia wynik pomiaru od rodzaju użytej przepony filtracyjnej, która w innych metodach musiała być określana umownie.

Posługiwanie się jednak współczynnikiem F_k ma również szereg złych stron, które powodują, że konieczne jest prowadzenie dalszych prac nad ustaleniem kryteriów oceny filtracji w przemyśle cukrowniczym. Rens [2] zwrócił uwagę na to, że wartość F_k zależy nie tylko od struktury osadu saturacyjnego, lecz także od ciśnienia P , lepkości filtratu μ oraz od zawartości osadu w soku C . Według Rensa właściwą miarą zdolności filtracyjnej osadu powinna więc być wielkość:

$$\frac{P \cdot F_k}{\mu \cdot C}$$

zwana przez niego współczynnikiem filtracji właściwej.

W polskich pracach dotyczących filtracji było stosowane kryterium zdefiniowane przez Smoleńskiego [3] jako współczynnik szybkości filtra-

cji. Jak można wykazać (Dobrzycki [4]), współczynnik K według Smoleńskiego związany jest z F_k następującą zależnością:

$$K = 1,14 \cdot 10^4 \frac{C}{F_k}$$

gdzie C — zawartość osadu w soku w m^3 na $1 m^3$ filtratu.

Metodyka pomiaru F_k

Laboratoryjny pomiar współczynnika oporu filtracji F_k polega na cedzeniu badanej zawiesiny przez mikrofiltr o powierzchni $S = 2 \text{ cm}^2$, przy czym różnica ciśnień po obu stronach przegrody filtracyjnej jest w przybliżeniu stała i wynosi 40 cm słupa rtęci ($0,526 \text{ kG/cm}^2$). W trakcie cedzenia zbiera się filtrat w biuretce z podziałką co 1 ml i notuje czas przejścia menisku przesączu co najmniej przez trzy kreski podziałowe biuretki.

Jeżeli menisk przesączu osiągnął objętość V_1, V_2, V_3 i V_4 w momentach t_1, t_2, t_3, t_4 , wówczas:

$$F_k = \frac{S^2}{(V_2 - V_1) \cdot (V_3 - V_1)} [(t_4 - t_3) - (t_2 - t_1)]$$

lub w skrócie

$$F_k = q [(t_4 - t_3) - (t_2 - t_1)]$$

przy czym objętości dobiera się tak, aby $(V_4 - V_3) = (V_2 - V_1)$. Rachubę czasu można rozpocząć od dowolnej podziałki biurety.

W zależności od tego, które podziałki biuretki przyjmiemy za V_1, V_2 itd., wartość ułamka q może być różna.

Według Brieghel-Müllera [1]

$$F_k = (t_{n+5} - t_{n+4}) - (t_{n+1} - t_n)$$

według Nowakowskiego [5]

$$F_k = 0,5 [(t_{n+6} - t_{n+4}) - (t_{n+2} - t_n)]$$

Badania wykonane w Katedrze Cukrownictwa i Technologii Środków Spożywczych Politechniki Łódzkiej wykazały, że w serii kilku pomiarów F_k w tej samej zawieszynie otrzymuje się dość duży rozrzut wyników, rzędu $\pm 10\%$. Jednorazowy więc pomiar F_k jest obarczony znaczną niepewnością i w badaniach naukowych było dotychczas konieczne wykonanie kilku pomiarów i obliczenie średniej. Aby zmniejszyć błąd pomiaru, nie przedłużając zarazem czasu oznaczania, autor opracował metodę pomiaru seryjnego, polegającego na notowaniu czasu przejścia menisku

przesączu kolejno przez większą liczbę podziałek biuretki. Należy przy tym posłużyć się sekundomierzem dwuwskaźkowym lub dwoma zwykłymi sekundomierzami.

Uogólnienie pomiaru F_k z zastosowaniem metody najmniejszych kwadratów

Załóżmy, że zmierzono czas filtracji kolejnych n mililitrów przesączu, otrzymując następujące wyniki:

Objętość filtratu	0	1	2	3	...	n	ml
Czas od początku filtracji	0	t_1	t_2	t_3	...	T_n	sek
Czas filtracji 1 mililitra		T_1	T_2	T_3	...	t_n	sek

Ponieważ w definicji F_k założono, że osad nie ulega ścisaniu a filtracja odbywa się pod stałym ciśnieniem, można przyjąć, że czas filtracji 1 mililitra T jest funkcją liniową v :

$$S^2T = F_k \cdot v + b$$

$$S^2 \frac{dT}{dv} = F_k$$

Jeżeli wyniki pomiaru przedstawić w postaci punktów w układzie współrzędnych T i v , poszczególne punkty wskutek nieuniknionych błędów przypadkowych nie leżą na linii prostej. Aby znaleźć równanie prostej najlepiej oddającej wynik pomiaru, należy zastosować metodę najmniejszych kwadratów (rys. 64).

Oznaczamy symbolem e błąd, tj. różnicę między wartością T wynikającą z równania prostej, a wartością T zmierzoną:

$$e = v \frac{F_k}{S^2} + B - T \quad \left(\text{gdzie } B = \frac{b}{S^2} \right)$$

Odchylenia poszczególnych punktów od prostej, oraz kwadraty tych odchyłeń wynoszą:

$$e_n = n \frac{F_k}{S^2} + B - T_n$$

$$e_n^2 = \left(n \frac{F_k}{S^2} + B - T_n \right)^2$$

Suma kwadratów błędów wynosi:

$$\sum e_n^2 = \sum \left(n \frac{F_k}{S^2} + B - T_n \right)^2$$

Aby suma ta osiągnęła minimum, jej pochodne cząstkowe względem F_k i względem B powinny być równe zero

$$\frac{\partial \sum \epsilon_n^2}{\partial F_k} = \sum 2 \left(n \frac{F_k}{S^2} + B - T_n \right) \frac{n}{S^2} = 0$$

$$\frac{\partial \sum \epsilon_n^2}{\partial B} = \sum 2 \left(n \frac{F_k}{S^2} + B - T_n \right) = 0$$

Rozkładając sumy na składniki i wyłączając stałe przed znaki sumy otrzymuje się następujący układ równań:

$$\frac{F_k}{S^2} \Sigma n^2 + B \Sigma n = \Sigma n T_n$$

$$\frac{F_k}{S^2} \Sigma n + B \cdot n = \Sigma T_n$$

stąd

$$\frac{F_k}{S^2} = \frac{n \Sigma n T_n - \Sigma T_n \Sigma n}{n \Sigma n^2 - (\Sigma n)^2}$$

Po podstawieniu

$$\Sigma T_n = t_n$$

$$\Sigma n T_n = n t_n - (t_{n-1} + \dots + t_2 + t_1)$$

$$\Sigma n = \frac{1}{2} n (n+1)$$

$$\Sigma n^2 = \frac{1}{6} n (n+1) (2n+1)$$

$$S^2 = 4$$

otrzymujemy

$$F_k = \frac{24}{n(n^2-1)} [(n-1)t_n - 2(t_1 + t_2 + \dots + t_{n-1})]$$

W zależności od liczby zanotowanych wskazań sekundomierza wzór ten przybiera następujące formy:

$$n = 2 \quad F_k = 4(t_2 - 2t_1)$$

$$n = 3 \quad F_k = 2(t_3 - t_2 - t_1)$$

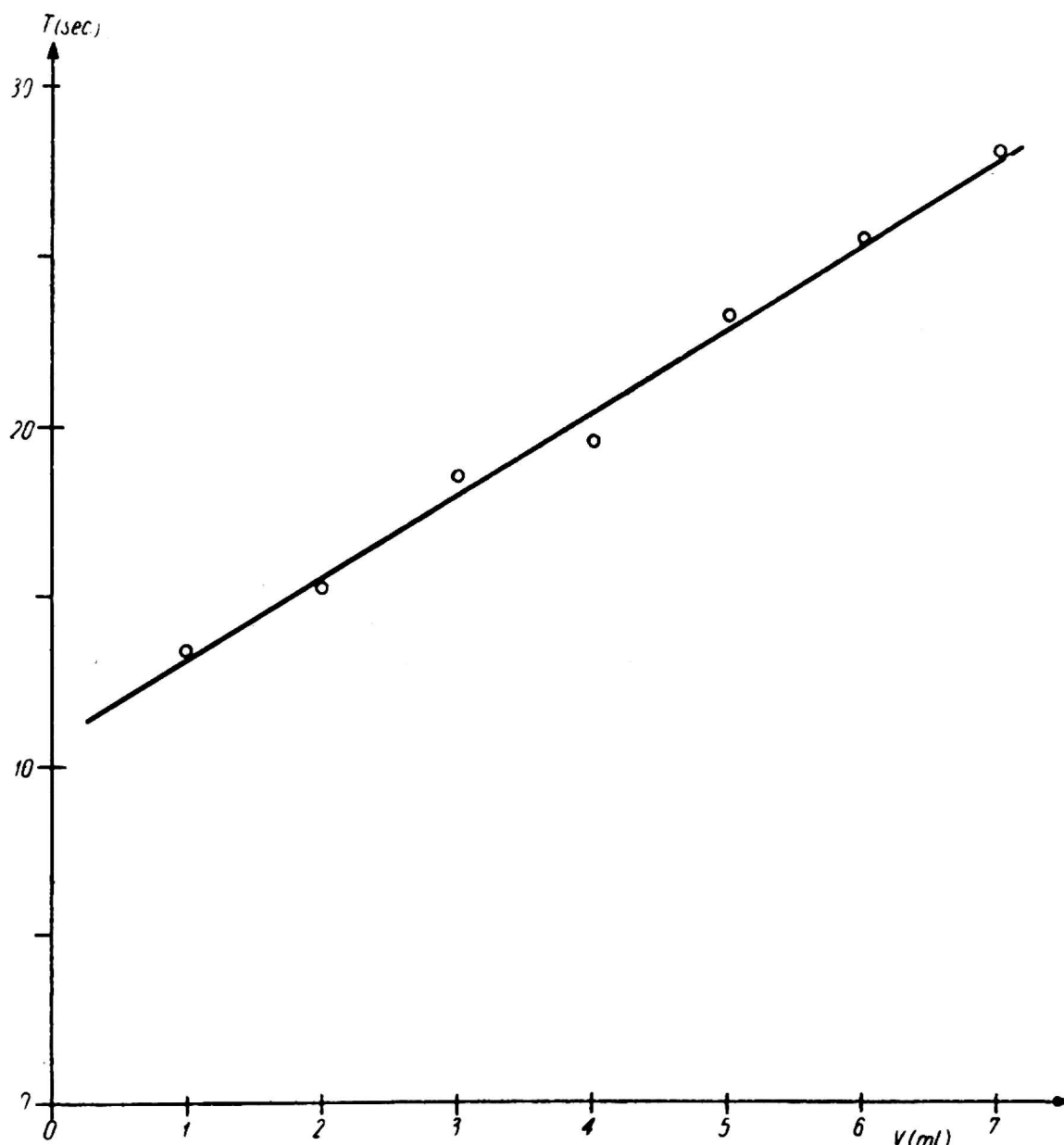
$$n = 4 \quad F_k = \frac{6}{15} [3t_4 - 2(t_1 + t_2 + t_3)]$$

$$n = 5 \quad F_k = \frac{2}{5} [2t_5 - (t_1 + t_2 + t_3 + t_4)]$$

$$n = 6 \quad F_k = \frac{4}{35} [5t_6 - 2(t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5)]$$

$$n = 7 \quad F_k = \frac{1}{7} [3t_7 - (t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 + t_6)]$$

Jak widać, wygodniejsze w użyciu są wzory dotyczące nieparzystej liczby pomiarów, szczególnie wzór dla 7 pomiarów czasu. Oczywiście stosowanie 2 lub 3 pomiarów byłoby sprzeczne z założeniami metody.



Rys. 64. Czas filtracji kolejnych mililitrów (T) w zależności od objętości filtratu (V)

Przykład liczbowy

$V = 0$	1	2	3	4	5	6	7
$t = 0$	13,4	28,6	47,2	67,0	90,4	116,0	144,1 sekund

$$F_k = \frac{1}{7} [3 \cdot 144,1 - (13,4 + 28,6 + 47,2 + 67,0 + 90,4 + 116,0)] = 69,7 : 7 = 9,96$$

Na rys. 64 uwidoczono prostą $T = 2,49 V + 10,63$ obliczoną na podstawie powyższych równań. Nachylenie prostej $\frac{F_k}{S^2}$ wynosi 2,49.

Zmodyfikowana metoda, polegająca na 7 notowaniach czasu podczas jednego oznaczenia zapewnia przy nieznacznie zwiększonym nakładzie pracy otrzymanie dokładniejszego wyniku pomiaru F_k .

LITERATURA

1. A. Brieghel-Müller: Kolloid-Z. **92**, 285 (1940); **93**, 297 (1940); **95**, 82 (1941); **99**, 293 (1942).
2. G. Rens: Sucr. Belge **76**, 281, 336 (1957).
3. K. Smoleński, M. Werkenthin, W. Żero: Gaz. Cukrown. **80**, 36, 74 (1937).
4. J. Dobrzycki: Gaz. Cukrown. **64**, 267 (1962).
5. B. Nowakowski: Gaz. Cukrown. **60**, 141 (1958).

DYSKUSJA

Dr Brieghel-Müller. Zaproponowane przez dr Dobrzyckiego rozwinięcie metody oznaczania F_k mogą w pełni poprzeć. Stosowaliśmy podobną metodę, zwłaszcza dla dokładniejszego badania przebiegu filtracji. Wykreślne oznaczenie wzrostu oporu filtracji w plastrze błotnym pozwala zorientować się w ściśliwości błota.