

СИНТЕЗ ЛИНЕЙНЫХ РЕГУЛЯТОРОВ ДЛЯ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫМИ КОЛЕБАНИЯМИ АВТОМОБИЛЬНЫХ КРАНОВ

Вячеслав Ловейкин, Юрий Човнюк, Константин Почка

Национальный университет биоресурсов и природопользования Украины

Украина, г. Киев, ул. Героев Обороны, 15

Vyacheslav Loveykin, Yuriy Chovnyuk, Konstantin Pochka

National University of Life and Environmental Sciences of Ukraine

Heroiv Oborony Str., 15, Kiev, Ukraine

Аннотация. Приведен синтез линейных регуляторов для задач оптимального управления нестационарными колебаниями, возникающими в режимах пуска/торможения автомобильных кранов. Для обоснования достаточных условий оптимальности решения указанной задачи, сформулированных В.Ф. Кротовым, установлено и решено методом неопределённых коэффициентов уравнение Р. Беллмана.

Ключевые слова: синтез, линейные регуляторы, оптимальное управление, нестационарные колебания, автомобильные краны.

ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ

Изучение нестационарных колебательных процессов в механических деформируемых системах, в частности, в автомобильных кранах, представляет большой интерес для современной техники в связи со значительным увеличением мощностей и скоростей движения машин.

Нестационарные колебания элементов автокрана, его двигателя внутреннего сгорания, корпуса на рессорах, колёс возникают при неустановившихся режимах работы, пуске и остановке, балансировке крана и т.д.

Наиболее полно изучены нестационарные колебания при переходе через резонанс линейных систем.

Однако исчерпывающего решения задач синтеза линейных регуляторов для оптимального управления нестационарными колебаниями автомобильных кранов, доведенного до практических применений, для многих линейных задач не было.

АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ ПОСЛЕДНИХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Необходимые условия оптимальности для задач оптимального управления были сформулированы Л.С. Понтрягиным в 1956 г. [2]. Достаточные условия обоснованы В.Ф. Кротовым [1]. Авторы [3-5] используют уравнение и функцию Р. Беллмана для установления оптимального управления движением механических систем, а также технологическими процессами. В данной работе использован именно такой подход для оптимизации переходных процессов, связанных с колебаниями автомобильных кранов, возникающими в режимах их пуска/торможения, смены режима движения [6-10].

ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Цель работы состоит в синтезе линейных регуляторов для задач оптимального управления нестационарными колебаниями автомобильных кранов. Для достижения указанной цели используется подход В.Ф. Кротова, устанавливается и решается уравнение Р. Беллмана, определяются параметры линейного регулятора, обеспечивающего оптимальный закон управления и движения автомобильного крана. Коэффициенты функции Р. Беллмана находятся способом, приведенным в [4, 5].

РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЙ

1. *Анализ колебаний автомобильного крана.*

Вначале определим частоты колебаний, предположив, что собственная частота вертикальных колебаний колёс значительно

СИНТЕЗ ЛИНЕЙНЫХ РЕГУЛЯТОРОВ ДЛЯ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫМИ КОЛЕБАНИЯМИ АВТОМОБИЛЬНЫХ КРАНОВ

выше собственной частоты колебаний корпуса на рессорах [10].

Вследствие большого различия собственных частот колёс и корпуса систему, схематизирующую движение корпуса автокрана на рессорах, можно представить в виде упруго подвешенного твёрдого тела (рис. 1). Такая система обладает двумя степенями свободы.

В качестве обобщённых координат, определяющих положение системы при колебаниях, примем вертикальное перемещение x центра масс автокрана (G) и угол φ поворота корпуса вокруг центра масс. Пусть m – масса автокрана, а J – момент инерции относительно оси, проходящий через центр масс, g – ускорение свободного падения.

Кинетическая энергия системы определяется по формуле:

$$T = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \cdot J \cdot \dot{\varphi}^2. \quad (1)$$

$$\Pi = \frac{1}{2} \cdot c_1 \cdot x_1^2 + \frac{1}{2} \cdot c_2 \cdot x_2^2 = \frac{1}{2} \cdot c_1 \cdot (x + l_1 \cdot \varphi)^2 + \frac{1}{2} \cdot c_2 \cdot (x - l_2 \cdot \varphi)^2. \quad (3)$$

Уравнения колебаний рассматриваемой системы записываются в виде:

$$\begin{cases} m \cdot \ddot{x} + (C_1 + C_2) \cdot x + (C_1 \cdot l_1 - C_2 \cdot l_2) \cdot \varphi = 0; \\ J \cdot \ddot{\varphi} + (C_1 \cdot l_1 - C_2 \cdot l_2) \cdot x + (C_1 \cdot l_1^2 + C_2 \cdot l_2^2) \cdot \varphi = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Полагая:

$$x = A_1 \cdot \sin(\lambda \cdot t + \delta); \quad \varphi = A_2 \cdot \sin(\lambda \cdot t + \delta), \quad (5)$$

найдем:

$$\ddot{x} = -A_1 \cdot \lambda^2 \cdot \sin(\lambda \cdot t + \delta); \quad \ddot{\varphi} = -A_2 \cdot \lambda^2 \cdot \sin(\lambda \cdot t + \delta). \quad (6)$$

Подставив x , φ и \ddot{x} , $\ddot{\varphi}$ в уравнения (4), получим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} (C_1 + C_2 - m \cdot \lambda^2) & (C_1 \cdot l_1 - C_2 \cdot l_2) \\ (C_1 \cdot l_1 - C_2 \cdot l_2) & (C_1 \cdot l_1^2 + C_2 \cdot l_2^2 - J \cdot \lambda^2) \end{vmatrix} = 0. \quad (7)$$

Раскрывая определитель в (7) и выполняя очевидные алгебраические преобразования, получим характеристическое уравнение в виде:

$$\lambda^4 - \left(\frac{C_1 + C_2}{m} + \frac{C_1 \cdot l_1^2 + C_2 \cdot l_2^2}{J} \right) \cdot \lambda^2 + \frac{C_1 \cdot C_2 \cdot (l_1 + l_2)^2}{m \cdot J} = 0. \quad (8)$$

Вычислив корни характеристического уравнения (8), найдем собственные частоты:

$$\Omega_{1,2} = \left\{ \frac{1}{2} \cdot \left[\left(\frac{C_1 + C_2}{m} + \frac{C_1 \cdot l_1^2 + C_2 \cdot l_2^2}{J} \right) \pm \sqrt{\left(\frac{C_1 + C_2}{m} + \frac{C_1 \cdot l_1^2 + C_2 \cdot l_2^2}{J} \right)^2 - \frac{4 \cdot C_1 \cdot C_2 \cdot (l_1 + l_2)^2}{m \cdot J}} \right] \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (9)$$

Составим выражение потенциальной энергии упругих сил рессор.

Из рис. 1 следует, что деформации рессор x_1 и x_2 можно определить по формулам:

$$x_1 \approx x + l_1 \cdot \varphi; \quad x_2 \approx x - l_2 \cdot \varphi. \quad (2)$$

Потенциальная энергия упругих сил определяется по формуле:

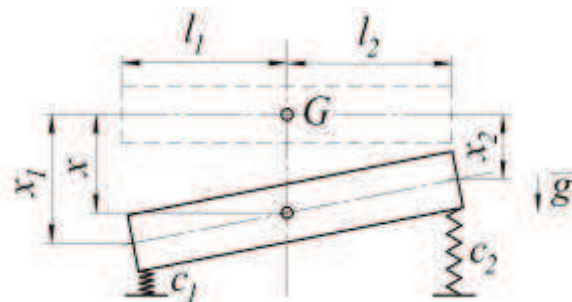


Рис. 1. Расчётная схема задачи
Fig. 1. Calculation chart of task

2. Синтез линейного регулятора для задачи оптимального управления нестационарными колебаниями автокрана в режиме пуска/торможения.

А. Минимизация угловых колебаний автокрана

Из первого уравнения системы (4) можно найти:

$$\varphi = \frac{-(m \cdot \ddot{x} + (C_1 + C_2) \cdot x)}{(C_1 \cdot l_1 - C_2 \cdot l_2)}. \quad (10)$$

Двукратное дифференцирование этого выражения по t (времени) даёт:

$$\ddot{\varphi} = \frac{-(m \cdot x^{(IV)} + (C_1 + C_2) \cdot \ddot{x})}{(C_1 \cdot l_1 - C_2 \cdot l_2)}. \quad (11)$$

Подставляя (10) и (11) во второе уравнение системы (4) получим:

$$x^{(IV)} + \frac{[(C_1 + C_2) \cdot J + (C_1 \cdot l_1^2 + C_2 \cdot l_2^2) \cdot m]}{J \cdot m} \cdot \ddot{x} + \frac{C_1 \cdot C_2 \cdot (l_1 + l_2)^2}{J \cdot m} \cdot x = 0. \quad (12)$$

Считая период разгона/торможения автокрана равным T , введём критерий качества движения машины, при котором минимальны угловые его (автокрана) колебания:

$$\int_0^T \varphi^2 dt \Rightarrow \min. \quad (13)$$

Учитывая соотношение (10), критерий (13) можно представить иначе:

$$\int_0^T (m \cdot \ddot{x} + [C_1 + C_2] \cdot x)^2 dt \Rightarrow \min. \quad (14)$$

Необходимое условие реализации критерия (14), а, значит, и (13) есть уравнение Эйлера:

$$x^{(IV)} + 2 \cdot \Omega^2 \cdot \ddot{x} + \Omega^4 \cdot x = 0; \quad \Omega^2 = \frac{(C_1 + C_2)}{m}. \quad (15)$$

Вычитая (15) из (12) получаем уравнение, определяющее закон движения $x(t)$, при котором минимальны угловые колебания автокрана в процессе его разгона (пуска/торможения):

$$\left[\frac{(C_1 \cdot l_1^2 + C_2 \cdot l_2^2)}{J} - \Omega^2 \right] \cdot \ddot{x} + \left[\frac{C_1 \cdot C_2 \cdot (l_1 + l_2)^2}{J \cdot m} - \Omega^4 \right] \cdot x = 0. \quad (16)$$

Уравнение (16) можно представить в виде:

$$\ddot{x} + \omega_{\varphi_{\min}}^2 \cdot x = 0, \quad (17)$$

где

$$\omega_{\varphi_{\min}}^2 = \frac{\left[\frac{C_1 \cdot C_2 \cdot (l_1 + l_2)^2}{J \cdot m} - \Omega^4 \right]}{\left[\frac{(C_1 \cdot l_1^2 + C_2 \cdot l_2^2)}{J} - \Omega^2 \right]}. \quad (18)$$

Возможны три случая, которые определяют оптимальный (в смысле минимизации угла поворота корпуса автокрана φ) закон движения машины $x(t)$:

а) $\omega_{\varphi_{\min}}^2 > 0$; при этом выполняются неравенства:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{C_1 \cdot C_2 \cdot (l_1 + l_2)^2}{J \cdot m} - \Omega^4 > 0; \\ \frac{(C_1 \cdot l_1^2 + C_2 \cdot l_2^2)}{J} - \Omega^2 > 0; \end{array} \right. \text{ либо } \left\{ \begin{array}{l} \frac{C_1 \cdot C_2 \cdot (l_1 + l_2)^2}{J \cdot m} - \Omega^4 < 0; \\ \frac{(C_1 \cdot l_1^2 + C_2 \cdot l_2^2)}{J} - \Omega^2 < 0. \end{array} \right. \quad (19)$$

Закон движения $x(t)$ имеет вид:

$$x(t) = A \cdot \sin(\omega_{\varphi_{\min}} \cdot t) + B \cdot \cos(\omega_{\varphi_{\min}} \cdot t). \quad (20)$$

б) $\omega_{\varphi_{\min}}^2 < 0$; при этом выполняются неравенства:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{C_1 \cdot C_2 \cdot (l_1 + l_2)^2}{J \cdot m} - \Omega^4 > 0; \\ \frac{(C_1 \cdot l_1^2 + C_2 \cdot l_2^2)}{J} - \Omega^2 < 0; \end{array} \right. \text{ либо } \left\{ \begin{array}{l} \frac{C_1 \cdot C_2 \cdot (l_1 + l_2)^2}{J \cdot m} - \Omega^4 < 0; \\ \frac{(C_1 \cdot l_1^2 + C_2 \cdot l_2^2)}{J} - \Omega^2 > 0. \end{array} \right. \quad (21)$$

Закон движения $x(t)$ имеет в этом случае вид:

$$x(t) = A \cdot \exp(-|\omega_{\varphi_{\min}}^1| \cdot t) + B \cdot \exp(+|\omega_{\varphi_{\min}}^1| \cdot t). \quad (22)$$

в) $\omega_{\varphi_{\min}}^2 = 0$; при этом выполняется равенство:

$$\Omega^4 = \frac{C_1 \cdot C_2 \cdot (l_1 + l_2)^2}{J \cdot m} \Rightarrow \frac{(C_1 + C_2)^2}{m^2} = \frac{C_1 \cdot C_2 \cdot (l_1 + l_2)^2}{J \cdot m}. \quad (23)$$

Закон движения $x(t)$ имеет вид для этого случая:

$$x(t) = A + B \cdot t. \quad (24)$$

Следует подчеркнуть, что константы A и B в (20), (22) и (24) определяются из начальных условий задачи.

Б. Минимизация линейных (вертикальных) колебаний автокрана

Из второго уравнения системы (4) можно найти:

$$x = \frac{-(J \cdot \ddot{\varphi} + (C_1 \cdot l_1^2 + C_2 \cdot l_2^2) \cdot \varphi)}{(C_1 \cdot l_1 - C_2 \cdot l_2)}. \quad (25)$$

Двукратное дифференцирование этого выражения по t даёт:

$$\ddot{x} = \frac{-(J \cdot \varphi^{(IV)} + (C_1 \cdot l_1^2 + C_2 \cdot l_2^2) \cdot \ddot{\varphi})}{(C_1 \cdot l_1 - C_2 \cdot l_2)}. \quad (26)$$

Подставляя (25) и (26) в первое уравнение системы (4) получим:

$$\varphi^{(IV)} + \frac{[(C_1 + C_2) \cdot J + (C_1 \cdot l_1^2 + C_2 \cdot l_2^2) \cdot m]}{J \cdot m} \cdot \ddot{\varphi} + \frac{C_1 \cdot C_2 \cdot (l_1 + l_2)^2}{J \cdot m} \cdot \varphi = 0. \quad (27)$$

Критерий качества движения машины теперь приобретает следующий вид:

$$\int_0^T x^2 dt \Rightarrow \min. \quad (28)$$

Учитывая соотношение (25), критерий (28) можно представить следующим образом:

$$\int_0^T (J \cdot \ddot{\varphi} + [C_1 \cdot l_1^2 + C_2 \cdot l_2^2] \cdot \varphi)^2 dt \Rightarrow \min. \quad (29)$$

Необходимое условие реализации критерия (29), а, значит, и (28) есть уравнение Эйлера:

$$\varphi^{(IV)} + 2 \cdot \tilde{\Omega}^2 \cdot \ddot{\varphi} + \tilde{\Omega}^4 \cdot \varphi = 0; \quad \tilde{\Omega}^2 = \frac{(C_1 \cdot l_1^2 + C_2 \cdot l_2^2)^{\frac{1}{2}}}{J^{\frac{1}{2}}}. \quad (30)$$

Вычитая (30) из (27) получаем уравнение, определяющее закон движения $\varphi(t)$, при котором минимальны линейные колебания по оси OX автокрана в процессе его разгона (пуска/торможения):

$$\left[\Omega^2 - \tilde{\Omega}^2 \right] \cdot \ddot{\varphi} + \left[\frac{C_1 \cdot C_2 \cdot (l_1 + l_2)^2}{J \cdot m} - \tilde{\Omega}^4 \right] \cdot \varphi = 0. \quad (31)$$

Уравнение (31) можно представить в виде:

$$\ddot{\varphi} + \omega_{x_{\min}}^2 \cdot \varphi = 0, \quad (32)$$

где

$$\omega_{x_{\min}}^2 = \frac{\left[\frac{C_1 \cdot C_2 \cdot (l_1 + l_2)^2}{J \cdot m} - \tilde{\Omega}^4 \right]}{\left[\Omega^2 - \tilde{\Omega}^2 \right]}. \quad (33)$$

Возможны три случая, которые определяют оптимальный (в смысле минимизации линейного перемещения вдоль оси OX корпуса автокрана) закон движения машины $\varphi(t)$:

а) $\omega_{x_{\min}}^2 > 0$; при этом выполняются неравенства:

$$\begin{cases} \frac{C_1 \cdot C_2 \cdot (l_1 + l_2)^2}{J \cdot m} - \tilde{\Omega}^4 > 0; \\ \Omega^2 - \tilde{\Omega}^2 > 0; \end{cases} \quad \text{либо} \quad \begin{cases} \frac{C_1 \cdot C_2 \cdot (l_1 + l_2)^2}{J \cdot m} - \tilde{\Omega}^4 < 0; \\ \Omega^2 - \tilde{\Omega}^2 < 0. \end{cases} \quad (34)$$

Закон движения $\varphi(t)$ имеет вид:

$$\varphi(t) = \tilde{A} \cdot \sin(\omega_{x_{\min}} \cdot t) + \tilde{B} \cdot \cos(\omega_{x_{\min}} \cdot t). \quad (35)$$

б) $\omega_{x_{\min}}^2 < 0$; при этом выполняются неравенства:

$$\begin{cases} \frac{C_1 \cdot C_2 \cdot (l_1 + l_2)^2}{J \cdot m} - \tilde{\Omega}^4 < 0; \\ \Omega^2 - \tilde{\Omega}^2 > 0; \end{cases} \quad \text{либо} \quad \begin{cases} \frac{C_1 \cdot C_2 \cdot (l_1 + l_2)^2}{J \cdot m} - \tilde{\Omega}^4 > 0; \\ \Omega^2 - \tilde{\Omega}^2 < 0. \end{cases} \quad (36)$$

Закон движения $\varphi(t)$ имеет в этом случае вид:

$$\varphi(t) = \tilde{A} \cdot \exp(-|\omega_{x_{\min}}| \cdot t) + \tilde{B} \cdot \exp(+|\omega_{x_{\min}}| \cdot t). \quad (37)$$

в) $\omega_{x_{\min}}^2 = 0$; при этом выполняется равенство:

$$\tilde{\Omega}^4 = \frac{C_1 \cdot C_2 \cdot (l_1 + l_2)^2}{J \cdot m} \Rightarrow \frac{(C_1 \cdot l_1^2 + C_2 \cdot l_2^2)^2}{J^2} = \frac{C_1 \cdot C_2 \cdot (l_1 + l_2)^2}{J \cdot m}. \quad (38)$$

Закон движения $\varphi(t)$ имеет вид для этого случая:

$$\varphi(t) = \tilde{A} + \tilde{B} \cdot t. \quad (39)$$

Константы \tilde{A} и \tilde{B} в (35), (37) и (39) определяются из начальных условий задачи.

СИНТЕЗ ЛИНЕЙНЫХ РЕГУЛЯТОРОВ ДЛЯ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫМИ КОЛЕБАНИЯМИ АВТОМОБИЛЬНЫХ КРАНОВ

В. Синтез оптимального линейного регулятора переходных процессов автокрана, работающего в режимах пуска/торможения

Рассмотрим задачу синтеза оптимального линейного регулятора переходного процесса в автокране, работающем в режимах пуска/торможения. При этом критерий качества движения выберем в виде:

$$I = \int_0^1 \left[\gamma_1 \cdot (\varphi^{(IV)})^2 + \gamma_2 \cdot (\ddot{\varphi})^2 + \gamma_3 \cdot (\dot{\varphi})^2 + \gamma_4 \cdot \varphi^2 + \gamma_5 \cdot u^2 \right] d\tau \Rightarrow \max, \quad (40)$$

где $\tau = t/T$; T – продолжительность переходного процесса; $\gamma_{1,2,3,4,5}$ – неотрицательные весовые коэффициенты. Уравнения связей при этом приобретают следующий вид:

$$\begin{cases} \varphi(0) = \dot{\varphi}(0) = \ddot{\varphi}(0) = \ddot{\varphi}(0) = 0; & \ddot{\varphi} = a \cdot \varphi + b \cdot u; & u \equiv x; \\ a = -\frac{(C_1 \cdot l_1^2 + C_2 \cdot l_2^2)}{J}; & b = -\frac{(C_1 \cdot l_1 - C_2 \cdot l_2)}{J}; \\ \varphi^{(IV)} + \tilde{a} \cdot \ddot{\varphi} + \tilde{b} \cdot \varphi = 0; \\ \tilde{a} = \frac{(C_1 + C_2) \cdot J + (C_1 \cdot l_1^2 + C_2 \cdot l_2^2) \cdot m}{J \cdot m}; & \tilde{b} = \frac{C_1 \cdot C_2 \cdot (l_1 + l_2)^2}{J \cdot m}. \end{cases} \quad (41)$$

Уравнение Р. Беллмана для этой задачи запишется как:

$$\psi_t = -\max \left[\begin{array}{l} -\gamma_1 \cdot (\varphi^{(IV)})^2 - \gamma_2 \cdot (\ddot{\varphi})^2 - \gamma_3 \cdot (\dot{\varphi})^2 - \gamma_4 \cdot \varphi^2 - \\ -\gamma_5 \cdot u^2 + \psi_\varphi \cdot \dot{\varphi} + \psi_{\dot{\varphi}} \cdot (a \cdot \varphi + b \cdot u) \end{array} \right]. \quad (42)$$

Так как ограничения на управление u отсутствуют (главная задача состоит в уменьшении колебаний автокрана по φ), и выражение, стоящее в квадратных скобках, выпукло по u , найдём $u^*(\varphi, \dot{\varphi}, t)$ из условия стационарности этого выражения:

$$u^*(\varphi, \dot{\varphi}, t) = \frac{b}{2 \cdot \gamma_5} \cdot \psi_{\dot{\varphi}}(\varphi, \dot{\varphi}, t); \quad (u^*(\varphi, \dot{\varphi}, t) - \text{оптимальное решение}), \quad (43)$$

и подставим u^* в (42):

$$\psi_t = \gamma_1 \cdot (\varphi^{(IV)})^2 + \gamma_2 \cdot (\ddot{\varphi})^2 + \gamma_3 \cdot (\dot{\varphi})^2 + \gamma_4 \cdot \varphi^2 - \psi_\varphi \cdot \dot{\varphi} - \psi_{\dot{\varphi}} \cdot a \cdot \varphi - \frac{b^2}{4 \cdot \gamma_5} \cdot \psi_{\dot{\varphi}}^2. \quad (44)$$

Мы пришли к дифференциальному уравнению в частных производных обычного типа, не содержащему операции максимума. Одним из способов решения таких уравнений является задание вида предполагаемого решения с точностью до коэффициентов с последующим определением их. Зададим $\psi(\varphi, \dot{\varphi}, t)$ в форме:

$$\psi(\varphi, \dot{\varphi}, t) = A_1 \cdot \dot{\varphi}^2 + 2 \cdot B_1 \cdot \dot{\varphi} \cdot \varphi + C_1 \cdot \varphi^2 \quad (45)$$

и подставим в (44), учитывая (41). Приравнявая коэффициенты при φ , $\dot{\varphi}$ и $\varphi \cdot \dot{\varphi}$ в левой и правой частях получившегося выражения, найдём коэффициенты A_1 , B_1 и C_1 из следующей нелинейной системы уравнений:

а) для B_1 –

$$2 \cdot B_1 \cdot \left(a + \frac{b^2}{\gamma_5} \cdot B_1 \right) = \gamma_1 \cdot \left(a \cdot \tilde{a} + \tilde{b} + \frac{b^2 \cdot \tilde{a} \cdot B_1}{\gamma_5} \right)^2 + \gamma_2 \cdot \left(a + \frac{b^2 \cdot B_1}{\gamma_5} \right)^2 + \gamma_4 - 2 \cdot B_1 \cdot a - \frac{b^2}{\gamma_5} \cdot B_1^2; \quad (46)$$

б) для A_1 (при найденном из (46) B_1) –

$$2 \cdot A_1^2 \cdot \frac{b^2}{\gamma_5} + 2 \cdot B_1 = \gamma_1 \cdot \left(\tilde{a} \cdot \frac{b^2}{\gamma_5} \cdot A_1 \right)^2 + \gamma_2 \cdot \frac{b^4 \cdot A_1^2}{\gamma_5^2} + \gamma_3 - 2 \cdot B_1 - \frac{b^2}{\gamma_5} \cdot A_1^2; \quad (47)$$

в) для C_1 (при найденных из (46) B_1 и из (47) A_1) –

$$A_1 \cdot (a + 2 \cdot B_1) + B_1 \cdot \frac{b^2}{\gamma_5} \cdot A_1 + C_1 = \gamma_1 \cdot \left(\tilde{a} \cdot a + \tilde{b} + \frac{b^2 \cdot \tilde{a} \cdot B_1}{\gamma_5} \right) \cdot \tilde{a} \cdot \frac{b^2}{\gamma_5} \cdot A_1 + \\ + \gamma_2 \cdot \left(a + \frac{b^2 \cdot B_1}{\gamma_5} \right) \cdot \frac{b^2 \cdot A_1}{\gamma_5} - C_1 - A_1 \cdot a - \frac{b^2}{\gamma_5} \cdot A_1 \cdot B_1; \quad (48)$$

Зная A_1 , B_1 и C_1 из системы уравнений (46)-(48), находим $u^*(\varphi, \dot{\varphi}, t)$:

$$u^*(\varphi, \dot{\varphi}, t) = + \frac{b}{2 \cdot \gamma_5} \cdot \{2 \cdot A_1 \cdot \dot{\varphi} + 2 \cdot B_1 \cdot \varphi\} = \frac{b}{\gamma_5} \cdot \{A_1 \cdot \dot{\varphi} + B_1 \cdot \varphi\}. \quad (49)$$

Начальные условия для φ и его производных по t (τ) заданы (41), поэтому, подставляя $u^*(\varphi, \dot{\varphi}, t)$ в уравнения связей (41), получаем $\varphi^*(t)$, которое ввиду отсутствия ограничений на φ допустимо, а в силу теоремы В.Ф. Кротова [5] оптимально. Отметим, что оптимальное решение в форме синтеза (49) линейно зависит от переменных состояния автокрана (φ , $\dot{\varphi}$), то есть оптимальным регулятором в данной задаче оказывается линейный регулятор (по углу φ и по угловой скорости $\dot{\varphi}$).

Уравнение для $\varphi^*(t)$ имеет следующий вид:

$$\ddot{\varphi}^* - \frac{b^2}{\gamma_5} \cdot A_1 \cdot \dot{\varphi}^* - \left(a + \frac{b^2}{\gamma_5} \cdot B_1 \right) \cdot \varphi^* = 0. \quad (50)$$

Характеристическое уравнение для (50) сводится к:

$$\lambda^2 - \frac{b^2 \cdot A_1}{\gamma_5} \cdot \lambda - \left(a + \frac{b^2}{\gamma_5} \cdot B_1 \right) = 0. \quad (51)$$

Возможны три варианта решений $\varphi^*(t)$ (50):

1) если

$$\frac{b^2}{\gamma_5} \cdot B_1 + a + \frac{b^4 \cdot A_1^2}{4 \cdot \gamma_5^2} > 0, \quad (52)$$

тогда $\lambda_{1,2}$ – действительные корни, определяемые соотношениями:

$$\lambda_{1,2} = \frac{b^2 \cdot A_1}{2 \cdot \gamma_5} \pm \left\{ \frac{b^4 \cdot A_1^2}{4 \cdot \gamma_5^2} + a + \frac{b^2}{\gamma_5} \cdot B_1 \right\}^{\frac{1}{2}}; \quad (53)$$

$$\varphi^*(t) = \overline{\overline{C}}_1 \cdot \exp\{\lambda_1 \cdot t\} + \overline{\overline{C}}_2 \cdot \exp\{\lambda_2 \cdot t\}; \quad (54)$$

2) если

$$\frac{b^2}{\gamma_5} \cdot B_1 + a + \frac{b^4 \cdot A_1^2}{4 \cdot \gamma_5^2} < 0, \quad (55)$$

тогда:

$$\varphi^*(t) = \overline{\overline{D}}_1 \cdot \exp\left\{ \frac{b^2 \cdot A_1 \cdot t}{2 \cdot \gamma_5} \right\}.$$

$$\cdot \sin \left[\left[\left(\frac{b^4 \cdot A_1^2}{4 \cdot \gamma_5^2} + a + \frac{b^2}{\gamma_5} \cdot B_1 \right) \right]^{\frac{1}{2}} \cdot t \right] + \\ + \overline{\overline{D}}_2 \cdot \exp\left\{ \frac{b^2 \cdot A_1 \cdot t}{2 \cdot \gamma_5} \right\}. \quad (56)$$

$$\cdot \cos \left[\left[\left(\frac{b^4 \cdot A_1^2}{4 \cdot \gamma_5^2} + a + \frac{b^2}{\gamma_5} \cdot B_1 \right) \right]^{\frac{1}{2}} \cdot t \right];$$

2) если

$$\frac{b^2}{\gamma_5} \cdot B_1 + a + \frac{b^4 \cdot A_1^2}{4 \cdot \gamma_5^2} = 0, \quad (57)$$

тогда:

$$\varphi^*(t) = \exp\left\{\frac{b^2 \cdot A_1 \cdot t}{2 \cdot \gamma_5}\right\} \cdot (\bar{E}_1 + \bar{E}_2 \cdot t). \quad (58)$$

Константы $\bar{C}_1, \bar{C}_2, \bar{D}_1, \bar{D}_2, \bar{E}_1, \bar{E}_2$ находим из начальных (ненулевых) условий. Весовые множители $\gamma_1 - \gamma_5$ в критерии (40) можно определить следующим образом. Если нормировать u на характерный в задаче размер $\Delta = \frac{m \cdot g}{(C_1 + C_2)}$, а φ на $(\Omega^* \cdot T)$, где

$$\Omega^* = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T \omega^*(t) dt, \quad \omega^*(t) - \text{мгновенная ча-}$$

стота процесса (колебательного), определяемая по методике [11] с помощью интегрального преобразования Гильберта для $\varphi(t)$, тогда под знаком интеграла в (40) все величины становятся безразмерными (производные берутся по безразмерному времени τ^*), а для весовых коэффициентов получим:

$$\gamma_5 = 1; \gamma_4 = (\Omega^* \cdot T)^2; \gamma_3 = (\Omega^*)^4 \cdot T^4; \\ \gamma_2 = (\Omega^*)^6 \cdot T^6; \gamma_1 = (\Omega^*)^{10} \cdot T^{10}. \quad (59)$$

При этом пределы интегрирования в (40) по $\tau^* = \Omega^* \cdot t$ изменяются – от 0 до $\Omega^* \cdot T$.

ВЫВОДЫ

1. Проведен всесторонний анализ задачи синтеза линейного регулятора для оптимального управления нестационарными колебаниями автомобильных кранов в рамках теории В.Ф. Кротова-Р. Беллмана. Получено уравнения Р. Беллмана и его решение, позволяющие определить параметры линейного регулятора продольно-угловых колебаний автокрана, который удовлетворяет заданному критерию качества движения всей системы (минимальным колебаниям платформы относительно положения равновесия).

2. Результаты работы могут в дальнейшем быть использованы для уточнения и усовершенствования существующих методов синтеза линейных регуляторов для оптимального управления нестационарными колебаниями автомобильных кранов в процессах их разгона/торможения, перехода на дру-

гой режим функционирования как при проектировании/конструировании подобных регуляторов, так и на стадии их реальной эксплуатации в системе автоматического управления автокраном посредством имеющихся в наличии мехатронных устройств.

ЛИТЕРАТУРА

1. Krotov V.F. 1973: Metody i zadachi optimalnogo upravleniya. / V.F. Krotov, V.I. Gurman. – М.: Nauka. – 389.
2. Pontryagin L.S. 1961: Matematicheskaya teoriya optimalnykh protsessov. / L.S. Pontryagin, V.G. Boltyanskiy, R.V. Gamkrelidze, Ye.F. Mishchenko. – М.: Fizmatgiz. – 360.
3. Polyak B.T. 1983: Vvedeniye v optimizatsiyu. / B.T. Polyak. – М.: Nauka. – 384.
4. Tsirlin A.M. 1976: Variatsionnyye metody optimizatsii upravlyayemykh obyektov. / A.M. Tsirlin, V.S. Balakirev, Ye.G. Dudnikov. – М.: Energiya. – 448.
5. Tsirlin A.M. 1986: Optimalnoye upravleniye tekhnologicheskimi protsessami. / A.M. Tsirlin. – М.: Energoatomizdat. – 400.
6. Panovko Ya.G. 1967: Osnovy prikladnoy teorii uprugikh kolebaniy. / Ya.G. Panovko. – М.: Mashinostroyeniye. – 313.
7. Panovko Ya.G. 1979: Ustoychivost i kolebaniya uprugikh sistem. / Ya.G. Panovko, I.I. Gubanova. – М.: Fizmatgiz. – 381.
8. Timoshenko S.P. 1959: Kolebaniya v inzhenernom dele. / S.P. Timoshenko. – М.: Fizmatgiz. – 439.
9. Filippov A.P. 1965: Kolebaniya mekhanicheskikh sistem. / A.P. Filippov. – К.: Naukova dumka. – 715.
10. Grobov V.A. 1982: Teoriya kolebaniy mekhanicheskikh sistem. / V.A. Grobov. – К.: Vishcha shkola. Golovnoye izd-vo. – 183.
11. Dobrynin S.A. 1987: Metody avtomatizirovannogo issledovaniya vibratsii mashin: Spravochnik. / S.A. Dobrynin, M.S. Feldman, G.I. Firsov. – М.: Mashino-stroyeniye. – 224.
12. Goncharevich I.F. 1963: Vibratsionnyye mashiny v stroitelstve. Osnovy teorii, proyektirovaniya i rascheta. / I.F. Goncharevich, P.A. Sergeyev. – М.: Gosudarstvennoye nauchn.-tekhn. izd-vo mashinostroit. l-ry. – 312.
13. Kats A.M. 1947: Vynuzhdennyye kolebaniya pri prokhozhdanii cherez rezonans. /

- A.M. Kats // *Inzhenernyy sbornik*. – T. III. – Vyp. 2.
14. Loveykin V.S. 1998: Kriterii otsinki rezhimiv rukhu mekhanizmv i mashin. / V.S. Loveykin // *Zbirnik naukovikh prats NAU*. – Kiiiv: NAU. – T. 4. – 8-12.
15. Loveykin V.S. 1999: Optimizatsiya rezhimiv rukhu mashin i mekhanizmv. / V.S. Loveykin // *Mashinoznavstvo*. – № 7 (25). – 24-31.
16. Chovnyuk Yu.V. 2011: Utochnena dinamichna model rukhu vizka z vantazhem na gnuchkomu pidvisi. / Yu.V. Chovnyuk, V.S. Loveykin, Yu.O. Romasevich // *MOTROL*. – V. 13B. – 130-137.
17. Gorskiy B.E. 1989: Kriterii dinami-cheskogo sovershenstvovaniya mekhanicheskikh sistem. / B.E. Gorskiy, V.S. Loveykin // *Teoriya mashin metallurgicheskogo i gornogo oborudovaniya*. – Sverdlovsk: UPI. – Vyp. 13. – 98-102.
18. Goloskokov Ye.G. 1966: Nestatsionarnyye kolebaniya mekhanicheskikh sistem. / Ye.G. Golo-skokov, A.P. Filippov. – K.: Naukova dumka. – 336.
19. Loveykin V.S. 2011: Optimizatsiya rezhimu zmini vilotu vantazhu bashtovogo krana za odinichnimi kinematichnimi kriteriyami. / V.S. Loveykin, Yu.O. Romasevich, G.V. Shumilov // *MOTROL*. Motorization and power industry in agriculture. – Tom 13 B. – Lublin. – 167-174.
20. Kvakernaak Kh. 1977: Lineynyye optimalnyye sistemy upravleniya. / Kh. Kvakernaak, R. Sivan. – M.: Mir. – 650.
21. Sobol I.M. 1981: Vybor optimalnykh parametrov v zadachakh so mnogimi kriteriyami. / I.M. Sobol, R.B. Statnikov. – M.: Nauka. – 110.

signment formulated by V.F. Krotov it is set and resolved by means of the Bellman unidentified coefficients equation.

Key words: synthesis, linear controllers, optimizing control, transient oscillations, automobile cranes.

LINEAR CONTROLLER SYNTHESIS FOR GOALS OF OPTIMIZING CONTROL OVER TRANSIENT OSCILLATIONS OF AUTOMOBILE CRANES

Summary. The synthesis of the linear controllers for the goals of the optimizing control over the transient oscillations arising in the triggering and braking modes of the automobile cranes is presented. For reasoning sufficient conditions of optimality as to resolving of the indicated as-