

Aproksymacja i ekstrapolacja przyrostu promienia pierśnicy jodły *Abies alba* Mill.

Rafał Podlaski

Abstrakt. Celem pracy jest przedstawienie różnych sposobów aproksymacji i ekstrapolacji trendu przyrostu promienia pierśnicy jodeł *Abies alba* Mill. o schematach przyrostu odmiennych od typowego modelu wykładniczego. Jodły wykazujące te schematy przyrostu wzrastały pod okapem lub w lukach drzewostanu, w zmieniających się warunkach świetlnych. Do badań losowo wybrano 10 jodeł w wieku powyżej 160 lat, bez uszkodzeń (stopień ubytku aparatu asymilacyjnego do 10%), w leśnictwach Święta Katarzyna i Święty Krzyż, w Świętokrzyskim Parku Narodowym. Aproksymowano i ekstrapolowano przyrost, wykorzystując modele i procedury opracowane dla szeregów czasowych. Do aproksymacji najbardziej uniwersalna okazała się funkcja sklejana i filtrowanie liniowe, natomiast do ekstrapolacji najbardziej przydatny jest model sieci neuronowych (NNAR) i model autoregresyjny $AR(p)$ z transformacją Boxa-Coxa (ARBC).

Słowa kluczowe: przyrost promienia, szereg czasowy, model Holta-Wintersa, model autoregresyjny $AR(p)$, transformacja Boxa-Coxa, sieci neuronowe

Abstract. Approximation and extrapolation of dbh radial increment of fir *Abies alba* Mill. The study presents different ways of approximation and extrapolation of the trend of dbh radial increment of silver firs (*Abies alba* Mill.) that have increment pattern different from a typical exponential one. Firs showing these increment patterns grew under the tree canopy or in the gaps, in changing light conditions. Sampling was carried out in Święta Katarzyna and Święty Krzyż forest sections in the Świętokrzyski National Park, where 10 trees more than 160 years old without damage (loss of assimilative apparatus up to 10%) were randomly selected. The increment was approximated and extrapolated using models and procedures developed for the time series. Spline functions and linear filtering are the most versatile for approximation, while the neural network model (NNAR) and the autoregression $AR(p)$ model with the Box-Cox transformation (ARBC) are the most useful for extrapolation.

Key words: radial increment, time series, Holt-Winters model, autoregression $AR(p)$ model, Box-Cox transformation, neural network

Wstęp

Sezonowość przyrostu grubości drzew w naszej strefie klimatycznej pozwala na traktowanie danych przyrostowych jako szeregów czasowych (jeden rok — jeden słoż przyrostu). Szereg czasowy to realizacja procesu stochastycznego w określonych przedziałach czasowych. Analiza

szeregów czasowych polega m.in. na wyodrębnieniu składowej systematycznej i przypadkowej. Składowa systematyczna może wykazywać obecność lub brak tendencji, czyli trend lub stały poziom, oraz posiada składową okresową, na którą składają się wahania cykliczne lub sezonowe. Traktując przyrosty promienia pierśnicy jako realizacje procesu stochastycznego zachodzące w rocznych interwałach, do aproksymacji i ekstrapolacji przyrostów stosuje się modele oraz procedury opracowane dla szeregów czasowych.

Celem pracy jest przedstawienie wybranych sposobów aproksymacji i ekstrapolacji trendu przyrostu promienia pierśnicy jodeł *Abies alba* Mill., charakteryzujących się odmiennym od typowego modelu wykładniczego przebiegiem zmian szerokości słoja przyrostu rocznego w czasie, przy pomocy modeli i procedur stosowanych podczas badania szeregów czasowych. Analizowano następujące hipotezy badawcze dotyczące trendu przyrostu promienia pierśnicy jodeł, ukształtowanego w wyniku wzrastania drzew w różnych i zmieniających się warunkach świetlnych drzewostanu:

- najbardziej uniwersalna do aproksymacji trendu jest funkcja sklejana;
- najbardziej przydatny do ekstrapolacji trendu jest model sieci neuronowych.

Material i metody

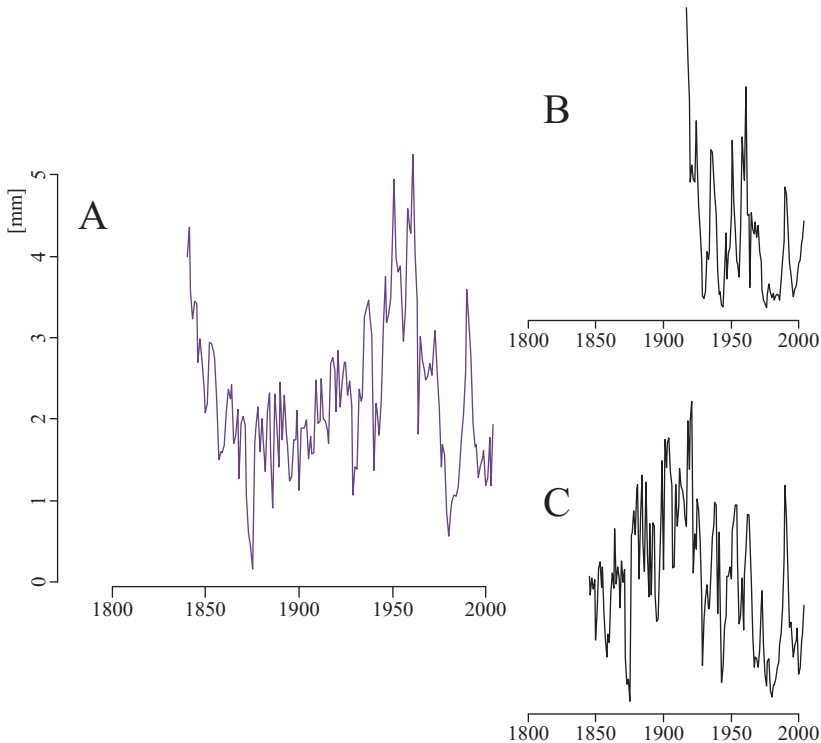
Jodły wybrano w leśnictwach Święta Katarzyna i Święty Krzyż w Świętokrzyskim Parku Narodowym (50°50'–50°53'N, 20°48'–21°05'E). Na terenie objętym badaniami dominowały gleby brunatne kwaśne i płowe właściwe (Kowalkowski 2000). W tych warunkach wykształciły się zespoły *Dentario glandulosae–Fagetum*, *Abietetum polonicum* i *Quercu roboris–Pinetum* (Matuszkiewicz 2008). Z danych uzyskanych na podstawie obserwacji w latach 1955–1994, przeprowadzonych na stacji meteorologicznej na Świętym Krzyżu (575 m n.p.m.) wynika, że w analizowanym okresie średnia roczna temperatura wynosiła +5,9°C, średnia temperatura stycznia –5,2°C, a lipca +15,9°C. Średnia roczna suma opadów to 923 mm. Termiczne lato trwało przeciętnie 57 dni, natomiast termiczna zima 121 dni (Olszewski i in. 2000).

Wykorzystując schemat losowania indywidualnego nieograniczonego w polach siatki Systemu Informacji o Ukształtowaniu Środowiska Przyrodniczego SINUS (Ciołkosz 1991; Podlaski 2005) wybrano 251 punktów badawczych, w otoczeniu których, w promieniu do 100 m (w kilku przypadkach do 200 m), wybrano 40 jodeł w wieku powyżej 160 lat (w pobliżu większości wylosowanych punktów badawczych rosły tylko jodły z młodszych generacji). W 2005 roku badane jodły zostały dwukrotnie nawiercone (od strony stoku i prostopadłe do pierwszego wywiertu) świdrem przyrostowym Presslera na wysokości 1,3 m od powierzchni gruntu. Ponadto oceniono ich zdrowotność, szacując stopień ubytku aparatu asymilacyjnego. Do weryfikacji poprawności pomiaru, synchronizacji czasowej oraz oceny stopnia homogeniczności serii dla badanych jodeł wykorzystano program COFECHA (Grissino-Mayer 2001). Ostatecznie wyselekcjonowano 10 jodeł cechujących się (1) brakiem uszkodzeń (stopień ubytku aparatu asymilacyjnego dla tych drzew był mniejszy lub równy 10%) oraz (2) poprawnie zmierzonymi przyrostami i następnie wyodrębniono 10 chronologii uśrednionych z dwóch wywiertów.

Porównano kilka metod aproksymacji i ekstrapolacji szeregów czasowych (Zeliaś 1997; Shumway i Stoffer 2011). Do aproksymacji średniego przyrostu zastosowano: funkcję wykładniczą (w przypadku braku możliwości dopasowania funkcji wykładniczej wykorzystano funkcję prostoliniową), funkcję sklejaną oraz filtrowanie liniowe (średnia ruchoma i dekompozycja okresowa). Do ekstrapolacji na okres 20 lat średniego i przeskalowanego za pomocą

funkcji prostoliniowej przyrostu zastosowano modele: Holta-Wintersa, autoregresyjny $AR(p)$ z transformacją Boxa-Coxa oraz sieci neuronowych. Przyjęty do ekstrapolacji okres 20 lat jest stosunkowo długi, ponieważ większość prognoz stosowanych np. podczas oceny zdrowotności i żywotności drzew na podstawie przyrostu grubości obejmuje przedział do 10 lat.

Model Holta-Wintersa (HW) bazuje na wygładzaniu wykładniczym, w którym do ekstrapolacji szeregu czasowego wykorzystywana jest ważona średnia ruchoma o wagach malejących wykładniczo wraz z odległością w czasie. Wyróżniamy trzy główne rodzaje modeli Holta-Wintersa: (1) bez sezonowości, (2) z sezonowością multiplikatywną i (3) z sezonowością addytywną. Do ekstrapolacji przyrostu zastosowano model bez sezonowości, uwzględniający trend i wahania przypadkowe (Holt 1957; Winters 1960). Model autoregresyjny $AR(p)$ z transformacją Boxa-Coxa (ARBC) pozwala na ekstrapolację transformowanego szeregu czasowego na podstawie autokorelacji między wartościami opóźnionymi a wartościami ekstrapolowanymi (Box i Cox 1964; Brockwell i Davis 1991). Transformacja Boxa-Coxa została wykorzystana do stabilizacji wariancji szeregu czasowego. W modelu autoregresyjnym $AR(p)$ wybór stopnia



Ryc. 1. Przyrost promienia pierśnicy dla jodeł o przyroście odmiennym od typowego modelu wykładniczego i/lub prostoliniowego; (A) przyrost średni; (B) przyrost mniej więcej stały w całym zakresie; (C) przyrost w pierwszej fazie rosnący, a w drugiej malejący

Fig. 1. The dbh radial increment of fir of growth different from a typical exponential and/or linear model, (A) average values; (B) the increment more or less constant throughout the range; (C) the increment in the first phase increasing, and in the second decreasing

p odbywał się z wykorzystaniem kryterium AIC (*Akaike Information Criterion*). Model sieci neuronowych (NNAR) wykorzystuje sieć typu FFN (*Feed-Forward Network*). Sieć składa się z warstwy wejściowej, jednej warstwy ukrytej i warstwy wyjściowej (Granger i Teräsvirta 1993). Do warstwy wejściowej wprowadzono opóźnione wartości szeregu czasowego. Liczba jednostek w warstwie wejściowej została określona za pomocą modelu autoregresyjnego $AR(p)$. Liczba jednostek w warstwie ukrytej wynosiła połowę jednostek warstwy wejściowej plus jedna.

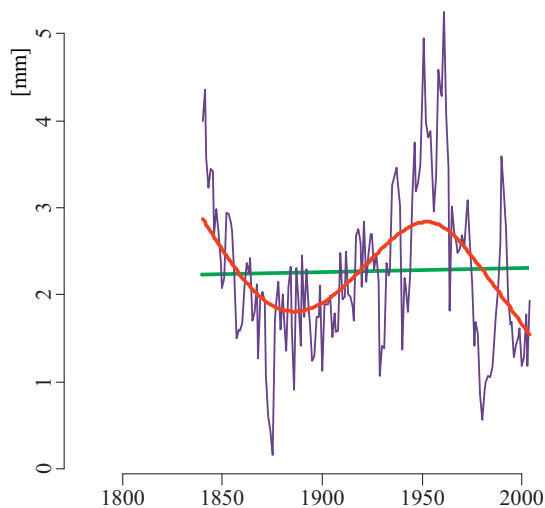
Precyzję ekstrapolacji oceniono, obliczając błąd średni (ME), pierwiastek z błędu średniokwadratowego (RMSE), błąd średni bezwzględny (MAE), błąd średni procentowy (MPE) oraz błąd średni bezwzględny procentowy (MAPE) (Zeliaś i in. 2003; Shumway i Stoffer 2011). Wszystkie obliczenia przeprowadzono w środowisku R (wykorzystano m.in. funkcję *smooth.spline, filter, stl, HoltWinters, BoxCox.lambda, BoxCox, ar* oraz *nnetar*) (Cowpertwait i Metcalfe 2009; R Development Core Team 2010).

Wyniki i dyskusja

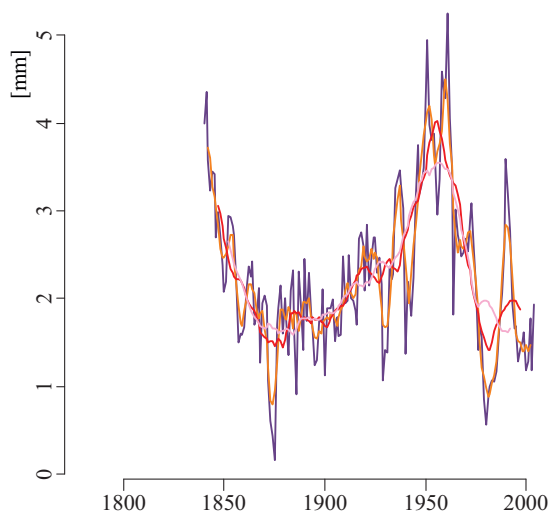
Średni przyrost obliczony dla wszystkich drzew najpierw zmniejszał się, osiągnął minimum, następnie jego wartości wzrosły, osiągnął maksimum i ponownie zmniejszał się (ryc. 1A). W przypadku pojedynczych jodeł przebieg przyrostu był bardziej zróżnicowany, np. mniej więcej stały w całym zakresie (ryc. 1B) lub w pierwszej fazie rosnący, a w drugiej malejący (ryc. 1C). Prace wielu autorów również wskazują na podobny przebieg przyrostu jodły rosnącej w drzewostanach o złożonej budowie (np. Pividori 1991; Pretzsch 1996).

Funkcja wykładnicza, a w przypadku braku możliwości dopasowania funkcji wykładniczej funkcja prostoliniowa, aproksymuje średni trend przyrostu promienia pierśnicy badanych jodeł bardzo niedokładnie (ryc. 2). Obie te funkcje nie powinny być stosowane w przypadku wyrównywania przyrostu drzew rosnących pod okapem lub w lukach drzewostanu, w zmieniających się warunkach świetlnych (Fritts 1976). Funkcja sklejana oraz filtrowanie liniowe pozwalają na dokładną aproksymację średniego trendu przyrostu badanych jodeł cechujących się przyrostem odmiennym od modelu wykładniczego i/lub prostoliniowego (ryc. 2, 3, 4). Przyrosty rzeczywiste można aproksymować z różną precyzją, analizując przebieg krótko-, średnio- lub długo-okresowy (ryc. 4). Na dużą uniwersalność funkcji sklepanej zwracają uwagę m. in. Bośeł'a i in. (2011). Należy jednak pamiętać, że funkcja sklejana oraz filtrowanie liniowe nie uwzględniają biologicznych aspektów trendu przyrostu (Cook i in. 1990).

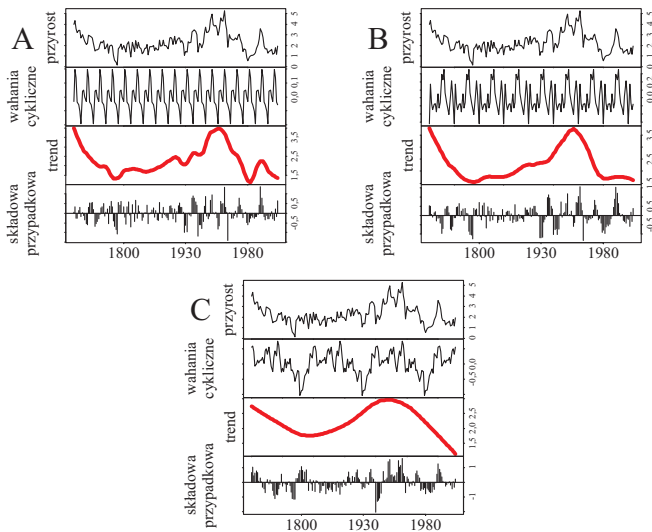
Prognozowanie przebiegu przyrostu jest uzależnione od jego stabilności. W przypadku okresów cechujących się stabilnym przyrostem, bez gwałtownych zmian trendu, do ekstrapolacji 20-letniej można wykorzystać wszystkie analizowane modele, natomiast dla okresów charakteryzujących się istotnymi zmianami trendu najlepsze wyniki uzyskano w przypadku modelu autoregresyjnego $AR(p)$ z transformacją Boxa-Coxa i modelu sieci neuronowych. Jeżeli ekstrapolacja obejmuje trend przyrostu rzeczywistego zbliżony do trendu prostoliniowego, to model Holta-Wintersa wykazuje precyzję zbliżoną do dwóch poprzednich modeli (ryc. 5A, C; 6A, C; 7A, C). W przypadku ekstrapolacji obejmującej ekstremum trendu przyrostu rzeczywistego najdokładniejsze rezultaty uzyskano dla modelu sieci neuronowych i modelu autoregresyjnego $AR(p)$ z transformacją Boxa-Coxa (ryc. 5B, D; 6B, D; 7B, D). Odpowiednie wartości błędów obliczonych dla tych dwóch modeli są bardziej zbliżone do zera w porównaniu z modelem Holta-Wintersa (ryc. 5, 6, 7). Przeprowadzone obliczenia potwierdzają mniejszą „elastyczność” modelu Holta-Wintersa (Shumway i Stoffer 2011).



Ryc. 2. Aproksymacja średniego przyrostu promienia z wykorzystaniem funkcji sklepanej (kolor czerwony) oraz funkcji prostoliniowej (kolor zielony, w sytuacji braku możliwości dopasowania funkcji wykładniczej)
Fig. 2. Approximation of the average radial increment using spline functions (red colour) and linear function (green colour, in the situation of the lack of ability of fitting with the exponential function)

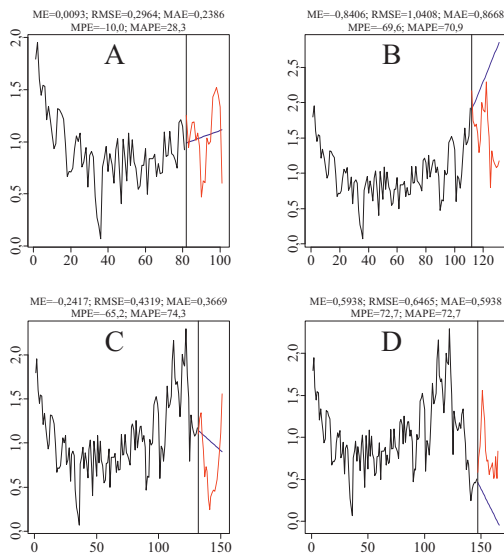


Ryc. 3. Aproksymacja średniego przyrostu promienia z wykorzystaniem filtrowania liniowego – średnia ruchoma z równymi wagami; kolorami zaznaczono różne współczynniki filtrowania
Fig. 3. Approximation of the average radial increment using linear filtering – moving averages with equal weights; colours indicated different coefficients of the filtering



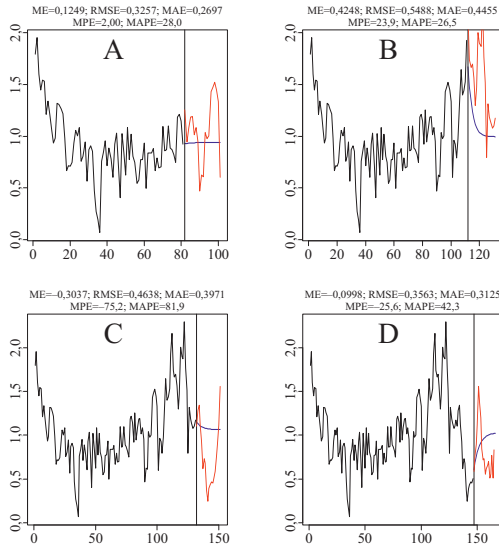
Ryc. 4. Aproksymacja średniego przyrostu promienia z wykorzystaniem filtrowania liniowego – dekompozycja okresowa; liczba przyraddków w okresie: 10 (A), 20 (B), 50 (C)

Fig. 4. Approximation of the average radial increment using linear filtering – seasonal decomposition; number of increments in the period: 10 (A), 20 (B), 50 (C)

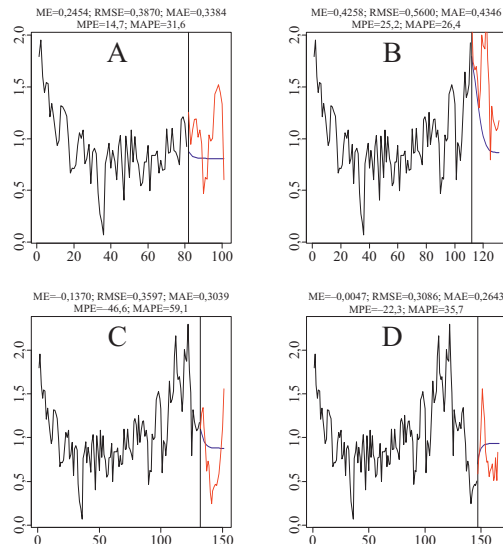


Ryc. 5. Ekstrapolacja na 20 lat średniego przyrostu promienia z wykorzystaniem modelu Holta-Wintersa od 1920 (A), 1950 (B), 1970 (C) i 1985 (D) (wartości przewidywane – kolor granatowy, dane rzeczywiste – kolor czerwony)

Fig. 5. Extrapolation of the average radial increment for 20 years using the Holt-Winters model since 1920 (A), 1950 (B), 1970 (C) and 1985 (D) (predicted values – dark blue colour, empirical data – red colour)



Ryc. 6. Ekstrapolacja na 20 lat średniego przyrostu promienia z wykorzystaniem modelu Boxa-Coxa od 1920 (A), 1950 (B), 1970 (C) i 1985 (D) (wartości przewidywane – kolor granatowy, dane rzeczywiste – kolor czerwony)
Fig. 6. Extrapolation of the average radial increment for 20 years using the Box-Cox model since 1920 (A), 1950 (B), 1970 (C) and 1985 (D) (predicted values – dark blue colour, empirical data – red colour)



Ryc. 7. Ekstrapolacja na 20 lat średniego przyrostu promienia z wykorzystaniem modelu sieci neuronowych od 1920 (A), 1950 (B), 1970 (C) i 1985 (D) (wartości przewidywane – kolor granatowy, dane rzeczywiste – kolor czerwony)

Fig. 7. Extrapolation of the average radial increment for 20 years using the neural networks model since 1920 (A), 1950 (B), 1970 (C) and 1985 (D) (predicted values – dark blue colour, empirical data – red colour)

Podsumowanie

Obie analizowane hipotezy badawcze zostały udowodnione i poszerzone. W przypadku analizy trendu przyrostu promienia pierśnicy drzew cechujących się dużą zdrowotnością i rosnących pod okapem lub w lukach drzewostanu, w zmieniających się warunkach świetlnych do aproksymacji najbardziej uniwersalna jest funkcja sklejana, ale podobną dokładność uzyskano dla filtrowania liniowego. Z kolei do ekstrapolacji najbardziej przydatny jest model sieci neuronowych, ale zblżyoną precyzję uzyskano dla modelu autoregresyjnego AR(p) z transformacją Boxa-Coxa.

Literatura

- Bošeľa M., Kulla L., Marušík R. 2011. Detrending ability of several regression equations in tree-ring research: a case study based on tree-ring data of Norway spruce (*Picea abies* [L.]). *J. For. Sci.* 491–499.
- Box G.E.P., Cox D. R. 1964. An analysis of transformations. *J. Roy. Stat. Soc. B.* 26: 211–246.
- Brockwell P. J., Davis R. A. 1991. *Time Series and Forecasting Methods*. Springer, New York.
- Ciołkosz A. 1991. SINUS – System informacji o środowisku przyrodniczym. W: Mazur S. (red.). *Ekologiczne podstawy gospodarowania środowiskiem przyrodniczym. Wizje – problemy – trudności*. Wyd. SGGW-AR, Warszawa: 317–328.
- Cook E.R., Briffa K., Shiyatov S., Mazepa A., Jones P. D. 1990. *Data Analysis*. W: Cook E.R., Kairiukstis L.A. (red.). *Methods of Dendrochronology: applications in the environmental sciences*. Boston: International Institute for Applied Systems Analysis, Kluwer Academic Publishers: 97–162.
- Cowpertwait P.S.P., Metcalfe A.V. 2009. *Introductory Time Series with R*. Springer, New York.
- Fritts H.C. 1976. *Tree Rings and Climate*. Academic Press, New York.
- Granger C.W., Teräsvirta T. 1993. *Modelling Nonlinear Economic Relationships*. Oxford University Press, Oxford.
- Grissino-Mayer H.D. 2001. Evaluating crossdating accuracy: A manual and tutorial for the computer program COFECHA. *Tree-Ring Res.* 57: 205–221.
- Holt C.C. 1957. Forecasting trends and seasonals by exponentially weighted moving averages. *ONR Research Memorandum, Carnegie Institute of Technology* 52.
- Kowalkowski A. 2000. *Gleby*. W: Cieśliński S., Kowalkowski A. (red.). *Świętokrzyski Park Narodowy. Przyroda, gospodarka, kultura*. Świętokrzyski Park Narodowy, Bodzentyn, Kraków: 169–196.
- Matuszkiewicz J.M. 2008. *Zespoły leśne Polski*. PWN, Warszawa.
- Olśzewski J.L., Szałach G., Żarnowiecki G. 2000. *Klimat*. W: Cieśliński S., Kowalkowski A. (red.). *Świętokrzyski Park Narodowy. Przyroda, Gospodarka, Kultura*. Świętokrzyski Park Narodowy, Bodzentyn: 129–145.
- Pividori M. 1991. Analisi degli incrementi e delle chiome in alcune stazioni di abete bianco (*Abies alba* Miller) del piano montano in Piemonte (Italia). *Dendroch.* 9: 143–164.
- Podlaski R. 2005. Inventory of the degree of tree defoliation in small areas. *For. Ecol. Manage.* 215: 361–377.

- Pretzsch H. 1996. Growth trends of forests in Southern Germany. W: Spiecker H., Mielikäinen K., Köhl M., Skovsgaard J.P. (red.). Growth Trends in European Forests. Berlin, Springer: 107–132.
- R Development Core Team 2010. R: A language and environment for statistical computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. ISBN 3-900051-07-0, URL <http://www.R-project.org/>
- Shumway R.H., Stoffer D.S. 2011. Time Series Analysis and its Applications. Springer, New York.
- Winters P.R. 1960. Forecasting sales by exponentially weighted moving averages. Manage. Sci. 6: 324–342.
- Zeliaś A. 1997. Teoria prognozy. PWE, Warszawa.
- Zeliaś A., Pawełek B., Wanat S. 2003. Prognozowanie ekonomiczne. PWN, Warszawa.

Rafal Podlaski

Uniwersytet Jana Kochanowskiego, Zakład Ochrony Przyrody
r_podlaski@pro.onet.pl