

КОНСТРУИРОВАНИЕ ПЛОСКИХ КРИВЫХ В ПОЛЯРНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ ЗА ЗАДАНЫМИ СВОЙСТВАМИ ПРИ ВРАЩЕНИИ ИХ ВОКРУГ ПОЛЮСА

Сергей Пилипака, Виталий Бабка, Татьяна Захарова

Національний університет біоресурсів і природопользовання України

Україна, г. Київ, ул. Героїв Оборони, 15

Sergey Pylypaka, Vitaliy Babka, Tatyana Zaharova

National University of Life and Environmental Sciences of Ukraine

Heroiv Oborony Str., 15, Kiev, Ukraine

Аннотация. Приведено аналитическое описание кривых в полярной системе координат, отвечающих заданным свойствам механического (постоянство крутящего момента, создаваемого силой постоянной величины нажатия стержня вдоль нормали на кулачок, очерченный искомой кривой) и геометрического характера (постоянство угла пересечения заданной кривой с искомой при вращении последней вокруг полюса).

Ключевые слова: полярная система координат, плоская кривая, момент силы, крутящий момент.

ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ

Поверхности рабочих органов и кривые линии на них непосредственным образом влияют на рабочий процесс, то есть от их формы зависит качество выполняемой работы [19].

АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ ПОСЛЕДНИХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Кривые линии в определенных условиях обладают механическими свойствами. Перечислим некоторые из наиболее известных свойств. Циклоида есть брахистохроной при движении частицы по поверхности под действием силы собственного веса при отсутствии сопротивления перемещению [4]. Гибкая тяжелая нить, подвешенная в двух точках, принимает форму цепной линии [24]. Переходные линии на закруглениях железнодорожных путей, трамвайных линий делают дугами клотоиды [2] или лемнискаты Бернулли [23]. Профиль зуба в зубчатых зацеплениях очерчен по эвольвенте окружности [22]. Профилем вертикального сечения

антифрикционной пяты карусельного токарного станка является трактриса [21]. При упругом изгибании тонких консольно закрепленных стержней на значительную величину под действием приложенной силы их ось принимает форму клотоиды [18]. Отдельную группу кривых представляют из себя траектории движения материальной частицы по шероховатой поверхности или плоскости [1, 3-10, 12, 14, 25]. Некоторые специальные линии поверхности имеют механические свойства, как, например, геодезические, которые могут быть граничными траекториями движения частицы по поверхности при больших ее скоростях [11, 13, 16, 20], или линии укоса, как вероятные траектории движения водных потоков [15, 17].

ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Целью статьи является получение аналитического описания кривых в полярной системе координат за заданными свойствами механического или геометрического характера. Первое свойство – постоянство крутящего момента, создаваемого силой постоянной величины нажатия стержня вдоль нормали на кулачок, очерченный искомой кривой. Второе свойство – постоянство угла пересечения заданной кривой с искомой при вращении последней вокруг полюса.

РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЙ

Рассмотрим некоторые свойства кривых, связанных с вращением. В этом случае кривую удобно задавать в полярной системе координат зависимостью длины радиус-вектора ρ от угла φ его поворота: $\rho = \rho(\varphi)$.

КОНСТРУИРОВАНИЕ ПЛОСКИХ КРИВЫХ В ПОЛЯРНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ ЗА ЗАДАНЫМИ СВОЙСТВАМИ ПРИ ВРАЩЕНИИ ИХ ВОКРУГ ПОЛЮСА

Параметрические уравнения кривой в этом случае будут иметь вид:

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \varphi; \\ y &= \rho \sin \varphi. \end{aligned} \quad (1)$$

При $\rho = \text{const}$ уравнения (1) задают окружность.

При линейной зависимости $\rho = a\varphi$ образуемой кривой будет спираль Архимеда (рис. 1, а), у которой расстояние h между витками зависит от постоянной a : $h = 2\pi a$.

При вращении кривой вокруг полюса (начала координат) с постоянной угловой скоростью ω в радиальном направлении точка кривой движется с постоянной линейной скоростью v , которую можно найти дифференцированием зависимости $\rho = \rho(\varphi)$ по времени t :

$$v = \frac{d\rho}{dt} = \frac{d\rho}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \omega \frac{d\rho}{d\varphi}.$$

Для спирали Архимеда $\rho = a\varphi$ скорость v имеет постоянное значение: $v = a\omega$. Это свойство используется в кулачковых механизмах, когда требуется, чтобы стержень совершал возвратно-поступательное движение с по-

стоянной скоростью [5]. Для этого эксцентрик очерчивается двумя симметричными дугами спирали (рис. 1, б).

Если стержень расположить по нормали к спирали, как показано на рис. 1, а, то его ось будет находиться на некотором расстоянии d от центра вращения.

При повороте кулачка на некоторый угол стержень уже не будет располагаться по нормали, то есть для того, чтобы он все время располагался по нормали, расстояние d должно быть переменным.

Поэтому, если стержень прижимается к профилю кулачка, очерченному по спирали Архимеда, с постоянной силой P , то необходимый крутящий момент для преодоления этой силы не будет постоянным (при этом силу трения не учитываем).

Поставим задачу найти такой профиль кулачка, который при постоянной силе P воздействия стержня на кулачок создавал бы при его вращении постоянный крутящий момент.

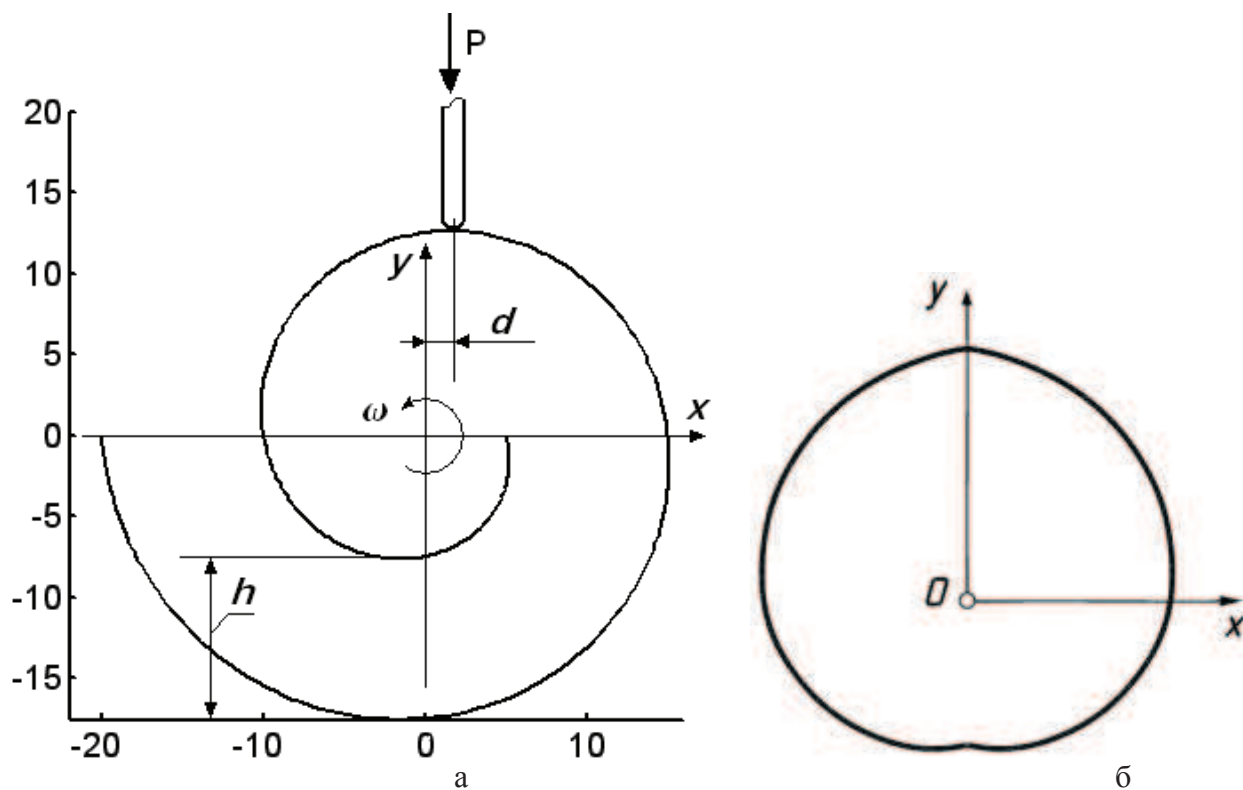


Рис. 1. Использование спирали Архимеда для вычерчивания профиля кулачка:

Fig. 1. Use of spiral of Archimedes for drawing of type of fist:

- а) к определению конструктивных параметров спирали;
- б) кулачок, образованный двумя симметричными дугами спирали.

На рис. 2,а изображена часть профиля конструируемого кулачка с приложенной в точке A вдоль нормали реакцией P , равной силе воздействия на кулачок стержня. Сила P создает момент $M=Pd$. Его можно заменить равноценным моментом $M=P\rho\rho'$, где $P\rho'$ является проекцией силы P на направление, перпендикулярное радиус-вектору ρ , величина OA которого является плечом силы. Таким образом $M=P\rho\cos\alpha$. Чтобы момент M был постоянным при изменяющемся плече $OA=\rho$, необходимо обеспечить соответствующее изменение угла α . Из рис. 2,а нетрудно заметить, что угол α образуется пересечением радиус-вектора ρ с касательной к конструируемой кривой. Направление радиус-вектора ρ задается уравнениями (1), а направление касательной найдем дифференцированием этих уравнений:

$$\begin{aligned} x' &= \rho' \cos \varphi - \rho \sin \varphi; \\ y' &= \rho' \sin \varphi + \rho \cos \varphi. \end{aligned} \quad (2)$$

Угол между векторами радиус-вектора (1) и касательной (2) находим по известной формуле:

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{xx' + yy'}{\sqrt{(x^2 + y^2)(x'^2 + y'^2)}} = \\ &= \frac{\rho'}{\sqrt{\rho'^2 + \rho^2}} \end{aligned} \quad (3)$$

С учетом (3) можно окончательно записать выражение для момента силы P :

$$M = \frac{P\rho\rho'}{\sqrt{\rho'^2 + \rho^2}}. \quad (4)$$

Решить дифференциальное уравнение (4) при постоянных силе P и моменте M не удастся. Но при переходе от зависимости $\rho = \rho(\varphi)$ в уравнениях (1) к зависимости $\varphi = \varphi(\rho)$ решение существует. В таком случае дифференцирование уравнений (1) по переменной ρ дает вектор касательной в следующем виде:

$$\begin{aligned} x' &= \cos \varphi - \rho\varphi' \sin \varphi; \\ y' &= \sin \varphi + \rho\varphi' \cos \varphi. \end{aligned} \quad (5)$$

Соответственно выражения для косинуса угла и момента запишутся:

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \rho^2 \varphi'^2}}; \quad (6)$$

$$M = \frac{P\rho}{\sqrt{1 + \rho^2 \varphi'^2}}. \quad (7)$$

Уравнение (7) можно проинтегрировать и найти зависимость $\varphi = \varphi(\rho)$:

$$\begin{aligned} \varphi &= \sqrt{\frac{P^2}{M^2} \rho^2 - 1} + \\ &+ \text{Arcctg} \sqrt{\frac{P^2}{M^2} \rho^2 - 1} \end{aligned} \quad (8)$$

Полученную зависимость можно записать в более компактном виде, обозначив отношение постоянных одним символом: $a=M/P$. Чтобы исследовать полученную кривую, перейдем от независимой переменной ρ к натуральному параметру s – длине дуги кривой. Она находится интегрированием известного выражения, которое с учетом (5) принимает вид:

$$\begin{aligned} s &= \int \sqrt{x'^2 + y'^2} d\rho = \\ &= \int \sqrt{1 + \rho^2 \varphi'^2} d\rho \end{aligned} \quad (9)$$

Найдем производную выражения (8) и после ее подстановки в (9) интеграл приобретает очень простой вид:

$$s = \frac{1}{a} \int \rho d\rho = \frac{\rho^2}{2a}, \quad \rho = \sqrt{2as}. \quad (10)$$

Подстановкой второго выражения (10) в (8) найдем зависимость $\varphi = \varphi(s)$:

$$\varphi = \sqrt{\frac{2s}{a} - 1} + \text{Arcctg} \sqrt{\frac{2s}{a} - 1}. \quad (11)$$

Если подставить зависимость (10) $\rho = \rho(s)$ и (11) $\varphi = \varphi(s)$ в (1), то мы получим параметрические уравнения кривой в функции длины ее дуги s :

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{2as} \cos \cdot \\ &\cdot \left(\sqrt{\frac{2s}{a} - 1} + \text{Arcctg} \sqrt{\frac{2s}{a} - 1} \right); \\ y &= \sqrt{2as} \sin \cdot \\ &\cdot \left(\sqrt{\frac{2s}{a} - 1} + \text{Arcctg} \sqrt{\frac{2s}{a} - 1} \right). \end{aligned} \quad (12)$$

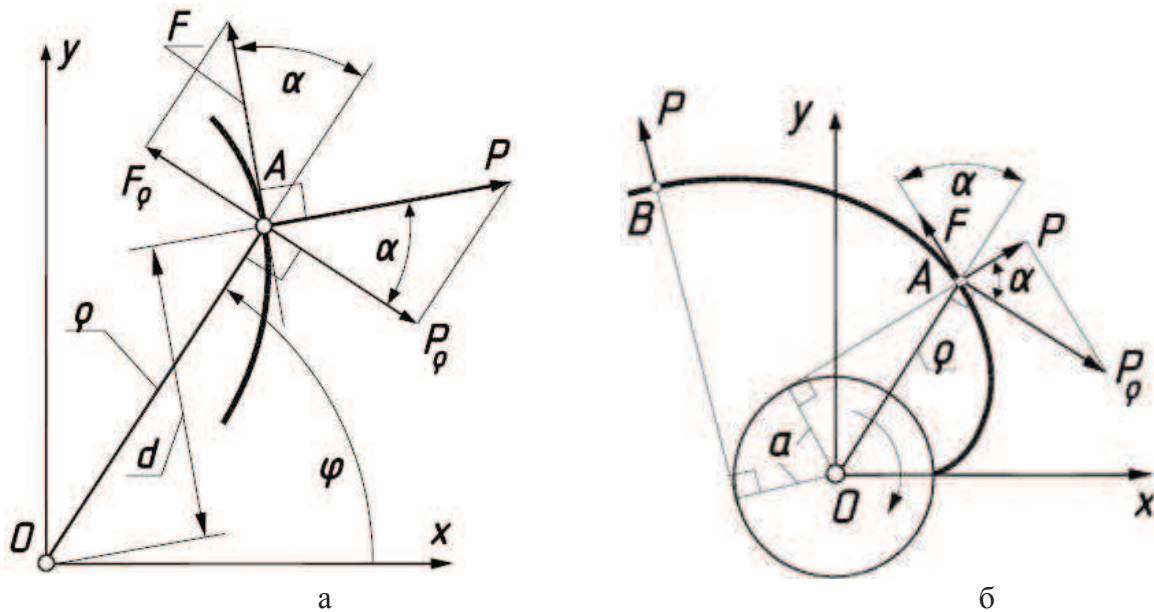


Рис. 2. Приложенные силы к профилю кулачка и их разложение:

Fig. 2. Attached forces to the type of fist and their decomposition:

- а) схема для нахождения моментов приложенных сил относительно начала координат;
 б) профиль кулачка, у которого нормальная составляющая приложенной силы создает момент постоянной величины.

Чтобы идентифицировать принадлежность полученной кривой (12) к известным кривым, найдем ее натуральное уравнение зависимости кривизны k от длины дуги s по известной формуле:

$$k = \sqrt{x''^2 + y''^2} = \frac{1}{\sqrt{2as - a^2}} \quad (13)$$

Уравнение (13) является натуральным уравнением известной кривой – эвольвенты окружности, для которой постоянная a играет роль радиуса начальной окружности (рис. 2,б). Приложенная по нормали в произвольной точке кривой сила постоянной величины P создает момент тоже постоянной величины, поскольку плечо a является радиусом начальной окружности и тоже есть величина постоянная. Введенное ранее сокращение $a=M/P$ имеет физический смысл, поскольку из него следует: $M=Pa$, что соответствует рис. 2,б. Это свойство может быть использовано, например, для проектирования режущей кромки ножа секатора. Если шарнирное соединение ножей секатора расположить в начале координат (точке O), то при сжатии ручек усилием человеческой руки создается момент $M=Pa=P\rho\rho$. Если в точке A расположить ветку, то будет происходить резание со скольжением, которое определяется

величиной угла α . Основное сопротивление перерезанию ветки создает нормальная сила P , а дополнительная сила F трения, расположенная по касательной к кривой, значительно меньше. Таким образом, усилие для перерезания ветки будет примерно одинаковым независимо от того, в какой точке лезвия она находится: A или B (рис. 2,б). Объясняется это тем, что по мере удаления точки от начала координат возрастает скольжение лезвия в силу изменения угла α .

Можно сконструировать кривую профиля кулачка с предыдущим условием, но с учетом силы трения стержня о кулачок. Сила трения F , которая определяется произведением силы давления на коэффициент трения f , для нашего случая будет равна: $F=fP$. Она действует вдоль касательной к кривой в сторону, противоположную направлению вращения кулачка (рис. 2). Она создает дополнительный момент относительно начала координат. Спроецируем ее на направление, перпендикулярное радиус-вектору ρ : $F_\rho = fP \sin \alpha$. Момент силы в зависимости от направления вращения с учетом (6) запишется:

$$M = \pm fP\rho \sin \alpha = \pm \frac{fP\rho^2\phi'}{\sqrt{1 + \rho^2\phi'^2}} \quad (14)$$

Сумма двух возникающих моментов (7) и (14) от действующей постоянной силы P равна постоянному уравнивающему моменту M :

$$\frac{P\rho}{\sqrt{1+\rho^2\varphi'^2}}(1\pm f\rho\varphi')=M. \quad (15)$$

Дифференциальное уравнение (15) не имеет аналитического решения, однако для частного случая при $M=0$ получаем:

$$\varphi = \frac{\ln \rho}{f} \quad \text{или} \quad \rho = e^{f\varphi}. \quad (16)$$

Полученное выражение (16) есть уравнением логарифмической спирали в полярной системе координат. Ее особенностью является то, что угол $\alpha = \text{const}$ постоянен по всей длине дуги. В полученном уравнении (16) коэффициент трения f связан с углом α соотношением $f = \text{ctg} \alpha$. Если изготовить кулачок, очерченный по логарифмической спирали с соответствующим значением угла α для заданного коэффициента трения f , то при приложении со стороны стержня постоянного усилия P произвольного значения его составляющие образуют два момента относительно полюса, равных по величине и противоположных по направлению, которые уравнивают друг друга. Кулачок может либо находиться в состоянии покоя, либо вращаться с заданной начальной угловой скоростью ω (при отсутствии других сил сопротивления). При $\alpha = 90^\circ$ спираль превращается в окружность и расстояние d (рис. 1,а) будет равно нулю. Но в этом случае должно соблюдаться условие $f=0$, то есть профиль кулачка должен быть абсолютно гладким и сила трения возникать не будет. Следовательно, оба момента равны нулю и заданные начальные условия соблюдаются.

Из свойства логарифмической спирали вытекает, что две спирали с разными значениями угла α при совмещении их полюсов будут пересекаться тоже под постоянным углом, равным разности углов каждой спирали. Эта разность не зависит от расстояния ρ , то есть при вращении одной спирали и при неподвижной второй точка их пересечения будет перемещаться, но угол между ними будет оставаться постоянным. Такой угол между касательными к кривым в точке их пересечения для режущей пары называется

углом защемления. Поставим задачу таким образом, чтобы для заданной исходной кривой в полярной системе координат можно было найти другую кривую, сохраняющую заданный угол защемления постоянным при вращении искомой кривой относительно неподвижной исходной кривой.

Поскольку угол защемления не должен зависеть от радиус-вектора ρ , то обе кривые целесообразно задавать уравнениями в полярной системе координат функцией вида $\varphi = \varphi(\rho)$: $\varphi_1 = \varphi_1(\rho)$ и $\varphi_2 = \varphi_2(\rho)$. Для обеих кривых угол α между кривой и ее радиус-вектором определяется выражением (6). В связи с этим можно записать разность углов $\alpha_2 - \alpha_1 = \alpha$:

$$\text{Arccos} \frac{1}{\sqrt{1+\rho^2\varphi_2'^2}} - \text{Arccos} \frac{1}{\sqrt{1+\rho^2\varphi_1'^2}} = \alpha \quad (17)$$

Преобразуя разность арккосинусов за известными формулами, получим следующее выражение:

$$\alpha = \text{Arccos} \frac{1+\rho^2\varphi_1'\varphi_2'}{\sqrt{(1+\rho^2\varphi_1'^2)(1+\rho^2\varphi_2'^2)}} \quad (18)$$

Считая зависимость $\varphi_1 = \varphi_1(\rho)$ и соответственно φ_1' заданной, решим уравнение относительно φ_2' . Мы получаем два выражения, поскольку исходную кривую могут пересекать две искомые кривые под заданным углом α (с одной и с другой стороны):

кривая 1

$$\frac{d\varphi_2}{d\rho} = \frac{\varphi_1'\rho \cos \alpha + \sin \alpha}{\rho \cos \alpha - \varphi_1'\rho^2 \cos \alpha} \quad (19)$$

кривая 2

$$\frac{d\varphi_2}{d\rho} = \frac{\varphi_1'\rho \cos \alpha - \sin \alpha}{\rho \cos \alpha + \varphi_1'\rho^2 \cos \alpha} \quad (20)$$

При $\varphi_1 = c - \text{const}$, $\varphi_1' = 0$ (прямая линия) интегрирование уравнений (19), (20) дает решение $\rho = e^{\pm \varphi \text{ctg} \alpha}$, что соответствует двум логарифмическим спиральям правого и левого хода. Если $\alpha = 45^\circ$, то эти спирали будут пересекаться под прямым углом.

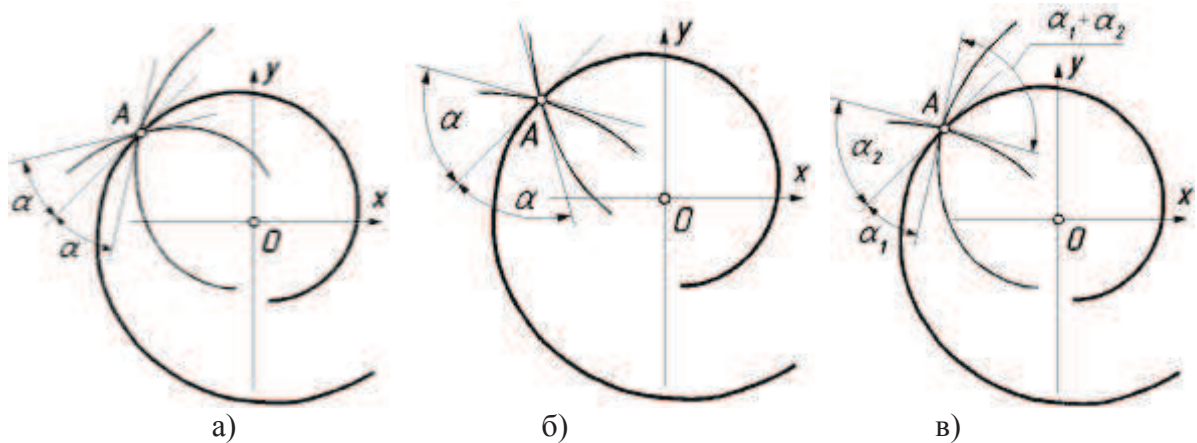


Рис. 3. Кривые, пересекающие исходную спираль Архимеда $\varphi_1 = a\rho$ при $a=2\theta$ под заданным углом α :

Fig. 3. Curves, crossing the initial spiral of Archimedes $\varphi_1 = a\rho$ at $a=2\theta$ under the set corner α :
 а) $\alpha=30^\circ$; б) $\alpha=60^\circ$; в) $\alpha_1=30^\circ$ и $\alpha_2=60^\circ$.

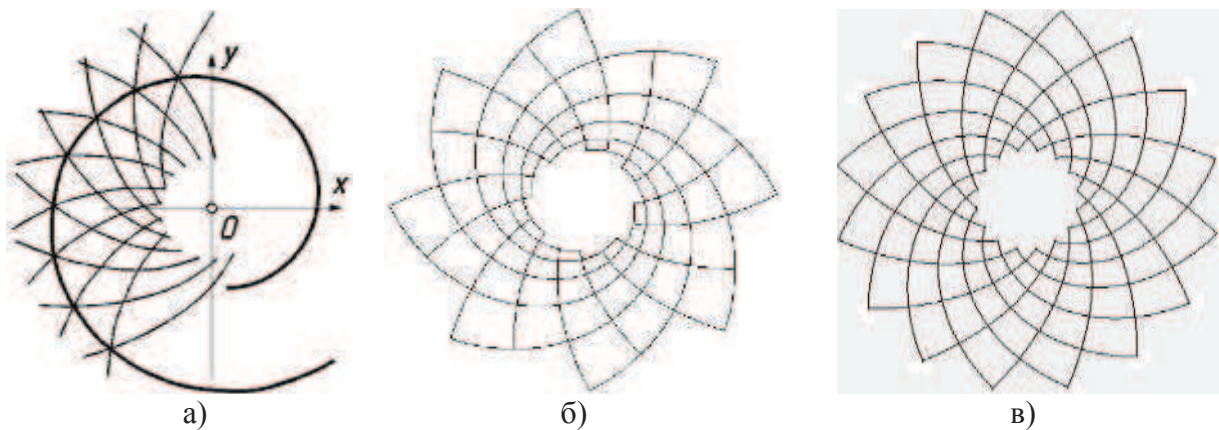


Рис. 4. Криволинейные сети с равными углами взаимного пересечения кривых при их вращении:

Fig. 4. Curvilinear networks with the equal corners of the mutual crossing of curves at their rotation:

- а) противоположные углы криволинейного четырехугольника равны;
 б), в) все углы равны, сеть прямоугольная.

Рассмотрим задачу построения таких кривых для спирали Архимеда, заданной зависимостью $\varphi_1 = a\rho$. Подставляя в (19) и (20) $\varphi_1' = a$, получим два выражения, интегрирование которых дает:

кривая 1

$$\varphi_2 = \ln \rho \operatorname{tg} \alpha - \frac{\ln(a\rho \sin \alpha - \cos \alpha)}{\sin \alpha \cos \alpha} \quad (21)$$

кривая 2

$$\varphi_2 = -\ln \rho \operatorname{tg} \alpha + \frac{\ln(a\rho \sin \alpha + \cos \alpha)}{\sin \alpha \cos \alpha} \quad (22)$$

Зависимостям $\varphi_2 = \varphi_2(\rho)$ (21), (22) соответствуют две кривые, пересекающие исходную спираль Архимеда под заданным углом α . На рис. 3 построены кривые, пересекающие спираль Архимеда в точке A для разных заданных углов α .

Кривые, пересекающие исходную спираль под постоянным углом, между собой тоже образуют постоянный угол, который есть суммой заданных. Например, на рис. 3,а построенные кривые образуют между собой угол 60° , на рис. 3,б - 120° , а на рис. 3,в - прямой. При вращении этих кривых относительно начала координат углы пересечения изменяться не будут и таким образом полу-

чается некоторая сеть, криволинейный четырехугольник которой имеет равные противоположные углы (рис. 4). В частности, все углы могут быть равными, когда они прямые. На рис. 4,б прямоугольная сеть образована при $\alpha_1=30^\circ$ и $\alpha_2=60^\circ$, а на рис. 4,в – при $\alpha_1=60^\circ$ и $\alpha_2=30^\circ$.

ВЫВОД

Если к кулачку приложена сила нажатия стержня вдоль нормали его профиля постоянной величины, то для вращения кулачка необходимо приложить крутящий момент. При условии, что этот момент должен быть постоянным и не зависеть от угла поворота при отсутствии трения стержня о кулачок, последний должен быть очерчен по эвольвенте окружности. Величина момента определяется произведением силы на радиус начальной окружности эвольвенты. При дополнительном условии учета силы трения кривую профиля кулачка можно найти, когда момент равен нулю, то есть момент от приложенной силы уравновешивается моментом от силы трения. Такой кривой является логарифмическая спираль, угол пересечения которой с радиус-вектором определяется значением коэффициента трения. Получены также другие кривые, угол пересечения которых является постоянным при вращении одной относительно второй вокруг начала координат.

ЛИТЕРАТУРА

1. Adamchuk V.V. 2003: Teoretichne doslidzhennya rozgonu mineralnikh dobriv rozsiyuvalnim organom / V.A. Adamchuk // Mekhanizatsiya i yenergetika silskogo gospodarstva. IV Mizhnarodna naukovo-tekhnichna konferentsiya MOTROL–2003. – K.: NAU. – Tom 6. – 113 – 126.
2. Bosov A.A., Laguta V.V. 1988: Ratsionalnyye perekhodnyye krivyeye zhelezodorozhnogo transporta // Matematicheskoye modelirovaniye v zadachakh zhelezodorozhnogo transporta: Mezhev. sb. nauchn. tr. DIIT. – Dnepropetrovsk. – 4 – 11.
3. Bulgakov V.M. 2010: Teoriya dvizheniya chastitsy v tsentrobezhnom vysevyayushchem apparate / V.M. Bulgakov, S.F. Pilipaka V.

- Pristupa // MOTROL. Motoryzacja i energetyka rolnictwa. – Tom 12. Lublin. – 122 – 131.
4. Vasilenko P.M. 1960: Teoriya dvizheniya chastitsy po sherokhovatykh poverkhnostyam selskokhozyaystvennykh mashin / P.M. Vasilenko. – Kiyev: Izd-vo Ukr. akad. selsk. nauk. – 283.
5. Voytyuk D.G. 1999: Do viznachennya traektoriy rukhu chastinok gruntu po tsilindrichnikh poverkhnnyakh robochikh organiv gruntoobrobnykh znaryad / D.G. Voytyuk, S.F. Pilipaka // Zbirnik naukovikh prats Natsionalnogo agrarnogo universitetu «Mekhanizatsiya silskogospodarskogo virobnitstva». – Tom 5. «Suchasni problemi mekhanizatsii silskogo gospodarstva». – K.: NAU. – 242 – 251.
6. Voytyuk D.G. 2003: Znakhodzhennya traektorii rukhu materialnoi tochki po gravitatsiyaniy rozgortniy poverkhni na prikladi rozgortnogo gelikoida / D.G. Voytyuk, S.F. Pilipaka // Mekhanizatsiya i yenergetika silskogo gospodarstva. IV Mizhnarodna naukovo-tekhnichna konferentsiya MOTROL–2003. – K.: NAU. – Tom 6. – 113 – 126.
7. Voytyuk D.G. 2002: Znakhodzhennya traektorii rukhu materialnoi chastinki po gravitatsiyaniy liniy chatikh poverkhnnyakh iz gorizontalnimi tvirnimi / D.G. Voytyuk, S.F. Pilipaka // Zbirnik naukovikh prats NAU «Mekhanizatsiya silskogospodarskogo virobnitstva». – T.12. – K.: NAU. – 58 – 69.
8. Voytyuk D.G. 2003: Znakhodzhennya traektoriy rukhu materialnoi chastinki po vnutrishniy poverkhni vertikalnogo tsilindra pri bokoviy podachi materialu / D.G. Voytyuk, S.F. Pilipaka // Visnik Kharkivskogo derzhavnogo tekhnichnogo universitetu silskogo gospodarstva. – Vip. 20. «Mekhanizatsiya silskogo gospodarstva». – Kharkiv. – 91 – 99.
9. Voytyuk D.G. 2002: Konstruyuvannya liniy chatoi poverkhni za rozrakhunkovoyu traektoriyu rukhu materialnoi chastinki po niy / D.G. Voytyuk, S.F. Pilipaka // Naukoviy visnik Natsionalnogo agrarnogo universitetu. – K.: – Vip. 49. – 68 – 74.
10. Voytyuk D.G. 2001: Konstruyuvannya prostorovoi krivoi linii iz zadanoyu krivinoyu, yak trayektorii rukhu materialnoi tochki / D.G. Voytyuk, S.F. Pilipaka // Zbirnik naukovikh prats NAU «Mekhanizatsiya

КОНСТРУИРОВАНИЕ ПЛОСКИХ КРИВЫХ В ПОЛЯРНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ ЗА ЗАДАНЫМИ СВОЙСТВАМИ ПРИ ВРАЩЕНИИ ИХ ВОКРУГ ПОЛЮСА

- silskogospodarskogo virobnitstva». – Т. 10. – К.: НАУ. – 74 – 78.
11. Voytyuk D.G. 2003: Pobudova geodezichnikh liniy, yak granichnikh trayektoriy rukhu materialnikh chastinok po poverkhni / D.G. Voytyuk, S.F. Pilipaka // Naukoviy visnik Natsionalnogo agrarnogo universitetu. – К.: НАУ. – Vip. 60. – 138 – 141.
12. Linnik M.K. 2006: Doslidzhennya rukhu materialnoi chastinki po vnutrishniy poverkhni statsionarnogo tsilindra / M.K. Linnik, S.F. Pilipaka // Visnik agrarnoi nauki. – К. № 2. – 48 – 54.
13. Pilipaka S.F. 2003: Doslidzhennya geodezichnikh liniy na poverkhni gvintovogo konoida / S.F. Pilipaka, T.V. Gnitetska // Suchasni problemi geometrichnogo modelyuvannya. Materiali mizhnarodnoi naukovo-praktichnoi konferentsii. – Lviv: Natsionalniy universitet «Lvivska politehnika». – 77 – 80.
14. Pilipaka S.F. 2010: Doslidzhennya rukhu chastinki po vnutrishniy poverkhni pokhilogo tsilindra, shcho obertaeytsya navkolo vlasnoi osi / S.F. Pilipaka, I.Yu. Grishchenko, T.S. Pilipaka // MOTROL. Motoryzacja i energetyka rolnictwa. – Tom 12B. Lublin. – 115 – 120.
15. Pilipaka S.F. 2004: Modelyuvannya liniy naybilshogo nakhilu poverkhni polya dlya sistemi tochnogo zemlerobstva / S.F. Pilipaka, M.S. Volyanskiy, I.Yu. Khimenko // Pratsi Tavriyskoi derzhavnoi agrotekhnichnoi akademii. – Vip. 4. Prikl. geometriya ta inzh. grafika. – Tom 23. – Melitopol: TDATA. – 23 – 28.
16. Pilipaka S.F. 2011: Pobudova geodezichnikh liniy na poverkhni giperbolichnogo paraboloida / S.F. Pilipaka, Ya.S. Kremets // Pratsi Tavriyskogo derzhavnogo agrotekhnologichnogo universitetu. – Vip. 4. Prikl. geometriya ta inzh. grafika. – Tom 49. – Melitopol: TDATU. – 62 – 69.
17. Pilipaka S.F. 1990: Postroyeniye liniy otkosa na telakh vrashcheniya / S.F. Pilipaka // Prikl. geometriya i inzh. grafika. – К.: Budivelnik. – Vyp. 50. – 88 – 89.
18. Pilipaka S.F. 2007: Pruzhne zginannya sterzhniv pri znachnikh ikh proginakh / S.F. Pilipaka, V.M. Nesvidomin, T.S. Pilipaka // Yelektrotehnika i mekhanika. – К. – № 1. – 43 – 51.
19. Pilipaka S.F. 2010: Teoretichne viznachennya krivoi pererizu tsilindrichnoi vidbivayuchoi poverkhni deki lushchilnoi mashini / S.F. Pilipaka, V.M. Babka // MOTROL. Motoryzacja i energetyka rolnictwa. – Tom 12B. Lublin. – 102 – 108.
20. Pilipaka T.S. 2011: Osoblivosti geodezichnikh liniy na poverkhnyakh obertannya / T.S. Pilipaka, V.M. Babka, Ya.S. Kremets // Kompyuterno-integrovani tekhnologii: osvita, nauka, virobnitstvo. Naukoviy zhurnal. – Lutsk: LNTU. – № 6. – 182 – 185.
21. Savelov A.A. 1960: Ploskiye krivyye. Sistematika, svoystva, primeneniya / A.A. Savelov. – М.: FIZMATGIZ. – 292.
22. Frolov K. V., Popov S. A., Musatov A. K., Timofeyev G. A., Nikonorov V. A. 2002: Teoriya mekhanizmov i mekhanika mashin / Kolesnikov K. S. – Izdaniye chetvertoye, ispravlennoye i dopolnennoye. – М.: Izdatelstvo MGTU im. N.E. Bauman. – Т. 5. – 664.
23. Shikin Ye.V. 1997: Krivyye na ploskosti i v prostranstve. Spravochnik s prilozheniyem diskety «Ploskiye krivyye» / Ye.V. Shikin, M.M. Frank-Kamenetskiy. – М.: FAZIS. – 336.
24. Shmidt M.P., Shmidt A.M. 2005: Ravnovesiye gibkoy nerastyazhimoy podveshennoy niti // Fizika: problemi vkladannya. – № 1. – 23 – 25.
25. Pylypaka S.F. 2002: Motion of a mass point on a helical ruled surface / S.F. Pylypaka // Proceedings of the 10th international conference on geometry and graphics. – Kyiv. – Volume 1. – 53 – 55.

CONSTRUCTING OF FLAT CURVES IN POLAR SYSTEM OF COORDINATES ACCORDING TO SET PROPERTIES AT ROTATION AROUND THEM POLE

Summary. Analytical description of curves in polar coordinates according to set properties of mechanical (constancy of twisting moment, created by permanent force of pressure of bar along normal on fist, outlined by found curve) and geometrical character (constancy of corner of crossing of set curve with founded after rotation last round pole) is resulted.

Key words: polar system of coordinates, flat curve, moment of force, twisting a moment.