

Jarosław Lira

Uniwersytet Przyrodniczy w Poznaniu

## OCENA PRZYDATNOŚCI MODELU WINTERSA DO PROGNOZOWANIA CEN SKUPU MLEKA

### AN ASSESSMENT OF THE USEFULNESS OF WINTERS' MODEL IN FORECASTING OF PROCUREMENT PRICES OF MILK

**Słowa kluczowe:** prognoza, dokładność prognozy, błędy prognoz *ex post*

*Key words:* forecast, forecast accuracy, forecast error measures (ex post)

**Abstrakt.** Celem badań była ocena trafności krótkoterminowych prognoz cen skupu mleka uzyskanych z uwzględnieniem sezonowych wahań na podstawie modelu Wintersa w wersjach addytywnej i multiplikatywnej. Materiał badawczy stanowiły przeciętne miesięczne ceny skupu mleka w Polsce w okresie od stycznia 1990 r. do grudnia 2012 r. Najwyższą trafność prognoz dla addytywnego modelu Wintersa uzyskano dla wyprzedzenia prognozy od jednego do trzech miesięcy odpowiednio (84,3, 67,3 i 54,7%). Dla obu postaci modelu Wintersa, im mniejsza wystąpi zmienność cen skupu mleka w horyzoncie prognozy, tym większa będzie trafność prognoz.

### Wstęp

W Polsce po 1989 r. roczna produkcja mleka uległa gwałtownemu zmniejszeniu z poziomu ok. 16 do 11,5 mld l w 2000 r. Dopiero po 2004 r. zaobserwowano powolny wzrost produkcji mleka ograniczany systemem jego kwotowania do poziomu 12 mld l w 2011 r. Po 1989 r. zwiększała się towarowość produkcji mleka, gdyż jego sprzedaż wzrosła od 73,5% w 1989 r. do 80,0% produkcji globalnej w 2010 r. Największym odbiorcą mleka jest przemysł mleczarski, który skupował 71,4% produkcji w 1989 r. W kolejnych latach następował spadek skupu mleka do poziomu 56,4% w 2000 r., a następnie wzrost do 72,5% produkcji globalnej mleka w 2010 r. [Urban 2011]. Skup mleka i jego ceny podlegają w ciągu roku wahaniom sezonowym, które są związane z nierównomiernością produkcji mleka. Wielkość produkcji mleka natomiast powiązana jest ze sposobem żywienia krów i rozkładem wycieleń [Iwan 2005, Majewski 2006].

Celem analizy była ocena trafności krótkoterminowych prognoz cen skupu mleka po wstąpieniu do UE uzyskanych z uwzględnieniem sezonowych wahań na podstawie modelu Wintersa. Badanie prognoz umożliwi określenie, która wersja modelu Wintersa lepiej nadaje się do prognozowania cen mleka, a więc do poszukiwania tzw. lepszego modelu prognostycznego.

### Metodyka badań

**Prognozowanie z uwzględnieniem trendu i wahań sezonowych.** Materiał badawczy stanowiły przeciętne miesięczne ceny skupu mleka w Polsce od stycznia 1990 r. do grudnia 2012 r. na podstawie biuletynów statystycznych GUS (1990-2012). Do prognozowania przeciętnych miesięcznych cen skupu mleka na podstawie szeregów czasowych zastosowano model wyrównywania wykładniczego Wintersa [Winters 1960, Stańko 1999, 2013, Tłuczak 2009, Hamulczuk 2011]. Ceny skupu mleka w układzie miesięcznym można przedstawić za pomocą modeli składowych szeregu czasowego. Wykorzystano dwie formuły dekompozycji cen, przy czym pierwsza zakłada stosowanie modelu addytywnego:  $y_t = f(t) + s_i(t) + e(t)$ , a druga – multiplikatywnego:  $y_t = f(t) \times s_i(t) \times e(t)$ , gdzie:  $y_t$  jest poziomem badanego zjawiska w okresie  $t$ ,  $f(t)$  – funkcją tendencji rozwojowej (trendem),  $s_i(t)$  – funkcją wahań sezonowych w  $i$ -tym podokresie cyklu okresowości ( $i = 1, 2, \dots, d$ ),  $e(t)$  – składnikiem resztowym modelu, zwanym także składnikiem nieregularnym.

**Błędy prognoz *ex post*.** Do oceny trafności prognoz cen skupu mleka wykorzystano mierniki błędów prognoz *ex post* [Zeliaś i in. 2003, Makridakis, Habon 2000]: względny błąd prognozy (WBP), średni kwadratowy błąd (ŚKB), średni błąd bezwzględny (ŚBB) oraz średni bezwzględny błąd procentowy (ŚBBP). Dla błędów |WBP| (co do bezwzględnej wartości) i ŚBBP przyjęto, że skonstruowane prognozy są bardzo dobre, gdy nie przekraczają 3%, prognozy są dobre – w przedziale (3%, 5%>, prognozy są dopuszczalne (prognozy, które przez ich odbiorcę mogą być uznane za dostatecznie dokładne lub wiarygodne) w przedziale (5%, 10%> oraz prognozy są niedopuszczalne dla błędów powyżej 10%. W przypadku błędów prognoz: ŚKB i ŚBB przewidywania są tym trafniejsze, im ich wartości są bliższe 0.

Przeciętne miesięczne ceny skupu mleka w Polsce od stycznia 1990 r. do grudnia 2012 r. pogrupowano w 109 szeregów czasowych. Pierwszy szereg składał się z 168 jednostek czasowych wyrażających ceny skupu mleka z poszczególnych miesięcy od stycznia 1990 r. do grudnia 2003 r., a kolejne szeregi czasowe były wydłużane o jeden wyraz w odniesieniu do poprzedniego szeregu, przy czym ostatni szereg obejmował 276 jednostek (od stycznia 1990 r. do grudnia 2012 r.). Dla miesięcznych cen skupu mleka zastosowano addytywny i multiplikatywny model wyrównania wykładniczego Wintersa o liniowej postaci trendu, przyjmując jako kryterium minimalizacyjne ŚBBP. Niezbędne obliczenia numeryczne wykonano z wykorzystaniem pakietu statystycznego STATISTICA 10 na podstawie procedury obliczeniowej „Wyrównywanie wykładnicze i prognozowanie”. Użyto domyślnie obliczanych przez program wartości początkowych trendu i sezonowości, a stałe służące do wyrównania średniego poziomu zmiennej prognozowanej, stałego przyrostu i wyrównania wskaźników sezonowości otrzymywano w wyniku procesu optymalizacji ŚBBP.

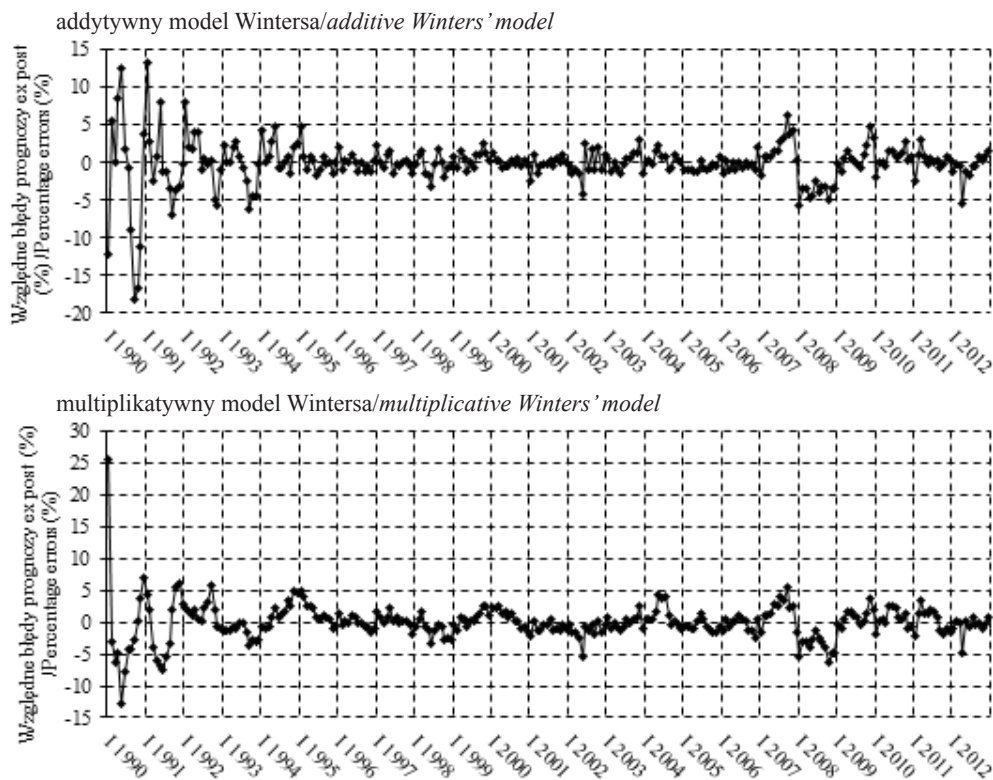
Dla każdego utworzonego szeregu czasowego wyznaczono wartości wygładzone i skonstruowano prognozy o horyzoncie 12-miesięcznym. Następnie cen skupu i odpowiadających im wartości wygładzonych użyto do wyznaczenia względnych błędów prognozy, a także sumarycznych błędów prognoz *ex post*: ŚKB, ŚBB i ŚBBP. Z kolei rzeczywiste ceny skupu z horyzontu prognozy i prognozy wygasłe posłużyły do obliczenia względnych błędów prognozy.

## Wyniki badań

### Ocena modelu wyrównywania wykładniczego Wintersa

Analizie poddano względne błędy prognozy *ex post*, a następnie sumaryczne błędy prognoz *ex post*. Dla pierwszego szeregu czasowego (od stycznia 1990 r. do grudnia 2003 r.) otrzymano 168 względnych błędów prognozy, a dla kolejnego o jeden błąd więcej porównaniu z poprzednim szeregiem. Z kolei dla ostatniego szeregu czasowego obejmującego miesięczne ceny skupu mleka z lat 1990-2012 wyznaczono 276 błędów względnych prognozy. Analizując medianę względnych błędów prognozy *ex post* zilustrowaną na rysunku 1, można zauważyć szczególnie duże wartości, tj. powyżej 10% lub poniżej -10% w latach 1990-1991. W przypadku addytywnego modelu Wintersa błędy te wystąpiły w styczniu (-12,2%), maju (12,6%), wrześniu (-18,2%), październiku (-16,7%) i listopadzie (-11,2%) 1990 r. oraz w styczniu (13,3%) 1991 r., natomiast dla modelu multiplikatywnego – tylko w styczniu (25,5%) i maju (-12,7%) 1990 r. Wysoką wartość pierwszego błędu względnego prognozy (styczeń 1990 r.) można powiązać z punktem startowym, a pozostałe z dość dużą zmiennością cen skupu mleka w pierwszych latach po transformacji gospodarczej w Polsce.

W tabeli 1 podano podstawowe charakterystyki błędów prognoz *ex post* obliczonych na podstawie cen skupu mleka i ich wartości wygładzonych dla 109 szeregów czasowych. Na podstawie przeciętnych wartości tych błędów można stwierdzić, że dla multiplikatywnego modelu Wintersa uzyskano mniejsze ich wartości niż dla addytywnej wersji tego modelu. A zatem dla modelu multiplikatywnego otrzymano przeciętne odchylenie prognoz od cen skupu oscylujące wokół 1,11 zł za 1 hl mleka, obciążenie prognoz (co do bezwzględnej wartości) na poziomie ok. 0,77 zł/hl, a względne całkowite dopasowanie modelu do cen skupu – ok. 1,9%. Odpowiednie wartości błędów prognoz dla modelu addytywnego wynosiły: 1,2, 0,8 i 2,0%.



Rysunek 1. Mediana względnych błędów prognozy ex post dla poszczególnych miesięcy z lat 1990-2012  
 Figure 1. Median of ex post percentage errors for individual months from 1990 to 2012

Źródło: opracowanie własne na podstawie Biuletyn statystyczny z lat 1990-2012

Source: own study based on Statistical Bulletin from the period of 1990-2012

Tabela 1. Statystyki opisowe dla błędów prognoz ex post

Table 1. Descriptive statistics of ex post forecasting errors

Błędy prognoz ex post/ Ex post forecast errors	Minimum/ Minimum	Kwartył dolny/ Lower quartile	Mediana/ Median	Kwartył górny/ Upper quartile	Maksimum/ Maximum
Addytywny model Wintersa/Additive Winters' model					
ŚKB/MSE [zł/hl] <sup>2</sup>	0,5378	0,6182	1,4904	2,4693	9,9006
$\sqrt{\text{ŚKB}}/\sqrt{\text{MSE}}$ [zł/hl]	0,7334	0,7863	1,2208	1,5714	3,1465
ŚBB/MAE [zł/hl]	0,5482	0,5773	0,8026	1,0582	2,1685
ŚBBP/MAPE [%]	1,60	1,69	2,02	2,44	4,69
Multiplikatywny model Wintersa/Multiplicative Winters' model					
ŚKB/MSE [zł/hl] <sup>2</sup>	0,4493	0,9391	1,2217	2,2206	2,2870
$\sqrt{\text{ŚKB}}/\sqrt{\text{MSE}}$ [zł/hl]	0,6703	0,9691	1,1053	1,4902	1,5123
ŚBB/MAE [zł/hl]	0,4719	0,7062	0,7680	0,9799	1,0331
ŚBBP/MAPE [%]	1,34	1,85	1,89	1,94	1,99

Oznaczenia/Explanations: średni kwadratowy błąd (ŚKB), średni błąd bezwzględny (ŚBB) oraz średni bezwzględny błąd procentowy (ŚBBP)/mean squared error (MSE), mean absolute error (MAE), Mean absolute percentage error (MAPE)

Źródło: jak na rys. 1

Source: see fig. 1

### Empiryczna weryfikowalność prognozy

Dla każdego utworzonego szeregu czasowego w wyniku pogrupowania cen skupu mleka przyjęto 12-miesięczny horyzont prognozy. W przypadku pierwszego szeregu skonstruowane prognozy obejmowały poszczególne miesiące od stycznia do grudnia 2004 r. Dla każdego kolejnego szeregu czasowego horyzont prognozy przesuwano o jeden miesiąc, tj. od lutego 2004 r. do stycznia 2005 r. (drugi szereg), od marca 2004 r. do lutego 2005 r. (trzeci), itd. aż do szeregu od stycznia do grudnia 2013 r. (ostatni 109). Empirycznej weryfikowalności poddano miesięczne prognozy wygasłe od stycznia 2004 r. do grudnia 2012 r., tj. po upływie czasu, na który zostały sporządzone. Ogółem skonstruowano 1308 prognoz, a analizie poddano wyłącznie 1230 prognoz wygasłych, w tym 108 prognoz z wyprzedzeniem o 1 miesiąc, 107 o 2 miesiące, itd. aż do szeregu, 97 o 12 miesięcy. W tabeli 2 przedstawiono dla addytywnego i multiplikatywnego modelu Wintersa podstawowe charakterystyki dotyczące względnych błędów prognozy *ex post* obliczonych na podstawie cen skupu mleka i ich prognoz wygasłych dla wyprzedzenia prognozy od 1 do 12 miesięcy. Strukturę tych błędów dla obu modeli zaprezentowano w tabeli 3.

Prognozy konstruowane w oparciu o addytywny model Wintersa częściej były niedoszacowane dla każdego wyprzedzenia prognozy od 0,5 p.p. (o dwa miesiące) do 7,7 p.p. (o 5 miesięcy). Przeciętna wartość względnego błędu prognozy *ex post* rosła od 0,01% dla wyprzedzenia prognozy o 1 miesiąc do 3,33% dla wyprzedzenia prognozy o 12 miesięcy. Największy odsetek prognoz bardzo dobrych stwierdzono dla wyprzedzenia od 1 do 3 miesięcy odpowiednio: 84,3, 67,3 i 54,7%. Ponadto, dla tego modelu zaobserwowano największy odsetek prognoz niedopuszczalnych, który przekroczył 50% dla wyprzedzenia o 11 i 12 miesięcy. Ponad połowę dobrych i bardzo dobrych prognoz łącznie odnotowano dla wyprzedzenia od 1 (95,4%) do 5 miesięcy (51,9%).

Tabela 2. Charakterystyki względnych błędów prognozy *ex post* dla prognoz wygasłych i cen skupu mleka w Polsce

Table 2. The characteristics of percentage errors for *ex post* forecasts and procurement prices of milk in Poland

Wyprzedzenie prognozy/ <i>Stepahead of forecast</i>	Minimum / <i>Minimum</i>		Kwartył dolny/ <i>Lower quartile</i>		Mediana / <i>Median</i>		Kwartył górny/ <i>Upper quartile</i>		Maksimum / <i>Maximum</i>		Odsetek dodatnich błędów WBP/ <i>Percentage of positive errors PE [%]</i>	
	AMW	MMW	AMW	MMW	AMW	MMW	AMW	MMW	AMW	MMW	AMW	MMW
1	-10,9	-6,6	-0,83	-1,11	0,01	0,09	0,86	1,27	6,6	5,7	51,9	50,9
2	-15,5	-11,7	-1,86	-1,93	0,19	-0,14	1,56	2,19	10,2	9,3	50,5	49,5
3	-23,9	-17,3	-2,35	-3,45	0,21	0,08	2,62	3,58	14,1	13,5	51,9	50,9
4	-33,1	-22,0	-3,21	-4,34	0,62	0,20	3,64	4,77	14,2	15,5	56,2	53,3
5	-44,9	-24,9	-3,57	-4,99	0,70	1,10	4,82	5,33	13,7	17,9	57,7	53,8
6	-57,4	-29,0	-4,66	-5,56	0,95	0,38	5,35	6,17	17,9	19,8	57,3	52,4
7	-67,3	-33,8	-6,04	-5,66	1,08	0,37	6,80	6,77	22,4	21,8	55,9	52,0
8	-80,4	-39,7	-7,35	-5,78	1,35	0,38	6,69	7,56	28,7	23,0	55,4	52,5
9	-92,1	-45,3	-9,09	-5,80	0,91	-0,55	7,76	8,08	32,5	24,4	56,0	47,0
10	-102,9	-52,1	-10,16	-6,47	1,45	-0,05	8,69	8,49	36,3	27,4	55,6	49,5
11	-117,0	-60,4	-14,35	-6,75	3,06	0,45	10,17	9,42	37,4	30,6	55,1	50,0
12	-127,5	-69,3	-14,53	-6,31	3,33	1,76	10,63	9,75	43,9	36,8	54,6	54,6

Objaśnienia/*Explanations*: AMW – addytywny model Wintersa/*additive Winters' model*, MMW – multiplikatywny model Wintersa/*multiplicative Winters' model*

Źródło: jak na rys. 1

Source: see fig. 1

Tabela 3. Struktura względnych błędów prognozy *ex post* dla prognoz wygasłych i cen skupu mleka w Polsce  
Table 3. The structure of percentage errors for *ex post* forecasts and procurement prices of milk in Poland

Względny błąd prognozy <i>ex post</i> / Percentage error	Wyprzedzenie prognozy (miesiące)/ <i>Step-ahead of forecast (months)</i>											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
<i>Addytywny model Wintersa/Additive Winters' model</i>												
(-3%; 3%)	84,3	67,3	54,7	44,8	39,4	32,0	22,5	18,8	17,0	15,2	11,2	7,2
(-5%; -3%> lub/ and <3%; 5%)	11,1	16,8	16,0	16,2	12,5	16,5	17,6	17,8	12,0	8,1	8,2	8,2
(-10%; -5%> lub/ and <5%; 10%)	3,7	12,1	18,9	25,7	28,8	26,2	27,5	25,7	32,0	34,3	28,6	27,8
≤-10% lub ≥10%	0,9	3,7	10,4	13,3	19,2	25,2	32,4	37,6	39,0	42,4	52,0	56,7
<i>Multiplikatywny model Wintersa/Multiplicative Winters' model</i>												
(-3%; 3%)	85,2	62,6	45,3	37,2	28,8	22,3	23,5	17,8	15,0	17,2	14,3	11,3
(-5%; -3%> lub/ and <3%; 5%)	11,1	17,8	20,8	17,1	20,2	22,3	15,7	16,8	16,0	9,1	8,2	11,3
(-10%; -5%> lub/ and <5%; 10%)	3,7	15,9	19,8	28,6	27,9	28,2	31,4	32,7	36,0	37,4	37,7	35,1
≤-10% lub ≥10%	0,9	3,7	14,1	17,1	23,1	27,2	29,4	32,7	33,0	36,3	39,8	42,3

Źródło: jak na rys. 1

Source: see fig. 1

Analizując prognozy wyznaczone za pomocą multiplikatywnego modelu Wintersa, można zauważyć, że prognozy częściej przeszacowane wystąpiły jedynie dla wyprzedzeń prognozy o 2, 9 i 10 miesięcy i przeważały odpowiednio o 0,5 p.p., 3,0 p.p. oraz 0,5 p.p. Natomiast dla wyprzedzeń prognozy o 1, 3-8 i 12 miesięcy odnotowano częściej prognozy niedoszacowane od 0,9 p.p. do 5,7 p.p. Przeciętna wartość względnego błędu prognozy *ex post* dla wyprzedzeń prognozy od 1 miesiąca do 12 miesięcy zawierała się w przedziale od -0,55% (dla 9 miesięcy) do 2,47% (dla 12 miesięcy). Ponad połowę prognoz bardzo dobrych dla tego modelu odnotowano tylko dla wyprzedzenia o 1 (85,2%) i 2 miesiące (62,6%), a rozpatrując łącznie, prognozy dobre i bardzo dobre stwierdzono dla wyprzedzenia od jednego (95,4%) do 4 miesięcy (54,2%).

### Podsumowanie

Dla multiplikatywnego modelu Wintersa sumaryczne błędy prognoz *ex post* przyjmowały niższe wartości niż dla postaci addytywnej tego modelu, gdyż przeciętne odchylenie prognoz od cen skupu mleka za 1 hl było mniejsze o 0,12 zł, obciążenie prognoz (co do bezwzględnej wartości) – o 0,03 zł/hl, a względne całkowite dopasowanie modelu do cen skupu – o 0,13 p.p.

Najwyższą trafność prognoz dla addytywnego modelu Wintersa uzyskuje się dla wyprzedzenia prognozy od 1 do 3 miesięcy odpowiednio: 84,3, 67,3 i 54,7%, a ponad połowę prognoz dobrych i bardzo dobrych łącznie – dla wyprzedzenia prognozy od 1 do 5 miesięcy odpowiednio: 95,4, 84,1, 70,7, 61,0 i 51,9%. Natomiast multiplikatywny model Wintersa najwyższą trafność prognoz osiąga dla wyprzedzenia prognozy od 1 (85,2%) do 2 (62,6%) miesięcy, a ponad połowę prognoz dobrych i bardzo dobrych łącznie – dla wyprzedzenia prognozy od 1 do 4 miesięcy odpowiednio: 96,3, 80,4, 66,1 i 54,3%.

Prognozy konstruowane za pomocą addytywnej postaci modelu wyrównywania wykładniczego Wintersa częściej są dokładniejsze niż dla wersji multiplikatywnej tego modelu, gdyż dla wyprzedzenia prognozy od 2 do 6 miesięcy prognoz bardzo dobrych było więcej odpowiednio o 4,7, 9,4, 7,6, 10,6 i 9,7 p.p. Natomiast odsetek ogółu prognoz bardzo dobrych dla modelu addytywnego Wintersa wynosił 35,3% i przewyższał o 2,9 p.p. odsetek tych prognoz dla postaci multiplikatywnej. Ponadto, w obu postaciach modelu Wintersa im mniejsza wystąpi zmienność cen skupu mleka w horyzoncie prognozy, tym większa będzie trafność prognoz.



### Literatura

- Biuletyn statystyczny*. 1990-2012: GUS, Warszawa.
- Hamulczuk M. (red.) 2011: *Prognozowanie cen surowców rolnych z wykorzystaniem modeli szeregów czasowych*, IERiGŻ-PIB, Raporty Programu Wieloletniego 2011-2014, nr 10, Warszawa.
- Iwan B. 2005: *Sezonowość skupu mleka*, Roczn. Nauk. SERiA, t. VII, z. 2, s. 79-83.
- Majewski J. 2006: *Ceny skupu mleka w Polsce – analiza i prognozowanie*, Roczn. Nauk. SERiA, t. VIII, z. 1, s. 115-118.
- Makridakis S., Hibon M. 2000: *The M3-Competition: results, conclusions and implications*, International Journal of Forecasting, 16, s. 451-476.
- Stańko S. 1999: *Prognozowanie w rolnictwie*, Wyd. SGGW, Warszawa, s. 126-132.
- Stańko S. (red.) 2013: *Prognozowanie w agrobiznesie. Teoria i przykłady zastosowania*, Wydawnictwo SGGW, Warszawa, s. 166-171.
- Tłuczak A. 2009: *Efektywność modeli adaptacyjnych w prognozowaniu cen rolnych*, [W:] R. Żelazny (red.), *Koniunktura gospodarcza a funkcjonowanie rynków*, Wyd. Akademii Ekonomicznej w Katowicach, Katowice, s. 123-134.
- Urban S. 2011: *Zmiany w produkcji mleczarskiej w Polsce*, Roczn. Nauk. SERiA, t. XIII, z. 1, s. 412-417.
- Winters P.R. 1960: *Forecasting sales by exponentially weighted moving averages*, Management Science, 6.
- Zeliaś A., Pawelek B., Wanat S. 2003: *Prognozowanie ekonomiczne. Teoria, przykłady zadania*, PWE, Warszawa, s. 45-50.

### Summary

*The aim of the paper is the assessment of accuracy of short-term forecasts of procurement prices of milk in Poland. Both additive and multiplicative seasonality, Winters' exponential smoothing method with a linear trend were used to forecast the prices. For additive Winters' model the highest forecast accuracy was obtained with one to three months advance (84.3%, 67.3% and 54.7%, respectively), in turn for multiplicative Winters' model only in one to two months advance (85.2% and 62.6%, respectively). More than half of the good and very good forecasts were observed in one to five months advance for additive Winters' model and in one to four months advance for multiplicative version of Winters' method.*

Adres do korespondencji  
dr Jarosław Lira  
Uniwersytet Przyrodniczy w Poznaniu  
Katedra Finansów i Rachunkowości  
ul. Wojska Polskiego 28  
60-637 Poznań  
tel. (61) 848 71 11  
e-mail: jlira@up.poznan.pl