INZ. TADEUSZ KOLASIŃSKI

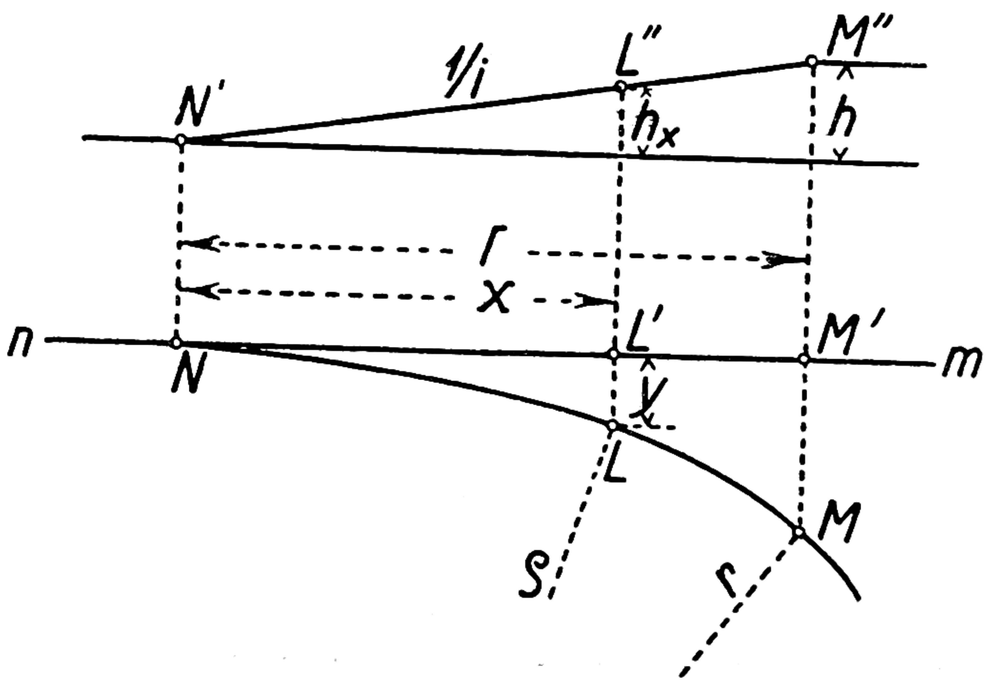
# Zastosowanie krzywych przejściowych w kolejkach leśnych.

*Die Anwendung von Übergangskurven bei den Waldbahnen.*

(Dokończenie).

## Sposób pierwszy.

Mając wyznaczony punkt styczności $A$ i wierzchołek łuku $D$, przesuwamy te punkty wraz ze środkiem łuku $O$ wzdłuż symetralnej kąta $\beta$ równolegle o wielkość $f$ tak, że dostaniemy punkty łuku: $O_1$, $A_1$ i $D_1$. Krzywa przejściowa włączona będzie do łuku w punkcie $M$ o promieniu $r$ i biec będzie od punktu $M$ do punktu $N$ na stycznej, wedle promienia $\varrho$ rosnącego od wartości $r$ do nieskończoności.



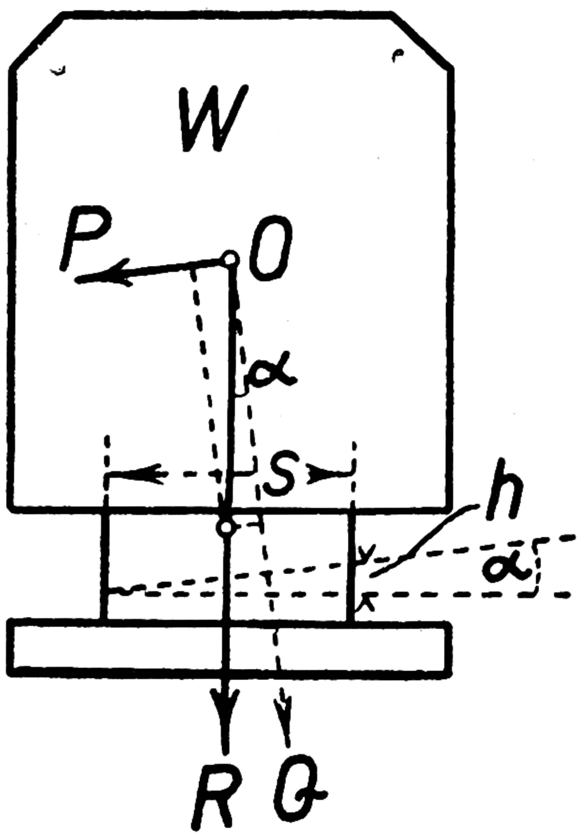

Rys. 1.

Zadaniem trasującego będzie wyznaczenie na terenie punktu $N$ jako początku krzywej, końca jej czyli punktu $M$ oraz punktów pośrednich krzywej przejściowej — wreszcie punktów pośrednich łuku od $M$ w kierunku $D_1$. Dla wyprowadzenia równania krzywej przejściowej wychodzimy z następujących dwóch założeń, które ona ma spełniać. 1) W każdym punkcie bieżącym krzywej $L$ wielkość przechyłki toru $h_x$ ma być odwrotnie proporcjonalna do wielkości promienia $\varrho$ krzywej w danym punkcie czyli $h_x = \frac{s \cdot v^2}{g \cdot \varrho}$ (Rys. 1).

2) Stosunek przechyłki toru $h_x$ do odciętej $x$ mierzonej od początku krzywej $N$ ma być w każdym punkcie bieżącym krzywej równy spadkowi jednostajnemu oznaczonemu $1 : i$, gdzie $i$ przyjęliśmy dla kolejki leśnej równe 300 — więc

$$\frac{h_x}{x} = \frac{1}{i}, \qquad h_x = \frac{x}{i}.$$

Jeżeli porównamy oba powyższe równania ze względu na $h_x$ dostaniemy $\frac{x}{i} = \frac{s.v^2}{g.\varrho}$, skąd $\varrho = \frac{i.s.v^2}{g} \cdot \frac{1}{x}$. Wartość $\frac{i.s.v^2}{g}$ dla danej kolejki o prześwicie $s$, przyjętego $i$ oraz prędkości $v$, jest wielkością stałą, którą oznaczamy literą $C$, zatem $\frac{i.s.v^2}{g} = C$, $\varrho = \frac{C}{x}$. Każdy




Rys. 2.

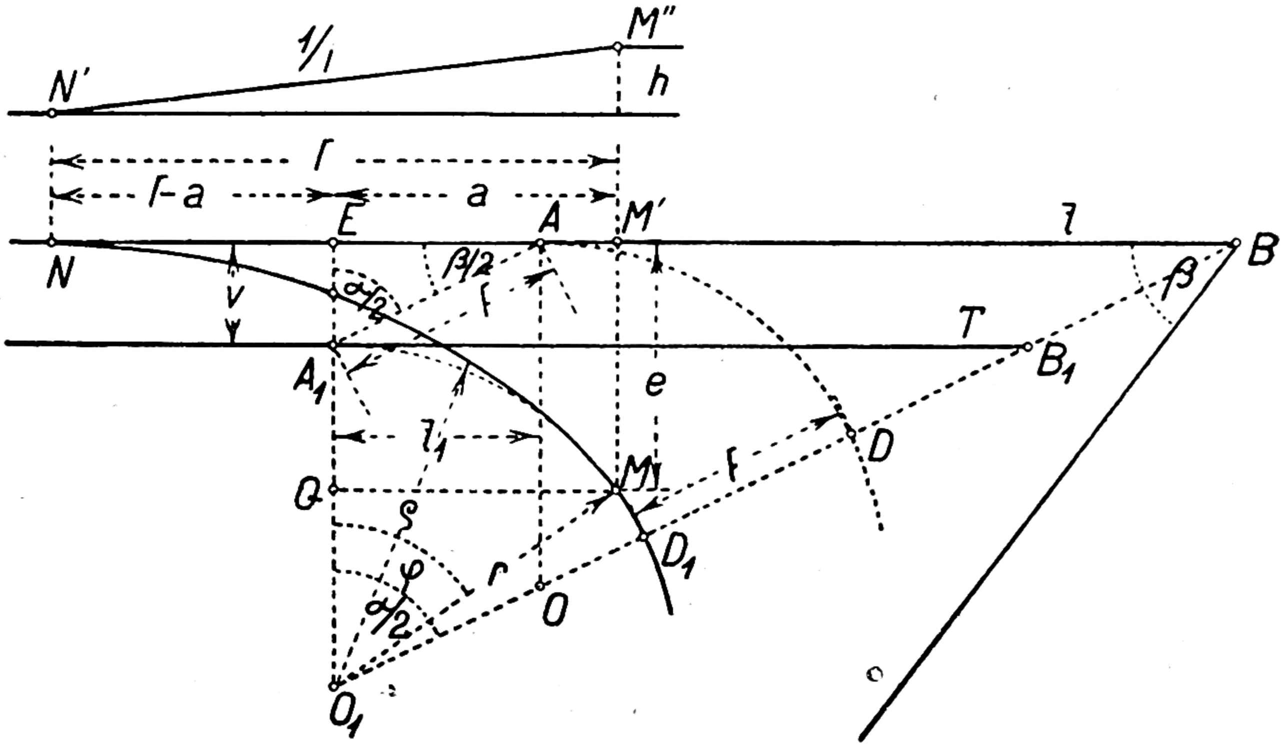
punkt bieżący $L$ po krzywej $N—M$ (rys. 1) będzie określony trzema współrzędnemi prostokątnemi: $y$, $x$ i $h_x$. W ten sposób określona krzywa będzie krzywą przestrzenną, której rzut poziomy $N—M$ będzie przedstawiony następującem ogólnem równaniem różniczkowem krzywej dla $\varrho$ zmiennego od $\infty$ do wartości $r$. $\varrho = \frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$.

W zastosowaniu do krzywej przejściowej $\frac{dy}{dx}$ oznacza tangens kąta nachylenia stycznej do osi $x$ w dowolnym punkcie krzywej. Graniczna, maksymalna nawet wartość tego kąta w punkcie $M$ jest niewielka i wynosi około $5^0$. Zatem wielkość $\frac{dy}{dx} < 1$ podniesiona do drugiej potęgi jest stosunkowo małą, którą tutaj możemy pominąć. Wzór będzie miał zatem postać:

$$\varrho = \frac{1}{\frac{d^2y}{dx^2}} \quad \text{ponieważ} \quad \varrho = \frac{C}{x} \quad \text{więc} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x}{C}.$$

Całkując to równanie dostaniemy:

$$\int \frac{x}{C}\, dx^2 = \frac{x^2}{2C} = \frac{dy}{dx},$$




Rys. 3.

jeszcze raz całkując, otrzymamy:

$$\int \frac{x^2}{2C}\, dx = \frac{x^3}{3.2C} = \frac{x^3}{6C}.$$

Stałą całkowania pomijamy, ponieważ dla $x = 0$, $\frac{dy}{dx} = 0$. W ten sposób otrzymamy równanie krzywej przejściowej w formie $y = \frac{x^3}{6C}$. W punkcie końcowym krzywej $M$ (rys. 3) rzędna $y = e$ będzie się równać $e = \frac{l^3}{6C}$, gdyż w punkcie $M$, $x = l$. Jeżeli we wzorze $\varrho = \frac{C}{x}$ wstawimy graniczną wartość zamiast $\varrho$ — $r$, a zamiast $x$ — $l$, otrzymamy, że $l = \frac{C}{r}$. Następnie obliczymy wymiar $EM' = a$ $a = r.\sin\varphi$, dla promieni większych od 100 $m$ można użyć wzoru przybliżonego $a = \frac{2}{l}$; kąt $\varphi$ dostaniemy z rozwinięcia wyrażenia $\frac{x^2}{2C} = \frac{dy}{dx} =$ $\operatorname{tg}\varphi =$ tangensowi kąta nachylenia stycznej w punkcie $M$ do osi $x$-ów. „Zatem $\operatorname{tg}\varphi = \frac{l^2}{2C}$, ponieważ $e = \frac{l^3}{6C}$, stąd $C = \frac{l^3}{6e}$. "

Zatem $\operatorname{tg}\varphi = \frac{6el^2}{2l^3} = \frac{3e}{l}$, $\operatorname{tg}\varphi = \frac{3e}{l}$. Obliczymy teraz wielkość przesunięcia stycznej $N—B$, czyli wielkość $v$; $v = e - A_1 Q$, $A_1 Q$ jako strzałka płaskiego łuku, równa się $A_1 Q = \frac{a^2}{2r}$, a więc $v = e - \frac{a^2}{2r}$,

$e = \frac{l^2}{6r}$, zaś $a = \frac{l}{2}$, po wstawieniu otrzymamy:

$v = \frac{l^2}{6r} - \frac{l^2}{8r} = \frac{4l^2}{24r} - \frac{3l^2}{24r} = \frac{l^2}{24r}$, ponieważ $l^2 = 6.e.r$, to

$$v = \frac{6er}{24r} = \frac{e}{4}.$$

W końcu pozostaje do obliczenia wielkość przesunięcia punktu styczności $A$ i punktu $D$ o wielkość $f$. Z trójkąta $E A A_1$

$$f = v.\sec\frac{\alpha}{2},$$

rzut długości $f$ ma styczną $t$:

$t_1 = v.\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ oraz rzędna krzywej w połowie długości $l$, czyli dla łuków o promieniu większym od 100 $m$ w punkcie $E$.

$$y^{l}/_{2} = \frac{l^3}{8.6C} = \frac{l^3}{48l.r} = \frac{l^2}{48r} = \frac{6e.r}{48r} = \frac{e}{8} = \frac{v}{2}.$$

Według przepisów Min. Komunikacji dla kolejek wąskotorowych należy przyjmować $i = 300$. W tym wypadku jednak dostaniemy długość krzywej przejściowej stosunkowo dość dużą, która nastręcza wiele trudności w trasowaniu zwłaszcza w terenie górskim, gdzie często zachodzi potrzeba stosowania łuków odwrotnych. W takim razie korzystnem byłoby przyjęcie $i = 200$, co w rezultacie skróci wydatnie długość krzywej przejściowej, a z powodu mniejszej szybkości pociągu w krętych partjach trasy nie wpłynie ujemnie ani na bezpieczeństwo ruchu, ani na trwałość taboru i nawierzchni. Poniżej podane są dwa przykłady obliczenia elementów krzywej; pierwszy przykład dla $i = 200$, drugi przykład $i = 300$ z zastosowaniem tabel prof. Skibińskiego.

Przykład obliczenia: dane: $r = 40\,m$, $s = 0{,}76\,m$, $v = 15\,km/godz$, kąt wierzchołkowy $\beta = 71^0 44'$. Obliczam kąt $\alpha = 180 - \beta = 108^0 16'$, $\frac{\alpha}{2} = 54^0 8'$. Styczna $AB = r.\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = 55.1.383139$.

$AB = 69.16\ m$. Długość tę odmierzam od punktu $B$ i otrzymuję punkt $A$ (rys. 3).

Obliczamy teraz dalsze elementy krzywej przejściowej $C = \frac{s.v^2.i}{g}$,

$$C = \frac{0{\cdot}76.4{\cdot}17^2.200}{9{\cdot}81} = \frac{0{\cdot}76\ 17{\cdot}39.300}{9{\cdot}81} = \frac{2643{\cdot}28}{9{\cdot}81} \cong 270, \qquad C = 270,$$

$$l = \frac{C}{r} = \frac{270}{40} = 6{\cdot}75\ m, \qquad e = \frac{l^3}{6C} = \frac{307{\cdot}55}{1620} = 0{\cdot}19\ m,$$

$$v = \frac{e}{4} = 0{\cdot}05, \qquad t_1 = v \,.\, \mathrm{tg}\, \frac{\alpha}{2} = 0{\cdot}05 \,.\, 1{\cdot}383139 = 0{\cdot}07\ m,$$

$$a = r \,.\, \sin \varphi, \qquad \mathrm{tg}\, \varphi = \frac{3\,e}{l},$$

$$\log\, \mathrm{tg}\, \varphi = \log\, 3\,e - \log\, l$$

$$\left.\begin{array}{r} \log\, 3\,e = 1{\cdot}75587 - 2 \\ \log\, l = 0{\cdot}82930 \end{array}\right| -$$

$$\log\, \mathrm{tg}\, \varphi = 8{\cdot}92657 - 10$$

$$\varphi = 4^0 49'\, 37''$$

$$a = r \,.\, \sin \varphi$$

$$a = 40 \,.\, \sin\, 4^0 49'\, 37''$$

$$\log\, a = \log\, 40 + \log \sin\, 4^0 49'\, 37''$$

$$\left.\begin{array}{r} \log\, 40 = 1{\cdot}60206 \\ \log\, \sin\, 4^0 49'\, 37'' = 8{\cdot}92503 - 10 \end{array}\right| +$$

$$\log\, a = 10{\cdot}52709 - 10$$

$$a = 3{\cdot}366\ m.$$

$$l - a = 6{\cdot}75 - 3{\cdot}366 = 3{\cdot}384\ m \qquad y^{l}/_{2} = \frac{v}{2} = 0{\cdot}025\ m.$$

$$f = v \,.\, \sec \frac{\alpha}{2} = 0{\cdot}05 \,.\, 1{\cdot}706773$$

$$f = 0{\cdot}085\ m$$

Mając dany punkt $A$ odmierzamy w kierunku punktu $N$ długość $t_1 = 0{\cdot}07\ m$ i dostajemy punkt $E$. Od punktu $E$ odmierzamy w kierunku punktu $B$ długość $a = 3{\cdot}366\ m$ i otrzymujemy punkt $M'$. Od tego punktu tyczymy prostopadłą o długości $e = 0{\cdot}19\ m$ i otrzymujemy końcowy punkt krzywej $M$. Początkowy punkt krzywej $N$ dostaniemy przez odmierzenie od punktu $E$ długości $l - a = 3{\cdot}384\ m$. Wreszcie środkowy punkt krzywej dostaniemy gdy na długości $^{l}/_{2}$ odmierzymy prostopadle rzędną $y^{l}/_{2} = 0{\cdot}025$.

Dla otrzymania punktów pośrednich posługujemy się wzorem:

$$y = \frac{x^3}{6\,C}$$

Celem wytyczenia łuku koła wyznaczamy styczną pomocniczą $T$ przez odmierzenie wartości $v$ prostopadle od punktu $E$. W otrzymanym w ten sposób przesuniętym punkcie styczności $A_1$ oznaczamy kierunek stycznej $T$ i od niej tyczymy rzędne łuku koła o promieniu $r$ od punktu $M$ począwszy.

W tabeli VI. Skibińskiego „Tyczenie tras“ mamy dla danej długości promienia $r$, szybkości pociągu i prześwitu toru, podane gotowe wartości elementów krzywej przejściowej. Np. dla kolejki $0{\cdot}76\ m$ prześwitu, szybkości $v = 20\ km/godz$ i promienia $r = 40$ otrzymamy ze str. 223:

$$C = 750$$
$$x = l = 18{\cdot}750, \quad y = e = 1{\cdot}465$$
$$a = 9{\cdot}127 \qquad \varphi = 13^0\,11'\,26''$$

Resztę elementów obliczymy:

$$v = \frac{e}{4} = \frac{1{\cdot}465}{4} = 0{\cdot}366\ m.$$
$$t = v\,.\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = 0{\cdot}366\,.\,1{\cdot}732 = 0{\cdot}634\ m.$$
$$f = v\,.\sec\frac{\alpha}{2} = 0{\cdot}366\,.\,2 = 0{\cdot}732\ m.$$

Punkty pośrednie krzywej odczytamy również w tej samej tabeli dla *r* rosnącego od 40 *m* w górę.

| $x$ | 5·0 | 7·5 | 10 | 12·5 | 15 | 18·750 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0·028 | 0·094 | 0·222 | 0·434 | 0·75 | 1 465 |

albo obliczamy ze wzoru $y = \frac{x^3}{6C}$.

## Sposób drugi.

Sposób tyczenia krzywej przejściowej na torze już istniejącym, a nie uwzględniającym tej krzywej.

Zasada tego sposobu polega na tem, że nie przesuwamy środka łuku ani punktu styczności, lecz łuk o promieniu $r$ łączymy z prostą zapomocą łuku o promieniu $r_1$ mniejszym od $r$ przy pomocy krzywej przejściowej. Sposób ten mamy uwidoczniony na rys. 4.

Prosta $NH'$ łączy się z łukiem $A—H$ w punkcie styczności $A$. Połączenie zmieniamy w ten sposób, że przesuwamy tor w kierunku środka łuku, wyznaczając początek krzywej przejściowej w punkcie $N$ i koniec w punkcie $M$. Łuk $H—K$ o promieniu $r$ łączymy z krzywą $N—M$ przy pomocy łuku o promieniu $r_1$, przyczem $r_1 < r$.

Przesunięcie toru będzie zatem uskutecznione na długości $N—M'$ i $M'—H'$, a przesunięty tor zmieści się na istniejącym podtorzu bez potrzeby dodatkowych robót ziemnych. Elementy krzywej przejściowej t. j. wymiary: $v$, $l$, $l—a$, $a$ i $e$ obliczamy ze wzorów podanych w poprzednim rozdziale i w ten sam sposób wyznaczamy krzywą przejściową. Pozostaje nam tutaj obliczyć współrzędne punktu $H$ jako początku łuku o promieniu danym $r$, a więc wymiary $c$ i $h$, oraz wymiar $b$ potrzebny do oznaczenia wszystkich punktów mierzonych od punktu styczności $A$.

Z trójkąta $OO'O_1$ dostaniemy, że

$$b = \sqrt{(r-r_1)^2-(r-r_1-v)^2} = \sqrt{r^2-2rr_1+r_1{}^2-r^2-r_1{}^2-v^2+2rr_1+2rv+2r_1v}$$
$$b = \sqrt{2v(r-r_1)-v^2}.$$

Długość $b$ odmierzamy od punktu $A$ w kierunku $H'$ i otrzymujemy punkt $J'$. Mając ten punkt wyznaczymy łatwo krzywą przejściową $N—M$. Do wyznaczenia punktu $H'$ obliczamy długość $c$ z proporcji:

$$c : b = r : (r - r_1)$$

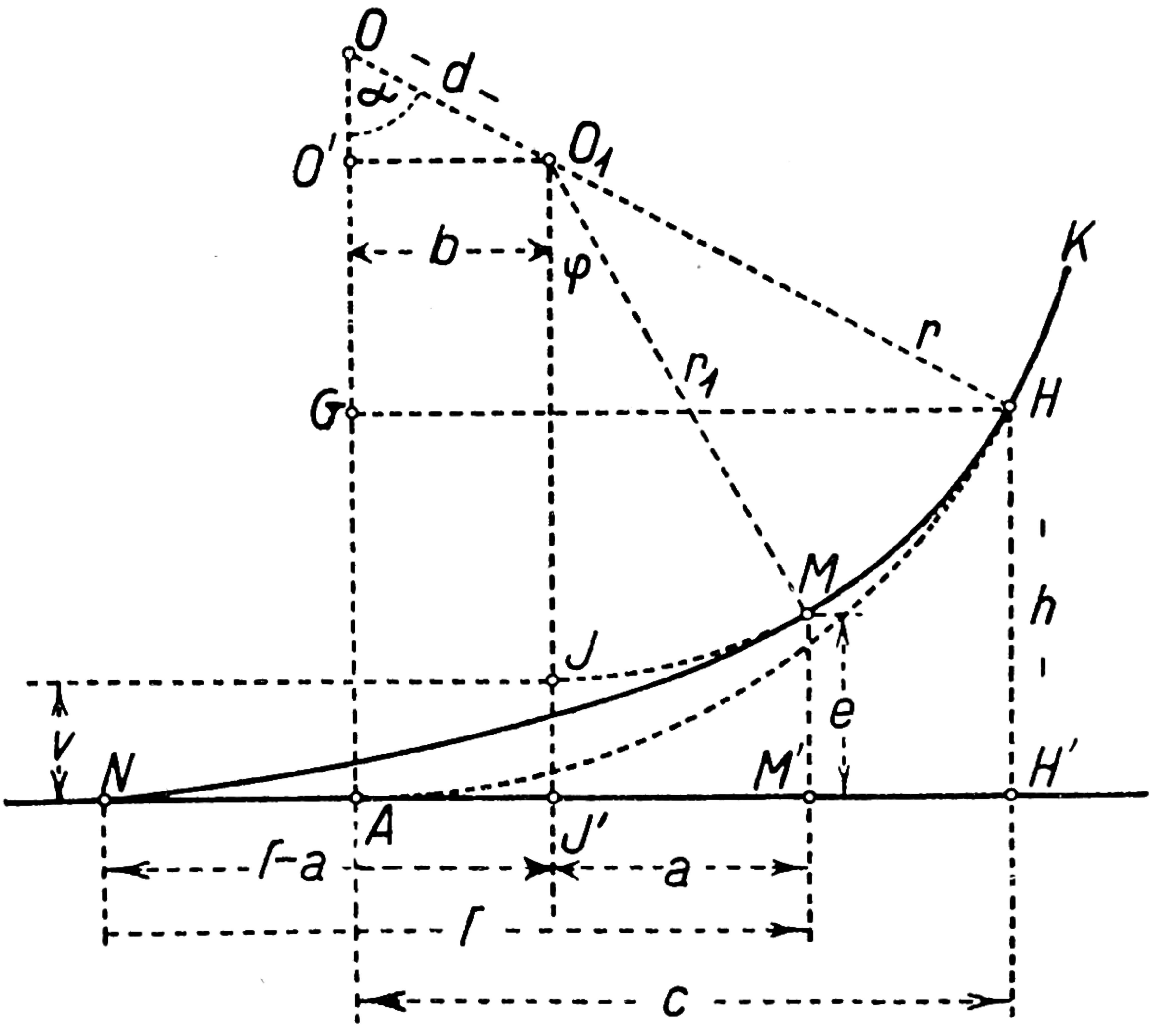
$$c = \frac{b \cdot r}{r - r_1}$$

$$c = \frac{b \cdot r}{d}$$

długość $h = OA - OG$

$$= r - OG$$

$OG$ obliczymy z proporcji: $OG : OA = OO' : OO_1$




Rys. 4.

inaczej $$OG : r = (r - r_1 - v) : (r - r_1)$$

$$OG = \frac{r(r - r_1 - v)}{r - r_1},$$

czyli $$h = r - \frac{r^2 - rr_1 - rv}{r - r_1}$$

$$h = \frac{r^2 - rr_1 - r^2 + rr_1 + r \cdot v}{r - r_1} \qquad h = \frac{rv}{r - r_1}$$

Całkowite przesunięcie toru nastąpi na długości $N—H' = (l \quad a) - b + c$. Ponieważ w punkcie $H$ stykają się ze sobą dwa łuki o różnych promieniach, co mogłoby wpływać ujemnie na wóz i tor w czasie ruchu pojazdu w tem miejscu — dlatego celem uniknięcia pewnych zaburzeń w ruchu przyjmujemy w praktyce skrócenie promienia $d$ stosunkowo niewielkie tak, że $d = \frac{r}{20}$. Dla tego sposobu tyczenia krzywej przejściowej ułożył prof. Skibiński tabelę, gdzie dla $C = 1200$ i dla danego promienia $r$ znajdujemy obliczone już i podane w tabeli IX potrzebne do tego celu wymiary.

I tak np. dla promienia $r = 300\,m$ znajdujemy w tabeli, że $b = 2{\cdot}776\,m$. Tę wartość odmierzamy od punktu styczności $A$ i dostajemy punkt $J'$, $l = 42{\cdot}105\,m$, $a = 20{\cdot}993$, $l—a = 22{\cdot}112\,m$. Tę wartość odmierzamy od punktu $J'$ i dostajemy punkt $N$ jako początek krzywej, koniec zaś $M'$ — przez odmierzenie długości $a = 20{\cdot}993\,m$. Z punktu $M'$ odmierzamy rzędną $e = 1{\cdot}037\,m$ i otrzymujemy koniec krzywej $M$. Odmierzamy $c = 55{\cdot}528\,m$ od punktu $A$, dostajemy punkt $H'$, a przez prostopadłe wytyczenie z tego punktu długości $h = 5{\cdot}184\,m$, dochodzimy do końcowego punktu przesunięcia toru $H$. Współrzędne punktów pośrednich krzywej obliczymy ze wzoru $y = \frac{x^3}{6C}$ i odmierzamy od stycznej $NH'$, punkty pośrednie łuku o promieniu $r$ biorę z tabeli III prof. Skibińskiego odmierzając od stycznej w punkcie $J$, wreszcie punkty pośrednie łuku o promieniu $r$ wyznaczamy znowu od stycznej $NH'$ od punktu styczności $A$ począwszy.

Przy trasowaniu krzywej przejściowej należy zwrócić uwagę na wielkość kąta wierzchołkowego łuku $\beta$. Jeżeli bowiem kąt $\beta$ zbliża się do $180^0$, to przy stosunkowo małym promieniu $r$ może zajść taki wypadek, że długość łuku będzie za mała i nie będzie miejsca na krzywe przejściowe. Z rys. 3 wynika, że łuk $MD_1$ zniknie, gdy kąt $\varphi$ osiągnie graniczną wartość $\frac{\alpha}{2}$. W tym wypadku dwie proste będą połączone ze sobą dwiema krzywemi przejściowemi, które zetkną się w punkcie $D_1$.

Jeżeliby kąt $\varphi > \frac{\alpha}{2}$ wówczas dwie krzywe przejściowe nie zejdą się ze sobą, lecz przetną się na linji symetralnej kąta $\beta$.

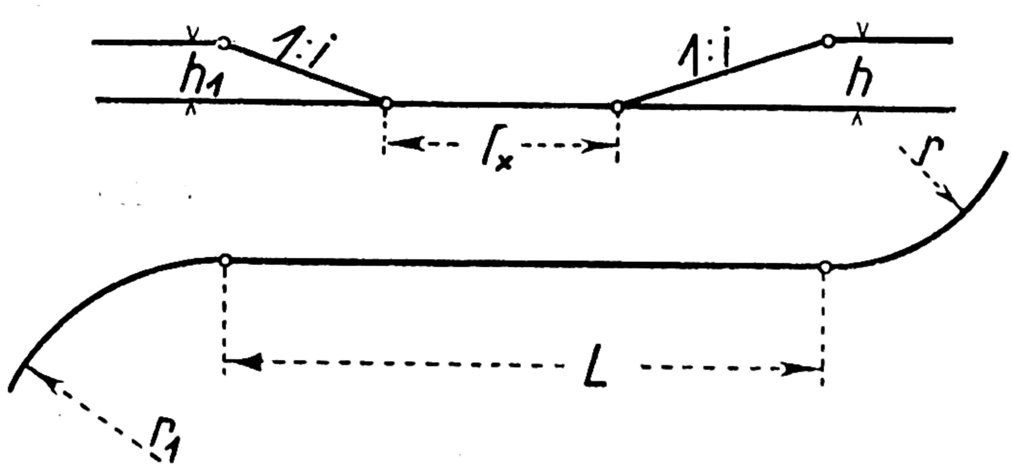
Warunkiem więc możliwości stosowania krzywych przejściowych będzie, że $\frac{\alpha}{2} \geqslant \varphi$ lub $\alpha \geqslant 2\varphi$

Poprzednio otrzymaliśmy związek $\operatorname{tg}\varphi = \frac{l^2}{2C}$ a że $l = \frac{C}{r}$, $\operatorname{tg}\varphi = \frac{l^2}{2C}$ a zatem i $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \geqslant \frac{C}{2r^2}$ z czego wynika, że im mniejszy będzie promień, tem większy należy przyjąć kąt środkowy $\alpha$. Jeżeli jednak w czasie trasowania z powodu trudności terenowych nie można uniknąć łuku płaskiego, którego kąt $\beta$ zbliża się do $180^0$, wówczas lepiej będzie zrezygnować z ułożenia krzywej przejściowej, a natomiast zastosować o ile możności jaknajwiększy promień łuku $r$.

Np. dla kolejki o prześwicie 0·76 $m$ dla zmiennych promieni i stałej $C=270$ dostaniemy graniczne wartości kąta środkowego $\alpha$:

| $rm$ | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 | 100 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\alpha^0 \geqslant$ | $9^0 40'$ | $6^0 11'$ | $4^0 18'$ | $3^0 10'$ | $2^0 28'$ | $1^0 33'$ |

Projektujący trasę kolejki zważać musi następnie na ten moment, by w razie dwóch następujących po sobie łuków włożona między nie prosta była odpowiednio długa tak, by umożliwiała obustronne zagubienie przechyłki toru w obu łukach — przechyłki




Rys. 5.

która na początku łuku musi już mieć obliczoną wartość w stosunku do promienia. Inną otrzymamy minimalną długość prostej między łukami bez stosowania krzywej przejściowej, inną przy jej uwzględnieniu.

Jeżeli krzywej przejściowej nie stosujemy to z rys. 5 dostaniemy całkowitą długość prostej wstawionej między łukami o promieniach $r$ i $r_1$ $\qquad L = i\ (h+h_1) + l_x$

Przepisy Ministerstwa Komunikacji zezwalają na pominięcie prostej $l_x$ — więc $L = i\,(h + h_1)$.

Dla kolejek leśnych dostaniemy zatem dla minimalnego promienia i odpowiedniego prześwitu kolejki następujące dane:

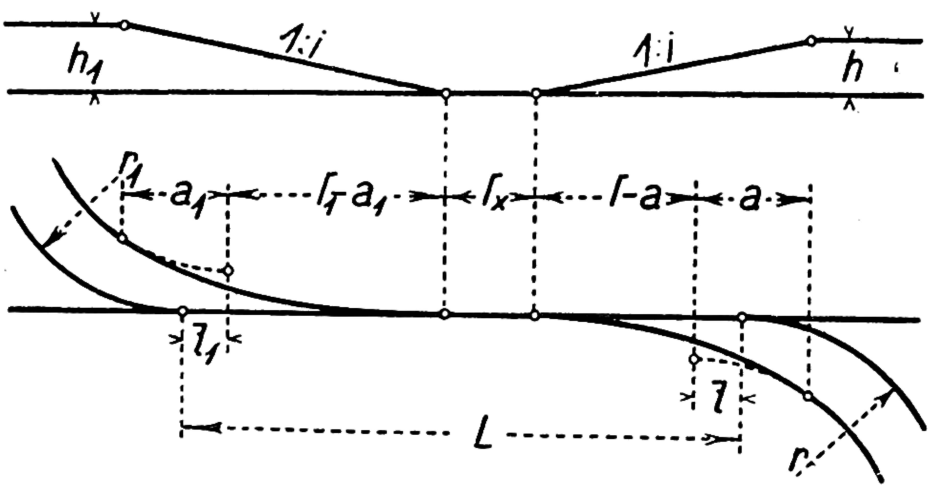
| Prześwit kol. | *min r* | przechyłkach $h\ m/m$ | $i$ | $L.\ m$ |
|---|---|---|---|---|
| 1·00 $m$ | 50 | 64 | 300 | 38·4 |
| 0·76 „ | 40 | 34 | 300 | 20·4 |
| 0·75 „ | 40 | 33 | 300 | 19·8 |
| 0·60 „ | 30 | 23 | 300 | 13·8 |

*

Przy zastosowaniu krzywej przejściowej minimalna długość prostej $L$ wyniesie z rys. 6 $L = (l - a) + (l_1 - a_1) + t + t_1 + l_x$. Przyjmując w przybliżeniu, że $t = t_1 = 1\ m$ otrzymamy odpowiednią długość prostej między łukami dla:

| Prześwitu | *min. r* | *vm/sek* | *i* | *C* | $(l-a)\ m$ | *Lm* |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1·0— | 50— | 5·56'' | 300 | 1150 | 11·81 | 25·63 |
| 0·76 | 40— | 4·17'' | 300 | 400 | 5·04 | 12·08 |
| 0·75 | 40— | 4·17'' | 300 | 400 | 5·04 | 12·08 |
| 0·60 | 30— | 3·34'' | 300 | 200 | 3·36 | 8·72 |

Reasumując wszystko to, co wyżej było omówione, dochodzimy do następujących wniosków: Z porównania długości prostych, jakie mają być wstawione między sąsiedniemi łukami przy zastosowaniu




Rys. 6.

krzywych przejściowych i w drugim wypadku bez tych krzywych widzimy, że w pierwszym wypadku długość prostych jest znacznie mniejsza. Stosowanie zatem krzywych przejściowych przy kolejce leśnej ułatwia w znacznej mierze trasowanie zwłaszcza w terenie górskim, gdzie trasę można łatwiej dostosować do terenu, który wymaga nieraz założenia obustronnych łuków.

Drugą korzyścią, jaką odnosimy z zastosowania krzywych przejściowych będzie często zmniejszenie robót ziemnych spowodowane dokładniejszem przystosowaniem trasy do terenu.

Trzecia korzyść, to zmniejszenie zaburzeń w czasie ruchu pojazdów po łuku — zaburzeń, które powodują szybsze zużycie nawierzchni oraz taboru kolejkowego, a często także są przyczyną wykolejeń.

Z tych założeń wychodząc dochodzimy do wniosku, że w racjonalnej budowie kolejki leśnej trasowanie krzywych przejściowych powinno mieć jaknajszersze zastosowanie.

*Z Zakładu Inżynierji Lasowej Politechniki Lwowskiej.*