

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ТЕЛ ПРИ ИХ КОНТАКТНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ. КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА

Aleksey Popov*, Boris Butakov**, Dmitriy Marchenko**

*National university of shipbuilding, Ukraine
Chkalova av. 82, ap. 49, Mykolayiv 54055
Popov.aleksey.pavlovich@gmail.com

**Mykolayiv State Agrarian University, Ukraine
Krylova Street 17, Mykolayiv 54040
etcmtpr@yandex.ru

Аннотация. В статье приведено решение контактной задачи напряженно-деформируемых тел, на примере работы стального канатного блока и троса, решение которой базируется на основах новой методологии теоретических исследований контактной прочности упругосжатых полупространств, ограниченных криволинейными поверхностями применительно к начальному линейному взаимодействию тел.

Ключевые слова: контактная задача, напряженно-деформированное состояние, канатный блок, трос.

ВСТУПЛЕНИЕ

Исследования в области контактных задач теории упругости в течение длительного времени ограничивались классической постановкой, когда рассматривался контакт гладких (без трения) тел, одно из которых есть полуплоскость или полупространство. Стремление исследователей к более тесному сближению математических постановок контактных задач с проблемами, возникающими в машиностроении, привело к развитию контактных задач в неклассической постановке.

Усталостное контактное изнашивание возникает в результате повторного деформирования микрообъемов материала, вызывающего возникновение трещин и отделение частиц материала. Циклически изменяющиеся контактные напряжения вызывают поверхностное разрушение в виде ямок выкрашивания (питтинг), трещин, осповидного изнашивания, отслаивания. Образующиеся раковинки с диаметром от сотых долей миллиметра до нескольких миллиметров увеличиваются в процессе работы узла трения, возникает шелушение поверхности. Количественная оценка контактной усталости выражается в числе циклов нагружения или в часах работы до возникновения усталостных разрушений поверхностей. Появление усталостного изнашивания приводит к усилению вибрационно-акустической активности механизмов, повышению уровня шума, увеличению концентрации нагрузки, контактных напряжений, уменьшению размера площади несущей

поверхности трущихся поверхностей, возникновению интенсивного износа и заедания. Условия возникновения и кинетика развития усталостного контактного изнашивания зависят от напряженно-деформированного состояния поверхностных и приповерхностных слоев материала, физико-механических свойств материала, физико-химических свойств смазочных материалов и окружающей среды, толщины смазочного слоя, кинематики контакта, формы и размеров соприкасающихся деталей. Упругое контактное макродеформирование материалов сопровождается появлением микропластических деформаций в микрообъемах.

Возникновению микротрещин при циклических контактных воздействиях способствует влияние концентраторов напряжений. К поверхностным концентраторам напряжений относятся дефекты в виде царапин, вмятин, рисок, прижогов и др. Подповерхностные концентраторы напряжений – неметаллические включения, микропоры, раковины, карбиды и др. Большое влияние оказывают значения максимальных касательных напряжений. Первичная трещина чаще возникает на поверхности контакта, но может зарождаться и в приповерхностных слоях материала.

Скорость развития усталостного контактного изнашивания зависит от многих факторов – механических свойств материала, физико-механических свойств поверхности, качества обработки поверхности, остаточных напряжений в приповерхностных и поверхностных слоях материалов, от концентрации напряжений, степени приработки, частоты изменения напряжений, уровня температуры, химической активности окружающей среды и др. Увеличение коэффициента трения скольжения способствует возникновению выкрашивания. С ростом толщины смазочного слоя уменьшаются число взаимодействующих микронеровностей, продолжительность и величина деформирования, предотвращается металлический контакт. Условиями появления выкрашивания, связанными с пластическими деформациями, можно объяснить положительное влияние повышенных значений пределов упругости, текучести, вязкости материала, твердости несущей области материала, а также ведущее значение дислокационных процессов - образование пустот, слияние дислокаций вдоль плоскостей скольжения или спайности [Когаев В.П., 1991].

СОСТОЯНИЕ ПРОБЛЕМЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

Контактные напряжения и деформации являются главными факторами, определяющими характер и интенсивность изнашивания деталей машин. Наиболее напряженными зонами материала деталей являются приповерхностные слои, где действуют большие градиенты напряжений. Отметим напряженно-деформированное состояние криволинейных поверхностей при их локальном упругом контакте. При решении контактных задач Г. Герц [Hertz Н., 1881; Hertz Н., 1882; Hertz Н., 1895] допускал, что тела гладкие, изотропные и однородные, характер деформации абсолютно упругий, сжимающая сила нормальна к контактной площадке, размеры пятна контакта малы по сравнению с характерными размерами контактирующих тел [Когаев В.П., 1991].

Теорию расчета контактных напряжений и деформаций разрабатывали многие ученые. Решение контактной задачи, начатое Герцем и полностью законченное А.Н. Динником [Динник А.Н., 1909] и Н.М. Беляевым [Беляев Н.М., 1957], свыше полувека оставалось единственным, если не считать небольших работ М.Т. Губера, С. Фукса, А. и Л. Фоппля [Фёппль А., Фёппль Л., 1936], Г. Лундберга, Ф. Одквиста и других ученых, рассматривавших частные вопросы и неизбежно повторявших результаты, полученные А.Н. Динником и Н.М. Беляевым. Эксперименты и расчеты А. И. Петрусевича [Петрусевич А. И., 1935.], Д. Н. Решетова [Левина З. М., Решетов Д. Н., 1971], В. Н. Кудрявцева, С.В. Пинегина, Г. Лундберга, А. Пальмгрена [Palmgren A., 1924], Т. Эллина и многих других ученых позволили создать расчеты деталей

машин на усталостное контактное разрушение [Пинегин С.В., 1965; Пинегин С.В., 1969; Рыжов Э.В., Колесников Ю.В., Сулов А.Г., 1982].

Работы Н.И. Мухелишвили [Мухелишвили Н.И., 1954.], И.Я. Штаермана [Штаерман И. Я., 1939], Л.А. Галина, В.М. Коровчинского, А.Н. Грубина, а также В.И. Моссаковского [Моссаковский В.И. и др., 1976], Н.А. Кильчевского и других ученых дали общие методы решения плоских и пространственных контактных задач, охватывающих очень широкий круг внешних условий, в том числе контакт упругих круговых цилиндров, радиусы которых почти равны, скорость перемещения поверхностей, влияние анизотропии материала и переменного по глубине модуля упругости.

Фундаментальные исследования в области контактного взаимодействия твердых тел, выполненные советскими и зарубежными учеными, позволили установить влияние физико-механических свойств и параметров шероховатости поверхностей, времени приложения нагрузки на эксплуатационные свойства контакта деталей машин. Значительный вклад в эту проблему внесли А.С. Ахматов, В.А. Белый, Н.Б. Демкин, Ю.Н. Дроздов, А.Ю. Ишлинский, Б.И. Костецкий, З.М. Левина, Н.М. Максак, Н.М. Михин, И.В. Крагельский [Ишлинский А.Ю., Демкин Н.Б., 1971], Д.М. Решетов, а также Аппал, Грин, Линг, Проберт, Хисакадо и другие.

Также следует указать ряд известных ученых, которые непосредственно занимались напряженно-деформируемым состоянием контактирующих тел, геометрией, кинетикой формирования контакта деталей, такие как: Н.Н. Давиденков [Давиденков Н.Н., 1979.], И.И. Ворович, В.М. Александров, Ю.В. Линник, Я.А. Рудзит, Г. Томлинсон, Р. Хольм, Д. Тейбор, И. Арчард, А. Шалломах, Ж. Гринвуд, Ж. Вильямсон и другие.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ИССЛЕДОВАНИЯ

В процессе работы канатного блока в паре со стальным канатом на судоперегрузателях ОАО «Николаевский глиноземный завод» на рабочей поверхности блока после 3 – 4-х месяцев эксплуатации происходило смятие рабочей поверхности канатного блока. При работе канатного блока наиболее интенсивному износу подвергается галтельный переход, где наблюдается отслаивание металла, особенно при наличии в поверхностях слоя газовых раковин и пустот, полученных в процессе отливки заготовок из литейных сталей 35Л, 45Л. Однако разбиваются канатом и конические поверхности. Соответственно изнашивался и сам стальной канат, а именно происходит перегиб проволок на неровностях изношенного блока [Бутаков Б.И., Марченко Д.Д., 2008].

Поэтому, возникла идея провести расчет контактных напряжений, возникающих при работе канатного блока и каната, а для этого необходимо решить контактную задачу.

Основные допущения по решениям:

1. Контактные напряжения определяются на рабочих поверхностях тел.
2. Материалы взаимодействующих тел принимаются однородными и изотропными с разными значениями коэффициентов Пуассона и модулей упругости.
3. Сила, сжимающая тела, создает в зоне контакта только упругие деформации, подчиняющиеся закону Гука.
4. Площадка контакта тел считается меньшей величиной по сравнению с общей площадью контактирующих тел.
5. Между функциями контактных деформаций и контактных напряжений существует причинно-следственная связь, впервые озвученная и введенная в рассмотрение в [Попов А.П., 2008]. Суть указанной взаимосвязи (связи): функция контактных деформаций (причина) отображает функцию контактных напряжений (следствие).

Основные допущения к расчетной модели контакта:

1. Трос рассматривается как единое целое упругое тело.

2. Радиус шкива r_2 принимается большим по сравнению с радиусом троса r_1 в $1,1 \dots 1,2$ раза, т.е. $r_2 / r_1 \geq 1,1 \dots 1,2$.

Общая информация:

В процессе эксплуатации трос, как единое целое тело, подвергается растяжению, изгибу и смятию на поверхностях контакта.

Однако напряжения растяжения и изгиба не являются определяющими в процессе эксплуатации устройства.

Определяющими являются напряжения смятия (контактные напряжения), для определения которых предполагается решение плоской контактной задачи.

В дальнейшем для оценки найденных величин контактных напряжений и сравнения их с допускаемыми значениями необходимо выполнить тщательный анализ источников по данной проблеме.

МЕТОДИКА И РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

Решение задачи осуществляется, исходя из вышеприведенных рассуждений, допущений и упрощающих предположений. Выполненное ниже решение базируется на основах новой методологии теоретических исследований контактной прочности упруго сжатых полупространств, ограниченных криволинейными поверхностями применительно к начальному линейному взаимодействию тел [Попов А.П., 2008].

Для решения плоской контактной задачи необходимо найти две функции контактных деформаций. В соответствии с рис. 1 запишем:

$$S_1(a) = \frac{a^2}{2r_1}; \quad S_2(a) = \frac{a^2}{2r_2},$$

где: $S_1(a)$, $S_2(a)$ – расстояние между упруго взаимодействующими телами соответственно каната 1 и канатного блока 2 (рис. 1) и горизонтальной осью x .

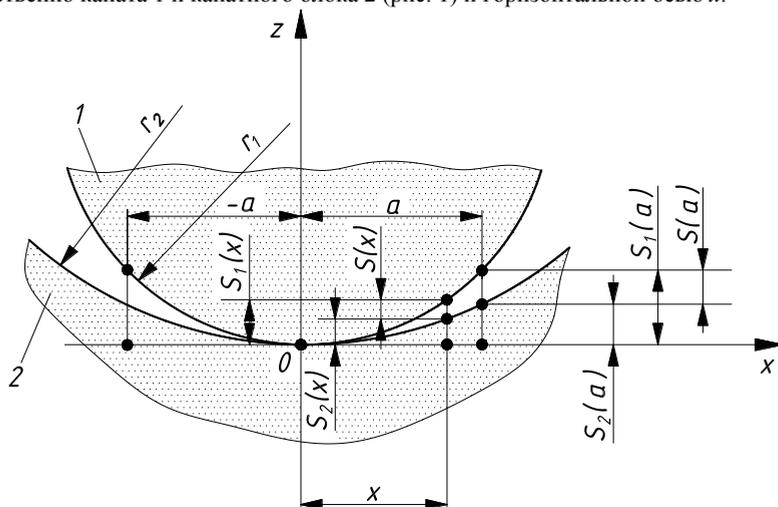


Рис. 1. Расчетная модель контакта:

1 – канат; 2 – канатный блок

Fig. 1. Calculation model of contact:

1 – rope; 2 – is a rope block

В соответствии с выражениями $S_1(a)$ и $S_2(a)$ расстояние между ними в точке $x = a$ равно:

$$S(a) = S_1(a) + S_2(a) = \frac{a^2}{2r_1} - \frac{a^2}{2r_2} = \frac{a^2}{2r_{np}}, \quad (1)$$

где: $r_{np} = r_1 r_2 / (r_2 - r_1)$ – приведенный радиус кривизны взаимодействующих тел; a – полуширина площадки контакта.

По аналогии с выражениями $S_1(a)$ и $S_2(a)$ запишем выражения $S_1(x)$ и $S_2(x)$ в точке x , а именно:

$$S_1(x) = \frac{x^2}{2r_1}; \quad S_2(x) = \frac{x^2}{2r_2}.$$

Исходя из зависимостей $S_1(x)$ и $S_2(x)$, найдем расстояние между телами 1 и 2 в точке x :

$$S(x) = S_1(x) - S_2(x) = \frac{x^2}{2r_1} - \frac{x^2}{2r_2} = \frac{x^2}{2r_{np}}. \quad (2)$$

С учетом зависимостей (1) и (2) функция контактных деформаций примет вид

$$W(x) = S(a) - S(x) = \frac{a^2}{2} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) - \frac{x^2}{2} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = \frac{a^2 - x^2}{2r_{np}} = \frac{a^2}{2r_{np}} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right). \quad (3)$$

Из уравнения (3) очевидно, что оно является параболическим.

Таким образом, располагая функцией (3), перейдем к определению второй ей равнозначной функции $W(x)$. С этой целью воспользуемся законом Гука и гипотезой Винклера.

При этом рассмотрим последовательность получения указанной функции. При сжатии тел 1 и 2 (рис. 1) и изменении деформации в направлении оси x (плоская задача) исходим из подчинения сближаемых тел в пределах упругости гипотезе Винклера [Попов А.П., 2008], в связи с чем запишем:

$$W(x) = W_1(x) + W_2(x), \quad (4)$$

где $W_1(x) = A_1(x) \cdot \varpi(x)$ и $W_2(x) = A_2(x) \cdot \varpi(x)$ – упругие перемещения тел; $A_1(x)$, $A_2(x)$ – коэффициенты постелей первого и второго тел, мм²/Н, сумма которых равна $A_1(x) + A_2(x) = A(x)$; $\varpi(x)$ – функция нагрузки распределенной по оси x в пределах ширины площадки контакта $2a$, измеряемая в Н/мм.

В соответствии с принятыми обозначениями и пояснениями функцию (4) представим в более упрощенном виде:

$$W(x) = A(x) \cdot \varpi(x). \quad (5)$$

Из уравнения (4) очевидно, что коэффициент постели $A(x)$ является переменной величиной, которая не позволяет осуществить решение задачи в явном виде. В связи с этим необходимо найти решение коэффициентов $A(x)$ в виде постоянной величины, т.е. константы A , не зависящей от переменной величины x .

С этой целью в рассмотрение введем средние по величине контактные напряжения σ_m , полученные путем деления действующей силы F_n (нормальной силы) на площадь контакта.

Для получения напряжений σ_m воспользуемся законом распределения усилий в пределах дуги охвата тросом блока, приведенным на рис. 2, в соответствии с которым запишем уравнение:

$$F_n = 2 \int_0^{\pi/2} \sigma_m R \cdot 2a \cdot \cos \varphi d\varphi = 4R \cdot a \cdot \sigma_m,$$

исходя из которого найдем:

$$\sigma_m = \frac{F_n}{4aR}. \quad (6)$$

В качестве основной зависимости, характеризующей взаимосвязь между упругими перемещениями W тел и возникающими при этом в телах напряжениями σ , примем выражение [Попов А.П., 2008]

$$W = C_m \sigma, \quad (7)$$

где: C_m – размерный параметр в мм/МПа, определение которого будет дано далее.

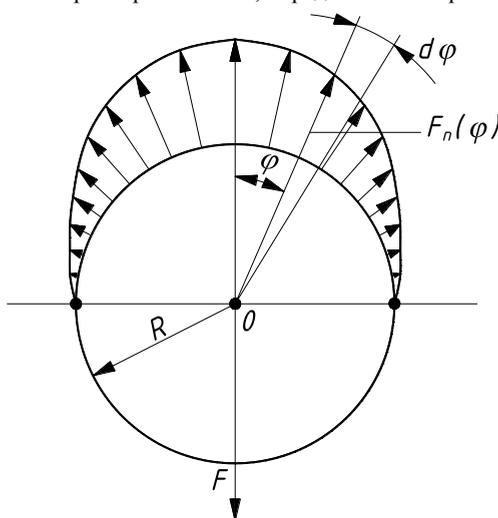


Рис. 2. Схема распределения усилий, возникающих между тросом и канатным блоком
Fig. 2. Chart of distribution of efforts arising up between a rope and rope block

Размерный параметр C_m , как и функция (5), даны для случая, когда коэффициенты Пуассона μ_1 и μ_2 , как и модули упругости материалов E_1 и E_2 , равны друг другу. Так как практический интерес представляет решение задачи для случая $\mu_1 \neq \mu_2$ и $E_1 \neq E_2$, то на рассмотрении этой задачи и остановимся.

При этом необходимо отметить, что при решении задачи будут фигурировать размерные параметры C_{m1} и C_{m2} , относящиеся к первому и второму упруго сжатым телам. С физической точки зрения размерные параметры C_{m1} и C_{m2} представляют собой величины деформаций первого и второго тел, измеряемые в миллиметрах при действии напряжений, равных одному МПа.

Напряжения в месте соприкосновения тел характеризуются действием одной и той же силы и одинаковой площадкой смятия (контакта). В связи с этим можно принять

$C_{m1} = C_{m2}$, причем $C_{m1} + C_{m2} = C_m$. В действительности при неизменной по размерам площадке контакта параметры C_{m1} и C_{m2} отличаются друг от друга вследствие разных значений ν_1, ν_2 и E_1, E_2 .

Так как в большинстве случаев трос и блок изготавливаются из сталей, то принятое допущение о равенстве между собой размерных параметров C_{m1} и C_{m2} можно считать обоснованным.

На основе изложенного с учетом выражения (7), полагая $C_m = C_{m1}$ и $C_m = C_{m2}$, а также $\sigma = \sigma_1$ и $\sigma = \sigma_2$, запишем уравнение:

$$W = W_1 + W_2 = C_{m1}\sigma_1 + C_{m2}\sigma_2, \quad (8)$$

где: W_1, W_2 – упругие перемещения, как уже отмечалось, первого и второго взаимодействующих тел; σ_1, σ_2 – контактные напряжения первого и второго тел.

Выражения контактных напряжений σ_1 и σ_2 в соответствии с законом Гука имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{\varepsilon E_1}{1 - \nu_1^2} = \frac{E_1}{1 - \nu_1^2} \cdot \frac{\Delta L}{L} \\ \sigma_2 &= \frac{\varepsilon E_2}{1 - \nu_2^2} = \frac{E_2}{1 - \nu_2^2} \cdot \frac{\Delta L}{L} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

где: $\varepsilon = \Delta L / L$ – относительная деформация; ΔL – абсолютная деформация; L – некоторый условный линейный размер, который в соответствии с [Попов А.П., 2008] принимаем равным ширине площадки контакта $2a$, т.е. $L = 2a$.

С учетом уравнений (9) зависимость (8) представим в виде двух равнозначных выражений, а именно:

$$\left. \begin{aligned} W_1 &= 2C_{m1}\sigma_1 = \frac{2C_{m1} \cdot E_1}{1 - \nu_1^2} \cdot \frac{\Delta L}{L} \\ W_2 &= 2C_{m2}\sigma_2 = \frac{2C_{m2} \cdot E_2}{1 - \nu_2^2} \cdot \frac{\Delta L}{L} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Исходя из равенства между собой упругих перемещений и деформаций, т.е. полагая $W = \Delta L$, из выражений (10) определим зависимости размерных параметров приняв $L = 2a$, а именно:

$$\left. \begin{aligned} C_{m1} &= \frac{(1 - \nu_1^2)a}{E_1} \\ C_{m2} &= \frac{(1 - \nu_2^2)a}{E_2} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

На основе зависимостей (6) и (11), приняв в формуле (6) $\sigma_m = \sigma_{m1} = \sigma_{m2} = F_n / 4aR$, найдем уравнения контакта податливости каждого из взаимодействующих между собой тел:

$$\left. \begin{aligned} \delta_{\kappa 1} &= \frac{C_{m1} \sigma_{m1}}{F_n} = \frac{1 - \nu_1^2}{4RE_1} \\ \delta_{\kappa 2} &= \frac{C_{m2} \sigma_{m2}}{F_n} = \frac{1 - \nu_2^2}{4RE_2} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Затем, умножив ширину площадки контакта $2a$ на сумму $\delta_{\kappa 1} + \delta_{\kappa 2}$, определим в виде константы коэффициент постели:

$$A = 2a(\delta_{\kappa 1} + \delta_{\kappa 2}) = \left(\frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \right) \cdot \frac{a}{2R}. \quad (13)$$

В соответствии с выражением (13) вторая функция контактных деформаций при $A(x) = A = const$ примет окончательный вид:

$$W(x) = \frac{a}{2R} \left(\frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \right) \cdot \varpi(x). \quad (14)$$

Таким образом, располагая уравнениями (3) и (14), запишем выражение напряженно-деформированного состояния тел:

$$A \int_{-a}^a \varpi(x) dx = AF_n = \frac{aF_n}{2R} \left(\frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \right) = \frac{1}{2r_{np}} \int_{-a}^a (a^2 - x^2) dx = \frac{2a^3}{3r_{np}},$$

исходя из которого найдем зависимость полуширины площадки контакта:

$$a = 0,866 \sqrt{\frac{r_{np} F_n}{R} \left(\frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \right)}. \quad (15)$$

Умножив и разделив правую часть выражения (5) на $2R$ при $A(x) = A$, получим зависимость:

$$W(x) = A \cdot \varpi(x) \frac{2R}{2R} = 2AR \cdot \sigma(x),$$

исходя из которой с учетом функции (3) определим функцию контактных напряжений:

$$\sigma(x) = \frac{W(x)}{2AR} = \frac{a^2 - x^2}{4ARr_{np}}. \quad (16)$$

При $x = 0$ из выражения (16) найдем зависимость максимальных контактных напряжений:

$$\sigma_{\max} = \frac{a^2}{4r_{np} AR},$$

которая после подстановки в нее правой части уравнения (13) примет вид:

$$\sigma_{\max} = 0,433 \sqrt{\frac{F_n}{r_{np} \cdot R \left(\frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \right)}}. \quad (17)$$

При $\nu_1 = \nu_2 = \nu = 0,3$ и $E_1 = E_2 = E$, т.е. при материалах троса и канатного блока, изготовленных из одинаковых сталей, уравнения (15) и (17) будут сведены к более упрощенному виду:

$$a = 1,168 \sqrt{\frac{r_{np} F_n}{RE}}, \tag{18}$$

$$\sigma_{max} = 0,321 \sqrt{\frac{EF_n}{r_{np} R}}. \tag{19}$$

Оценим достоверность полученных решений, заменив рассматриваемую модель моделью контакта двух упруго сжатых круговых цилиндров длиной b с учетом их внутреннего соприкосновения. В этом случае средние контактные напряжения будут равны:

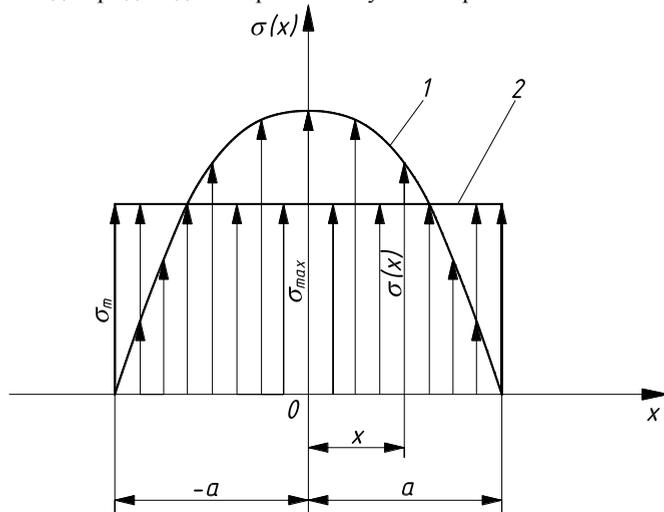
$$\sigma_m = \frac{F_n}{2ab}. \tag{20}$$

Сравнивая правые части выражений (6) и (20), отмечаем, что $4aR = 2ab$, откуда $R = b/2$. В соответствии со сказанным, подставив в уравнения (18) и (19) вместо радиуса R половину длины цилиндров, т.е. $b/2$, получим выражения:

$$a = 1,168 \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{r_{np} F_n}{bE}} = 1,652 \sqrt{\frac{r_{np} F_n}{bE}}, \tag{21}$$

$$\sigma_{max} = 0,321 \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{EF_n}{r_{np} b}} = 0,454 \sqrt{\frac{EF_n}{r_{np} b}}. \tag{22}$$

Сравнивая выражения (21) и (22) с выражениями полуширины площадки контакта и максимальных контактных напряжений, полученных в [Попов А.П., 2008] применительно к параболическому закону изменения контактных деформаций (3), отмечаем, что найденные нами уравнения (21) и (22) идентичны таковым, приведенным в данной книге. Данное обстоятельство подтверждает достоверность полученных решений.



**Рис. 3. Эпюры распределения напряжений в пределах ширины площадки контакта $2a$:
 1 – реальная эпюра; 2 – замененная прямоугольная эпюра**
**Fig. 3. Epures of distribution of tensions within the limits of width of ground of contact of $2a$:
 1 – real epure; 2 – transferable rectangular epure**

К вышеизложенному следует добавить, что площади реальной 1 и замененной 2 эпюры напряжений (рис. 3) должны быть равны между собой, а именно:

$$\sigma_m \int_{-a}^a dx = \int_{-a}^a \sigma(x) dx. \quad (23)$$

Для определения функции $\sigma(x)$, входящей в равенство (23), воспользуемся уравнением (3), которое представим так:

$$W(x) = W_{\max} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right), \quad (24)$$

где: $W_{\max} = a^2 / 2r_{np}$ – максимальная величина деформации.

В соответствии с уравнением (24) выражение функции $\sigma(x)$ примет вид:

$$\sigma(x) = \sigma_{\max} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right). \quad (25)$$

С учетом зависимости (25) выражение (23) представим следующим образом:

$$\sigma_m \int_{-a}^a dx = 2a\sigma_m = \sigma_{\max} \int_{-a}^a \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) dx = \frac{4a\sigma_{\max}}{3}.$$

Исходя из последнего уравнения, запишем

$$\sigma_m = \frac{2\sigma_{\max}}{3} \quad \text{или} \quad \sigma_{\max} = \frac{3\sigma_m}{2}.$$

В заключение отметим, что при использовании полученных выражений следует исходить из соотношения $r_2 / r_1 \geq 1,1 \dots 1,2$.

Выполним расчет по приведенным функциям, исходя из $r_1 = 18$ мм; $r_2 = 1,1r_1 \approx 20$ мм; $R = 800/2 = 400$ мм; $F_n = 18,4 \cdot 10^4$ Н; $\nu = 0,3$; $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа.

По общеизвестной формуле находим:

$$r_{np} = \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} = \frac{18 \cdot 20}{20 - 18} = 180 \text{ мм},$$

а по формулам (18) и (19) определяем:

$$a = 1,168 \sqrt{\frac{180 \cdot 18,4 \cdot 10^4}{400 \cdot 2,1 \cdot 10^5}} = 0,733 \text{ мм} = 733 \text{ мкм},$$

$$\sigma_{\max} = 0,321 \sqrt{\frac{2,1 \cdot 10^5 \cdot 18,4 \cdot 10^4}{180 \cdot 400}} = 235,15 \text{ МПа}.$$

Указанная величина $\sigma_{\max} = 235,15$ МПа несколько превышает, как уже указывалось ранее, действительную величину напряжений смятия на витках троса. В связи со сказанным можно утверждать, что указанная величина напряжений позволит обеспечить надежную работоспособность устройства в течение заданного срока службы.

ВЫВОДЫ

Разработана новая методика решения контактной задачи, которая базируется на обобщенном законе Гука, гипотезе Винклера, на введении в рассмотрение размерных параметров, размерных коэффициентов постели (плоская задача). Рассмотренная теория

распространяется не только на случай линейной зависимости между упругими перемещениями и напряжениями, но и впервые на случай нелинейной зависимости. Данная теория контактной прочности базируется на получении двух равнозначных функций контактных деформаций. Полученные решения полностью совпадают с решениями Герца (плоская задача).

ЛИТЕРАТУРА

1. Hertz H. Über die Berührung fester elastischer Körper / H. Hertz. // J. für Reine und Angewandte Mathematik. — 1881. — Bd. 92.
2. Hertz H. Über die Berührung fester elastischer Körper und über die Härte / H. Hertz // Verhandlungen des Vereines zur Beförderung des Geverbefleisses. — Berlin. Nov. — 1882. — 449 s.
3. Hertz H. Gesammelte Werke / H. Hertz. — Leipzig. — 1895. — Bd. 1. — S. 155—196.
4. Когаев В.П. Прочность и износостойкость деталей машин / В.П. Когаев, Ю.Н. Дроздов — М.: Высш. шк., 1991. — 319 с.
5. Динник А.Н. Удар и сжатие упругих тел / А.Н. Динник // Известия Киевского политехнического института. — 1909. — Кн. 4.
6. Беляев Н.М. Труды по теории упругости и пластичности / Беляев Н.М. - М., 1957. — 632 с.
7. Фёппль А. Сила и деформация / А. Фёппль, Л. Фёппль: Т. I. и II. — М.: ОНТИ, 1936.
8. Петрусеви́ч А.И. Расчет зубчатых колес, принятый в ЦКБР / А.И. Петрусеви́ч // Редукторостроение. — М.: Оргметалл. — 1935.
9. Левина З.М. Контактная жесткость машин / З.М. Левина, Д.Н. Решетов. — М.: Машиностроение, 1971. — 264 с.
10. Palmgren A. Die Lebensdauer von Kugellagern / A. Palmgren // Z. V. D. Y. —1924. — Rd 68, №14.
11. Пинегин С.В. Контактная прочность в машинах / С.В. Пинегин — М.: Машиностроение, 1965. — 192 с.
12. Пинегин С.В. Контактная прочность и сопротивление качению / С.В. Пинегин — М.: Машиностроение, 1969. — 243 с.
13. Рыжов Э.В. Контактное взаимодействие твердых тел при статических и динамических нагрузках / Э.В. Рыжов, Ю.В. Колесников, А.Г. Суслов — К.: Наукова думка, 1982. — 172 с.
14. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мухелишвили. — М. — Л., 1954.
15. Штаерман И.Я. К теории Герца местных деформаций при сжатии упругих тел / И. Я. Штаерман // ДАН. — 1939. — Т. 25, № 5.
16. Контактная прочность пространственных конструкций: [сб. начн. работ / научн. ред. Моссаковский В.И. и др.] — К.: Наукова думка, 1976. — 200 с.
17. Контактное взаимодействие твердых тел и расчет сил трения и износа. Посвящается 60-летию профессора, доктора технических наук, заслуженного деятеля науки и техники РСФСР И.В. Крагельского: [сб. начн. работ / отв. ред. академик А.Ю. Ишлинский, д.т.н. Н.Б. Демкин]. — М.: Наука, 1971. — 239 с.
18. Проблемы прочности и пластичности. К 100 – летию со дня рождения академика АН УССР Н.Н. Давиденкова – Л.: Наука, 1979. — 120 с.
19. Бутаков Б.И. Повышение контактной прочности стальных деталей с помощью поверхностного пластического деформирования / Б.И. Бутаков, Д.Д. Марченко // Проблеми трибології. — 2008. - № 1. - С. 14 – 23.
20. Попов А.П. Контактная прочность зубчатых механизмов / А.П. Попов – Николаев: Изд-во НУК, 2008. — 580 с.

DETERMINATION of the TENSELY-DEFORMED STATE of BODIES AT THEIR PIN CO-OPERATION. PIN TASK

Summary. A decision over of pin task of the tensely-deformed bodies is brought in the article, on the example of work of steel rope block and rope, the decision of which is based on bases of new methodology of theoretical researches of pin durability of the resiliently compressed half-spaces, limited to the curvilinear surfaces as it applies to initial linear co-operation of tel.

Key words: pin task, tensely-deformed state, rope block, rope.

Reviewer: Yury Seleznyov, Prof. Sc. D. Eng.