

Wykorzystanie zagregowanej funkcji produkcji do określenia źródeł konwergencji gospodarczej województw

Roman Kosmański^a

Streszczenie. W artykule podjęto problematykę konwergencji gospodarczej, będącej od lat jednym z ważniejszych zagadnień w dziedzinie ekonomii. Celem badania, które tu omówiono, jest identyfikacja czynników warunkujących konwergencję gospodarczą województw (a konkretnie – odpowiedzialnych za regionalne zróżnicowanie PKB na osobę pracującą) oraz ocena siły ich oddziaływania. Badanie przeprowadzono dla lat 2014–2019 na podstawie danych pochodzących z Banku Danych Lokalnych Głównego Urzędu Statystycznego. Posłużono się zagregowaną funkcją produkcji typu Cobba-Douglasa, która pozwala oddzielić wpływ akumulacji czynników produkcji od wpływu zmian w stosowanej technologii na wzrost gospodarczy w województwach i w konsekwencji – na proces konwergencji gospodarczej. Zrealizowanie celu badawczego wymagało przeprowadzenia dekompozycji zagregowanej funkcji produkcji. Wyniki badania nie potwierdziły występowania konwergencji gospodarczej województw. Na skutek różnic w przestrzennej akumulacji kapitału rzeczowego oraz postępu technologicznego w rozpatrywanym okresie obserwowano tendencję do pogłębiania się regionalnego zróżnicowania PKB na osobę pracującą.

Słowa kluczowe: wzrost gospodarczy, dekompozycja, konwergencja

JEL: C01, C15, C51

Using the aggregate production function to determine the sources of economic convergence of voivodships in Poland

Abstract. The article deals with economic convergence, which has long been one of the most important issues in the field of economics. The aim of the study is to identify the factors which determine the economic convergence of voivodships, i.e. provinces (and more specifically, factors responsible for the regional differentiation of GDP per working person) and to assess the strength of their impact. The study was conducted for the years 2014–2019 on the basis of data provided by the Local Data Bank of Statistics Poland. The aggregate production function of the Cobb-Douglas type was used. It allows the influence of the accumulation of production factors to be separated from the influence of the changes occurring in the applied technology on economic growth in voivodships and, consequently, on the process of economic

^a Państwowa Wyższa Szkoła Zawodowa im. Jana Amosa Komeńskiego w Lesznie, Instytut Gospodarki i Zarządzania Przestrzenią, Polska / Jan Amos Komenski University of Applied Sciences in Leszno, Institute of Economics and Space Management, Poland. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9557-6357>.
E-mail: roman.kosmalski@pwsz.edu.pl.

convergence. The achievement of the aim of the research necessitated the decomposition of the aggregated production function. The results of the study did not confirm the occurrence of economic convergence in voivodships. A tendency was observed for the regional differentiation of the GDP per working person to deepen during the examined period, which resulted from the differences in the spatial accumulation of physical capital and technological progress.

Keywords: economic growth, decomposition, convergence

1. Wprowadzenie

W literaturze ekonomicznej zmniejszanie dysproporcji w rozwoju gospodarczym jest nazywane *konwergencją gospodarczą*¹. W badaniach ekonomicznych tę cechę rozpatruje się najczęściej w odniesieniu do grupy gospodarek krajów, regionów lub sektorów gospodarki. Większość opracowań – zarówno teoretycznych, jak i empirycznych – z zakresu wzrostu gospodarczego i konwergencji gospodarczej dotyczy grup krajów lub regionów w poszczególnych krajach.

Konwergencja najczęściej jest rozpatrywana jako dążenie gospodarki do stabilnego stacjonarnego stanu równowagi (takie jej rozumienie wynika z teorii wzrostu gospodarczego) lub jako wyrównywanie się poziomu bogactwa w grupie krajów lub regionów (Puziak, 2009, s. 5). Gospodarka w stacjonarnym stanie równowagi rozwija się równomiernie, czyli ze stałą stopą wzrostu takich zmiennych, jak PKB na osobę pracującą czy kapitał rzeczowy na osobę pracującą. Jak stwierdza Kokocińska (2012a, s. 15), w pracach empirycznych często dokonuje się testowania różnic rozwoju występujących między krajami lub regionami na podstawie rozkładów dochodów PKB per capita, PKB na osobę pracującą bądź całkowitej produktywności czynników produkcji (ang. *Total Factor Productivity* – TFP).

W badaniach konwergencji wykorzystujących modele wzrostu gospodarczego zastosowanie znajdują na ogół neoklasyczne modele wzrostu, a wnioskowanie o występowaniu zbieżności ścieżek wzrostu jest przeprowadzane na podstawie analizy szacowanych albo kalibrowanych parametrów modeli². W literaturze najczęściej spotyka się dwie klasyczne koncepcje: sigma oraz beta. Konwergencja sigma zachodzi wówczas, gdy zróżnicowanie między regionami lub krajami badanej zmiennej makroekonomicznej zmniejsza się w czasie. Konwergencja beta dotyczy zależności występującej między stopą wzrostu zmiennej makroekonomicznej a jej poziomem wyjściowym i najczęściej jest rozpatrywana w dwóch wariantach: bezwarunkowym i warunkowym. Konwergencja bezwarunkowa oznacza, że regiony upodabniają się

¹ Termin *konwergencja* pochodzi od łacińskiego słowa *convergere*, które oznacza 'zbieganie się, upodabnianie się'.

² Pełniejsze objaśnienie pojęć związanych z konwergencją gospodarczą można znaleźć m.in. w pracach Malagi (2004a, 2004b).

do siebie niezależnie od ich początkowych, podstawowych charakterystyk. Terminy te zaproponowali Barro i Sala-i-Martin (1992; zob. też Sala-i-Martin, 1996a, 1996b). Miernikiem powszechnie stosowanym w badaniach nad wzrostem gospodarczym i w konsekwencji nad konwergencją gospodarczą jest PKB per capita lub PKB na osobę pracującą (Malaga, 2015, s. 2).

Zgodnie z zasadniczą cechą neoklasycznych modeli wzrostu gospodarczego, którą jest obraz długookresowego stabilnego stacjonarnego stanu równowagi gospodarki, stopa wzrostu PKB na osobę pracującą i kapitału rzeczowego na osobę pracującą jest stała i przyjmuje różne wartości dla różnych gospodarek. Tym samym różne są rozkłady nierówności między krajami lub regionami, które zgodnie z ideą stacjonarnego stanu równowagi ulegają już tylko dalszemu utrwaleniu. Z punktu widzenia badania konwergencji gospodarczej rozumianej jako wyrównywanie się poziomu rozwoju ocenie podlega zatem nie tylko tempo dążenia gospodarki do stabilnego stanu równowagi, lecz także rozkład badanych zmiennych pomiędzy regionami lub krajami.

Wraz z intensywnym rozwojem badań konwergencji gospodarczej, zapoczątkowanym pod koniec XX w., pojawiło się wiele alternatywnych sposobów rozumienia tego zjawiska i zaczęto stosować metody inne niż oparte na koncepcjach klasycznych. Zrodziło to także dylematy (Islam, 2003, s. 312) dotyczące m.in. badania konwergencji. Wydaje się, że większość badaczy za podstawowe uznaje pytanie o to, czy poziom rozwoju krajów biednych zrównuje się z poziomem rozwoju krajów bogatych (zwłaszcza w Unii Europejskiej w kontekście polityki spójności), a nie o to, kiedy dana gospodarka osiągnie własny stabilny stacjonarny stan równowagi.

Kolejna ważna kwestia to rozróżnienie konwergencji stóp wzrostu analizowanych zmiennych od konwergencji ich poziomu w grupie badanych gospodarek. Konwergencja wśród gospodarek może być bowiem rozumiana jako wyrównywanie się stóp wzrostu dochodu lub wyrównywanie się poziomu dochodu. Jeżeli badana jest konwergencja mierzona PKB per capita lub PKB na osobę pracującą, to występowanie konwergencji może być efektem akumulacji kapitału lub rezultatem postępu technologicznego.

Najczęściej wykorzystywaną przez ekonomistów miarą postępu technologicznego jest całkowita produktywność czynników produkcji, czyli TFP, szacowana z użyciem reszty Solowa. Zróżnicowanie technologiczne gospodarek dało początek badaniom nad procesami konwergencji technologicznej TFP (Bernard i Jones, 1996b; Fagerberg, 1994; Hall i Jones, 1996; Maddison, 1987). Konwergencja ta, podobnie jak konwergencja dochodu, może być rozumiana jako wyrównywanie się stóp wzrostu lub poziomu technologii (Christensen i in., 1981; Jorgenson i Nishimizu, 1978, a na gruncie polskim – Tokarski, 2010; Tokarski i in., 2005). Jednym z największych problemów pojawiających się w badaniach konwergencji technologicznej jest jedno-

znaczne oddzielenie wpływu akumulacji kapitału od wpływu zmian technologicznych na rozmiar produkcji.

Rozwój badań spowodował, że uwaga badaczy skupia się już nie tylko na konwergencji jako takiej, lecz także na jej źródłach – zwłaszcza na różnicach występujących pomiędzy sektorami – czego przykładem są prace Bernarda i Jonesa (1996a), Dollara i Wolffa (1998), Müllera (2001) czy Wonga (2006). Przedmiotem badań staje się przebieg procesu na poziomie regionów, np. NUTS, czyli jednostek terytorialnych do celów statystycznych (Kokocińska, 2012b, s. 5), co zapewne wynika z przekonania, że uchwycenie mechanizmów odpowiedzialnych za wyrównywanie się poziomu rozwoju całych gospodarek wymaga rozpoznania przyczyny konwergencji na niższych (sektorowych lub regionalnych) szczeblach agregacji.

Przegląd literatury przedmiotu prowadzi do wniosku, że istnieją różne sposoby rozumienia oraz badania konwergencji. Można też wskazać zagadnienia, które wciąż wymagają pogłębionych analiz. Dotyczy to m.in. metod pozwalających zarówno na określenie czynników odpowiedzialnych za konwergencję, jak i na ocenę siły ich oddziaływania na ten proces. W modelu wzrostu gospodarczego typu Solowa wzrost PKB na osobę pracującą w długim horyzoncie czasowym zależy wyłącznie od postępu technologicznego, natomiast zmiany rozmiaru produkcji w krótkim okresie mogą być wynikiem albo postępu technologicznego, albo akumulacji kapitału rzeczowego. Identyfikacji źródeł krótkookresowego wzrostu gospodarczego można zatem dokonać na podstawie badań empirycznych wykorzystujących rachunek wzrostu i jego dekompozycję. Pionierami tego typu badań byli Abramovitz (1956) i Solow (1957).

Celem badania omawianego w artykule jest identyfikacja czynników warunkujących konwergencję gospodarczą województw (a konkretnie – odpowiedzialnych za regionalne zróżnicowanie PKB na osobę pracującą) oraz ocena siły ich oddziaływania. W badaniu wykorzystano neoklasyczną funkcję produkcji typu Cobb-Douglasa, zgodnie z którą zróżnicowanie PKB na osobę pracującą może wynikać z różnic w akumulacji kapitału rzeczowego lub ze zróżnicowania postępu pomiędzy badanymi gospodarkami w pewnym czasie (Tokarski, 2007, s. 35).

2. Metoda badania

Jako podstawowe narzędzie wnioskowania o procesie konwergencji zastosowano zagregowaną funkcję produkcji typu Cobb-Douglasa, która w formule indeksu umożliwia dokonanie dekompozycji zmian PKB na osobę pracującą na czynniki składowe. Zmiany rozkładu PKB na osobę pracującą analizowano za pomocą metody estymacji jądrowej warunkowej funkcji gęstości dla rozkładu PKB na osobę pracującą. Okres badania ustalono na lata 2014–2019. Wykorzystano dane pochodzące z Banku Danych Lokalnych (BDL) Głównego Urzędu Statystycznego.

W zagregowanej funkcji produkcji produkt Y jest wytwarzany przez dwa czynniki produkcji: pracę L oraz kapitał rzeczowy K . Łączenie zasobów i ich przekształcanie w produkt przebiega według neoklasycznej funkcji produkcji Cobba-Douglasa. Produkcja w i -tym województwie w momencie t jest opisywana następująco:

$$Y_i(t) = F_i(K_i(t), L_i(t)) = A_i(t)K_i^{\alpha_i}(t)L_i^{1-\alpha_i}(t), \quad A_i > 0, \alpha_i \in (0, 1), \quad (1)$$

gdzie:

$Y_i(t)$ – PKB w i -tym województwie w momencie t ,

$F_i(K_i(t), L_i(t))$ – funkcja produkcji w i -tym województwie pomiędzy nakładami kapitału $K_i(t)$ i pracy $L_i(t)$,

$K_i(t)$ – wartość kapitału rzeczowego w i -tym województwie w momencie t ,

$L_i(t)$ – liczba osób pracujących w i -tym województwie w momencie t ,

$A_i(t)$ – TFP w i -tym województwie w momencie t ,

α_i – elastyczność produkcji względem kapitału rzeczowego w i -tym województwie,

$1 - \alpha_i$ – elastyczność PKB względem liczby osób pracujących w i -tym województwie.

Intensywna postać tej funkcji produkcji dana jest wzorem³

$$y_i(t) = A_i(t)k_i^{\alpha_i}(t), \quad (2)$$

gdzie:

$A_i(t) > 0$ – TFP w i -tym województwie w momencie t ,

$y_i(t)$ – PKB w przeliczeniu na osobę pracującą w i -tym województwie w momencie t ,

$k_i(t)$ – kapitał rzeczowy w przeliczeniu na osobę pracującą w i -tym województwie w momencie t .

2.1. Metoda kalibracji parametrów

Do wyznaczenia parametrów modeli opisujących zmiany PKB na osobę pracującą w poszczególnych województwach wykorzystano metody kalibracji opisane formułami (3)–(7). Elastyczność produkcji względem kapitału rzeczowego wyznaczono z warunków koniecznych zadania maksymalizacji zysku (Malaga i Kliber, 2007, s. 44–46):

³ W intensywnej postaci funkcji produkcji wszystkie zmienne są przeliczane na osobę pracującą.

$$\Pi_i(K_i(t), L_i(t)) = \{A_i(t)K_i^{\alpha_i}(t)L_i^{1-\alpha_i}(t) - rK_i(t) - w_iL_i(t)\} \rightarrow \max, \quad (3)$$

gdzie:

w_i – przeciętna płaca w i -tym województwie w momencie t ,

r – stopa procentowa w Polsce w momencie t .

Po wyznaczeniu krańcowego zysku względem zasobu pracy i przyrównaniu go do 0, zgodnie ze wzorem

$$\frac{d\Pi_i(K_i(t), L_i(t))}{dL_i(t)} = (1 - \alpha_i)A_i(t)K_i^{\alpha_i}(t)L_i^{-\alpha_i}(t) - w_i = 0, \quad (4)$$

otrzymujemy:

$$(1 - \alpha_i) = \frac{w_i}{A_i(t)K_i^{\alpha_i}(t)L_i^{-\alpha_i}(t)} = \frac{w_iL_i(t)}{A_i(t)K_i^{\alpha_i}(t)L_i^{1-\alpha_i}(t)} = \frac{w_iL_i(t)}{Y_i(t)}. \quad (5)$$

Z równania (5) wynika, że elastyczność PKB względem liczby osób pracujących jest równa udziałowi wynagrodzenia z tytułu pracy w PKB w i -tym województwie, zgodnie z formułą $\frac{w_iL_i(t)}{Y_i(t)}$. Wartość elastyczności PKB względem pracujących można zatem wyznaczyć na podstawie dostępnych danych statystycznych. Natomiast wartość współczynnika elastyczności PKB względem kapitału rzeczowego otrzymuje się, dopełniając do 1 współczynnik elastyczności PKB względem zasobu pracy:

$$\alpha_i = 1 - \frac{w_iL_i(t)}{Y_i(t)}. \quad (6)$$

Wartości TFP wyznaczono ze wzoru

$$A_i(t) = \frac{y_i(t)}{k_i^{\alpha_i}(t)}. \quad (7)$$

2.2. Dekompozycja zmian PKB na osobę pracującą w Polsce

Jedną z możliwości oceny siły wpływu poszczególnych czynników wytwórczych na tempo zmian badanej zmiennej jest przeprowadzenie dekompozycji wzrostu PKB, co w rezultacie pozwala na określenie źródeł zmian w możliwościach wytwórczych gospodarek poszczególnych województw oraz dokonanie oceny ich wpływu na konwergencję gospodarczą.

Dekompozycję produkcji przeprowadził w 1957 r. Solow. Po zlogarytmowaniu multiplikatywnej funkcji produkcji (1) i przekształceniu jej do postaci addytywnej wyprowadził formułę określającą udział poszczególnych czynników produkcji we wzroście gospodarczym w przyjętym okresie:

$$\frac{\Delta Y}{Y} = \frac{\Delta A}{A} + \alpha \frac{\Delta K}{K} + (1 - \alpha) \frac{\Delta L}{L}. \quad (8)$$

W efekcie przekształcenia funkcji multiplikatywnej otrzymuje się postać addytywną, w której poszczególne składowe są zmianami względnymi początkowych wartości zmiennych. W zależności od celu prowadzonego badania zmiany te mogą mieć odniesienie zarówno do porównań w czasie, jak i między analizowanymi obiektami.

W omawianym badaniu wykorzystano funkcję produkcji w postaci multiplikatywnej, a dekompozycję wzrostu gospodarczego przeprowadzono z wykorzystaniem formuły indeksu neoklasycznej funkcji produkcji w postaci intensywnej:

$$y_i(t) = A_i(t)k_i^{\alpha_i}(t). \quad (9)$$

Odnosząc równanie (9) do dwóch momentów: t i $t + 1$, otrzymuje się następujący indeks:

$$\frac{y_i(t+1)}{y_i(t)} = \frac{A_i(t+1)}{A_i(t)} \cdot \left(\frac{k_i(t+1)}{k_i(t)} \right)^{\alpha_i}. \quad (10)$$

Przekształcenie równania (10) pozwala wyprowadzić wzór na wkład akumulacji kapitału rzeczowego AK_i w zmiany PKB na osobę pracującą oraz stopę wzrostu TFP_i ⁴ pomiędzy dwoma wybranymi momentami:

$$AK_i = \left(\frac{k_i(t+1)}{k_i(t)} \right)^{\alpha_i} = \frac{y_i(t+1)}{y_i(t)} \cdot \frac{A_i(t)}{A_i(t+1)}, \quad (11)$$

$$TFP_i = \frac{A_i(t+1)}{A_i(t)} = \frac{y_i(t+1)}{y_i(t)} \cdot \left(\frac{k_i(t)}{k_i(t+1)} \right)^{\alpha_i}. \quad (12)$$

Otrzymana miara TFP równoważna jest wzrostowi reszty Solowa w jego oryginalnej dekompozycji (Growiec, 2012, s. 139). Przykład zastosowania podobnej formuły opisanej wzorem (10), ale w odniesieniu do badania relacji między wydajnością pra-

⁴ Wartości A_i w i -tym województwie w momentach t oraz $t + 1$ wyznaczono na podstawie wzoru (7).

cy w krajach bogatych i biednych na podstawie neoklasycznej funkcji produkcji typu Cobba-Douglasa, znajduje się w pracy Tokarskiego (2007, s. 35). Wzory (10)–(12) opisują przyjęty w badaniu sposób rozczłonkowania – dekompozycji zmian PKB na osobę pracującą pomiędzy momentami t i $t + 1$ na wkład wzrostu kapitału rzeczowego na osobę pracującą i pozostałość, czyli resztę Solowa, interpretowaną jako miara wkładu w produkcję postępu technologicznego.

Aby ocenić wpływ akumulacji kapitału rzeczowego i zmian TFP na procesy konwergencji gospodarczej województw, posłużono się wynikami dekompozycji indeksu przedstawionego we wzorach (11) i (12). Ocena polegała na poznaniu wpływu poszczególnych składowych tego indeksu na zmiany PKB na osobę pracującą w wybranych latach z okresu 2014–2019. Po pomnożeniu PKB na osobę pracującą (obliczonego w momencie t) oddzielnie przez każdą ze składowych funkcji produkcji otrzymano alternatywne wartości PKB na osobę pracującą uwzględniające wyizolowany wpływ każdego z czynników produkcji na zmiany wielkości produkcji pomiędzy momentami t i $t + 1$. Wykorzystano do tego następującą formułę:

$$y_i^{AK}(t + 1) = \frac{y_i(t + 1)}{y_i(t)} \cdot \frac{A_i(t)}{A_i(t + 1)} \cdot y_i(t), \quad (13)$$

$$y_i^{TFP}(t + 1) = \frac{y_i(t + 1)}{y_i(t)} \cdot \left(\frac{k_i(t)}{k_i(t + 1)} \right)^{\alpha_i} \cdot y_i(t), \quad (14)$$

$$\begin{aligned} y_i(t + 1) &= y_i^{TFP \cdot AK}(t + 1) = \\ &= \frac{y_i(t + 1)}{y_i(t)} \cdot \left(\frac{k_i(t)}{k_i(t + 1)} \right)^{\alpha_i} \cdot \frac{y_i(t + 1)}{y_i(t)} \cdot \frac{A_i(t)}{A_i(t + 1)} \cdot y_i(t), \end{aligned} \quad (15)$$

gdzie jedynymi czynnikami wzrostu PKB na osobę pracującą pomiędzy momentami t i $t + 1$ w i -tym województwie były odpowiednio zmiany technologii TFP $y_i^{TFP}(t + 1)$, procesy akumulacji kapitału rzeczowego $y_i^{AK}(t + 1)$ oraz łączny wpływ tych czynników $y_i^{TFP \cdot AK}(t + 1)$.

Wzór (13) opisuje, jak zmieniałyby się PKB na osobę pracującą w i -tym województwie, gdyby jedynym czynnikiem produkcji pomiędzy momentami t i $t + 1$ była akumulacja kapitału rzeczowego. Wzór (14) pokazuje natomiast, jak zmieniałyby się ta wielkość, gdyby jedynym czynnikiem wzrostu PKB pomiędzy momentami t i $t + 1$ był postęp technologiczny. Z kolei wzór (15) uwzględnia łączny wpływ akumulacji kapitału rzeczowego i postępu technologicznego na zmiany PKB na osobę pracującą w i -tym województwie pomiędzy momentami t i $t + 1$. Podobnie na podstawie formuły addytywnej opisanej wzorem (8) możliwe jest dokonanie dekompo-

zycji i określenie udziału poszczególnych czynników produkcji we wzroście PKB na osobę pracującą w przyjętym okresie.

Tak skonstruowane miary dostarczają informacji dotyczących czynników i siły ich oddziaływania na zmiany PKB na osobę pracującą. Zmiana obserwowanej wielkości produkcji może być rezultatem zmiany w stosowanej technologii produkcji lub akumulacji kapitału rzeczowego.

Występowanie konwergencji gospodarczej województw badano na podstawie oceny rozkładów PKB na osobę pracującą z uwzględnieniem oddzielnie czynników produkcji wyznaczonych na podstawie równań (13)–(15). Zastosowanie powyższej formuły nie tylko pozwala odpowiedzieć na pytanie, czy w analizowanym okresie zachodziła konwergencja, lecz także dostarcza informacji o jej źródłach i sile ich oddziaływania.

Do wyznaczenia rozkładów PKB na osobę pracującą zapisanych układem równań (13)–(15) zastosowano metodę estymacji jądrowej, która pozwala na ocenę rozkładu PKB i jego zmian w czasie (Kruszka i Puziak, 2012; Quah, 1997; Wójcik, 2008a, 2008b) oraz na uzyskanie informacji o polaryzacji PKB na osobę pracującą (Kosmałski, 2011, s. 103).

W celu zdefiniowania estymatora jądrowego zakłada się daną n -wymiarową (tutaj $n = 1$) zmienną losową x o funkcji gęstości rozkładu f . Wynikiem m niezależnych eksperymentów jest m -elementowa próba losowa x_1, x_2, \dots, x_m , na podstawie której można wyznaczyć estymator $\hat{f}: R^n \rightarrow [0; \infty)$ funkcji gęstości rozkładu zmiennej losowej x . Estymator jądrowy funkcji gęstości dany jest wzorem (Kulczycki, 2005):

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{mh^n} \sum_{t=1}^m K\left(\frac{x - x_t}{h}\right), \quad (16)$$

gdzie:

n – wymiar zmiennej losowej x ,

$x_1, x_2, x_3, \dots, x_{16}$ – próba losowa zmiennej,

$f(x)$ – funkcja gęstości rozkładu zmiennej losowej x ,

$\hat{f}(x)$ – estymator funkcji gęstości rozkładu skonstruowany na podstawie próby,

h – tzw. współczynnik wygładzania (inaczej: szerokość pasma lub okna)⁵,

$K(x)$ – jądro estymacji, które zwykle ma postać funkcji gaussowskiej

$$K(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right). \quad (17)$$

⁵ Wartość współczynnika h wyznaczono ze wzoru na jego optymalizację zaproponowanego przez Silvermana (1986): $h = 0,9 \min\left(s, \frac{q_3 - q_1}{1,349}\right) n^{-1/5}$, gdzie: s – odchylenie standardowe, q_3 i q_1 – zakres międzykwartylowy, n – liczebność próby.

Zaletą estymatora jądrowego jest możliwość wyznaczenia funkcji gęstości bez uwzględniania z góry danego rozkładu. Dzięki temu możliwe staje się określenie wielu cech charakterystycznych (np. modalnych, asymetrii) lub postaci rozkładu dla skrajnych wartości zmiennej (Quah, 1997, s. 27–59).

3. Wyniki badania

W tabl. 1 podano wartości parametrów funkcji produkcji kalibrowanych oddzielnie dla poszczególnych województw, uzyskane metodami (3)–(7) dla lat 2014–2019. Wartości elastyczności PKB na osobę pracującą względem kapitału rzeczowego wyznaczono jako wartości średnie z lat badanego okresu.

Tabl. 1. Wartości parametrów regionalnych modeli wzrostu dla lat 2014–2019

Województwa	α_i	$A_i(t)$	$A_i(t + 1)$
Dolnośląskie	0,71	3,74	3,97
Kujawsko-pomorskie	0,69	3,35	3,55
Lubelskie	0,58	2,83	3,02
Lubuskie	0,71	3,02	3,06
Łódzkie	0,67	3,29	3,57
Małopolskie	0,65	3,38	3,74
Mazowieckie	0,68	3,95	4,30
Opolskie	0,69	3,14	3,20
Podkarpackie	0,61	2,81	3,04
Podlaskie	0,62	2,88	3,08
Pomorskie	0,69	3,56	3,98
Śląskie	0,69	3,50	3,89
Świętokrzyskie	0,62	2,93	3,30
Warmińsko-mazurskie	0,69	3,14	3,19
Wielkopolskie	0,69	3,55	3,85
Zachodniopomorskie	0,70	3,19	3,34

Uwaga. α_i – elastyczność PKB względem kapitału rzeczowego w i -tym województwie, $A_i(t), A_i(t + 1)$ – TFP w i -tym województwie w momencie $t = 2014$ i $t + 1 = 2019$.

Źródło: opracowanie własne na podstawie danych z BDL.

Analizując wartości współczynnika elastyczności, można zaobserwować ich charakterystyczne zróżnicowanie między województwami. Najwyższe wartości współczynnika elastyczności PKB na osobę pracującą względem kapitału rzeczowego otrzymano dla województw: zachodniopomorskiego, śląskiego, dolnośląskiego, wielkopolskiego, mazowieckiego i pomorskiego, a najniższe dla województw: lubelskiego, podkarpackiego, podlaskiego i świętokrzyskiego. Elastyczność PKB względem kapitału rzeczowego, ze względu na sposób kalibracji, jest tym wyższa, im niższy jest udział wynagrodzenia z tytułu pracy w wartości PKB danego województwa.

W tabl. 2 przedstawiono wyniki dekompozycji wzrostu gospodarczego dla lat 2014–2019 otrzymane na podstawie równań (13)–(15).

Tabl. 2. Dekompozycja zmian PKB na osobę pracującą w latach 2014–2019

Województwa	$\frac{y_i(t+1)}{y_i(t)}$	$\left(\frac{k_i(t+1)}{k_i(t)}\right)^{\alpha_i}$	$\frac{A_i(t+1)}{A_i(t)}$
Dolnośląskie	1,178	1,111	1,060
Kujawsko-pomorskie	1,204	1,134	1,061
Lubelskie	1,207	1,132	1,066
Lubuskie	1,172	1,154	1,015
Łódzkie	1,214	1,116	1,087
Małopolskie	1,226	1,106	1,108
Mazowieckie	1,198	1,100	1,089
Opolskie	1,199	1,176	1,020
Podkarpackie	1,229	1,135	1,083
Podlaskie	1,200	1,123	1,069
Pomorskie	1,216	1,087	1,119
Śląskie	1,210	1,090	1,110
Świętokrzyskie	1,209	1,075	1,124
Warmińsko-mazurskie	1,173	1,155	1,016
Wielkopolskie	1,221	1,128	1,083
Zachodniopomorskie	1,172	1,118	1,048

Uwaga. $t = 2014$, $t + 1 = 2019$.

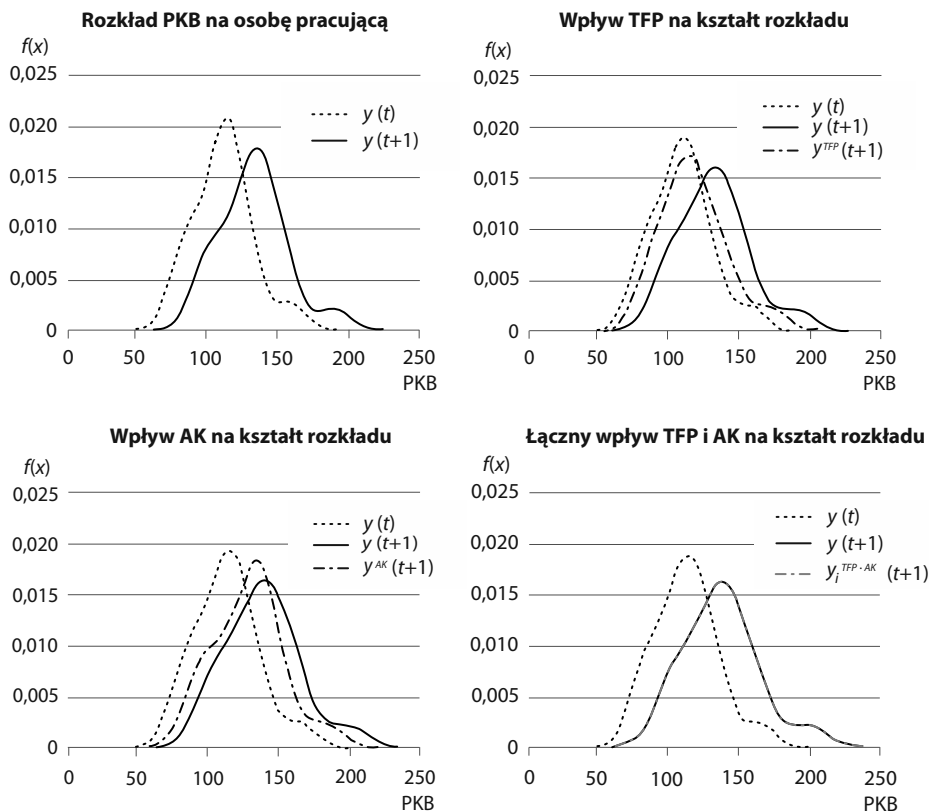
Źródło: opracowanie własne na podstawie danych z BDL.

Największe zmiany PKB na osobę pracującą w badanym okresie nastąpiły w woj. podkarpackim, w którym za wzrost gospodarczy w 13,5% odpowiadają zmiany technologiczne, a w 8,3% – akumulacja kapitału rzeczowego. W najmniejszym stopniu (jedynie w 1,5%) zmiany technologiczne przyczyniły się do wzrostu gospodarczego w woj. lubuskim, w którym wpływ akumulacji kapitału rzeczowego na zmiany PKB na osobę pracującą wyniósł 15,4%.

Na wykresie przedstawiono rozkłady PKB na osobę pracującą dla województw oraz rozkłady otrzymane zgodnie z równaniami (11)–(13). Na osi odciętych odłożono wartości PKB na osobę pracującą w danym roku, a na osi rzędnych – wartości funkcji gęstości będące odpowiednikiem liczby województw.

Porównanie krzywych dla lat 2014 i 2019 wskazuje na przesunięcie całego rozkładu w prawo, w kierunku wyższych wartości analizowanej zmiennej, oraz jego spłaszczenie będące wynikiem wzrostu zróżnicowania PKB na osobę pracującą między województwami. Uwzględnienie wyizolowanego wpływu TFP oraz AK na PKB na osobę pracującą w badanym okresie, zgodnie z równaniami (11)–(13), skutkowało przesunięciem rozkładu w prawo – w kierunku wyższych wartości PKB. W przypadku samego TFP nastąpiło przesunięcie głównie prawej części wykresu, co było wynikiem tego, że postęp technologiczny miał większy wpływ na produkcję w regionach o wyższych wartościach PKB na osobę pracującą. Natomiast uwzględnienie tylko efektu AK spowodowało przesunięcie całego wykresu w kierunku wyższych wartości PKB na osobę pracującą oraz nieznaczne jego spłaszczenie.

Wykres. Rozkłady PKB na osobę pracującą w województwach oraz rozkłady alternatywne



Uwaga. $f(x)$ – gęstość rozkładu (odpowiadająca liczbie województw), y – PKB na osobę pracującą z uwzględnieniem wpływu czynników wzrostu gospodarczego, $t = 2014$, $t+1 = 2019$.

Źródło: opracowanie własne.

4. Podsumowanie i wnioski

W badaniach konwergencji gospodarczej zachodzącej w długim horyzoncie czasowym powszechnie wykorzystuje się neoklasyczne modele wzrostu gospodarczego, a wnioskowanie o występowaniu zbieżności przeprowadza się na podstawie estymowanych albo kalibrowanych parametrów tych modeli. Zmiany rozmiaru produkcji i jej przestrzenne zróżnicowanie w krótszym horyzoncie czasowym mogą być wynikiem albo postępu technologicznego, albo akumulacji kapitału rzeczowego, a identyfikacji źródeł krótkookresowych zmian rozmiarów produkcji można dokonać w wyniku badań empirycznych wykorzystujących rachunek wzrostu i jego dekompozycję. Użycie w badaniach konwergencji dodatkowego narzędzia – dekompozycji zmian PKB na osobę pracującą, przeprowadzanej z zastosowaniem indeksu zaproponowanego w niniejszej pracy – znacznie poszerza obszar wnioskowania, ponieważ

dostarcza informacji o czynnikach oddziałujących na zmiany analizowanej zmiennej w czasie. Zagregowana funkcja produkcji w połączeniu ze wspomnianym indeksem pozwalają określić rozmiar oraz źródła zmian PKB na osobę pracującą pomiędzy dwoma ustalonymi momentami. Zmiana PKB na osobę pracującą może być rezultatem zmian w stosowanej technologii produkcji (w omawianym badaniu reprezentowanej przez całkowitą produktywność czynników produkcji) lub w akumulacji kapitału rzeczowego.

W wyniku dekompozycji zagregowanej funkcji produkcji możliwe stało się przeprowadzenie wielu symulacji, w szczególności dokonanie oceny wpływu czynników produkcji na zmiany rozkładu PKB na osobę pracującą i sformułowanie wniosków dotyczących zmian rozkładów tej zmiennej i rozkładów otrzymanych po uwzględnieniu wyizolowanego wpływu poszczególnych czynników produkcji. Zastosowany w badaniu estymator jądrowy umożliwił wyznaczenie funkcji gęstości bez konieczności uwzględniania z góry danego rozkładu. Na podstawie wyników dekompozycji indeksu dla funkcji produkcji Cobba-Douglasa przeprowadzono analizę hipotetycznych regionalnych rozkładów PKB na osobę pracującą z uwzględnieniem wpływu poszczególnych składowych tego indeksu (czynników produkcji) na zmiany rozkładu PKB na osobę pracującą. Oddzielnie rozpatrzono wpływ każdego czynnika produkcji na zmiany PKB na osobę pracującą, co pozwoliło określić wielkość oraz źródła zmian PKB na osobę pracującą między dwoma ustalonymi momentami w każdym województwie.

Przeprowadzone badanie nie potwierdziło występowania pomiędzy województwami konwergencji rozumianej jako wyrównywanie się poziomu PKB na osobę pracującą. Ten wniosek został sformułowany na podstawie oceny ewolucji rozkładów PKB na osobę pracującą. Ewolucja rozkładu regionalnego PKB w przeliczeniu na osobę pracującą w czasie, na skutek spłaszczenia rozkładu, wykazywała tendencję do pogłębiania się zróżnicowania regionalnego. Na podstawie dekompozycji produkcji ustalono natomiast, że podstawowymi źródłami jej zmian w latach 2014–2019 były zróżnicowany przestrzennie postęp technologiczny oraz akumulacja kapitału rzeczowego, przy czym wpływ akumulacji kapitału rzeczowego na procesy produkcji był większy w regionach o wyższych wartościach PKB na osobę pracującą.

Przyjęty zakres czasowy badania – 2014–2019, czyli sześć lat – umożliwił przedstawienie analizy najnowszych danych oraz zaprezentowanie metody pozwalającej na uchwycenie źródeł krótkookresowych zmian produkcji. Na dalszych etapach badania, np. prowadzonych z uwzględnieniem efektów polityki spójności UE, przewidywane jest przyjęcie innego horyzontu czasowego, w szczególności pokrywającego się z perspektywą czasową tej polityki.

Bibliografia

- Abramovitz, M. (1956). Resource and Output Trends in the United States Since 1870. *American Economic Review*, 46, 5–23.
- Barro, R. J., Sala-i-Martin, X. (1992). Convergence. *Journal of Political Economy*, 100(2), 223–251. <https://doi.org/10.1086/261816>.
- Bernard, A. B., Jones, C. I. (1996a). Productivity and Convergence Across U.S. States and Industries. *Empirical Economics*, 21(1), 113–135. <https://doi.org/10.1007/BF01205496>.
- Bernard, A. B., Jones, C. I. (1996b). Technology and Convergence. *Economic Journal*, 106(437), 1037–1044. <https://doi.org/10.2307/2235376>.
- Christensen, L. R., Cummings, D., Jorgenson, D. W. (1981). Relative Productivity Levels, 1947–1973: An International Comparison. *European Economic Review*, 16(1), 61–94. [https://doi.org/10.1016/0014-2921\(81\)90049-0](https://doi.org/10.1016/0014-2921(81)90049-0).
- Dollar, D., Wolff, E. N. (1998). Convergence of Industry Labour Productivity Among Advanced Economies, 1963–1982. *The Review of Economics and Statistics*, 70(4). <https://doi.org/10.2307/1935817>.
- Fagerberg, J. (1994). Technology and International Differences in Growth Rates. *Journal of Economic Literature*, 32(3), 1147–1175.
- Growiec, J. (2012). *Zagregowana funkcja produkcji w ekonomii wzrostu gospodarczego i konwergencji*. Oficyna Wydawnicza Szkoły Głównej Handlowej w Warszawie.
- Hall, R. E., Jones, C. I. (1996). *The Productivity of Nations* (NBER Working Paper No. 5812). <https://doi.org/10.3386/w5812>.
- Islam, N. (2003). What Have We Learnt From the Convergence Debate?. *Journal of Economic Surveys*, 17(3), 309–362. <https://doi.org/10.1111/1467-6419.00197>.
- Jorgenson, D., Nishimizu, M. (1978). US and Japanese Economic Growth 1952–1974: An International Comparison. *Economic Journal*, 88(352), 707–726.
- Kokocińska M. (2012a). Konwergencja gospodarcza na poziomie mezoekonomicznym. W: M. Kokocińska (red.), *Etapy konwergencji w rozwiniętych krajach Unii Europejskiej* (s. 9–22). Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego w Poznaniu.
- Kokocińska, M. (2012b). Wprowadzenie. W: M. Kokocińska (red.), *Etapy konwergencji w rozwiniętych krajach Unii Europejskiej* (s. 5–8). Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego w Poznaniu.
- Kosmalski, R. (2011). Retrospektywne i prospektywne rozkłady PKB p.c. i PKB na osobę pracującą w Polsce w ujęciu regionalnym. W: D. Appenzeller (red.), *Matematyka i informatyka na usługach ekonomii. Modelowanie zjawisk gospodarczych w praktyce* (s. 103–116). Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego w Poznaniu.
- Kruszka, M., Puziak, M. (2012). Konwergencja i rozkłady dochodu w regionach Unii Europejskiej. W: M. Kokocińska (red.), *Etapy konwergencji w rozwiniętych krajach Unii Europejskiej* (s. 40–67). Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego w Poznaniu.
- Kulczycki, P. (2005). *Estymatory jądrowe w analizie systemowej*. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne.

- Maddison, A. (1987). Growth and Slowdown in Advanced Capitalist Economies: Techniques of Quantitative Assessment. *Journal of Economic Literature*, 25(2), 649–698.
- Malaga, K. (2004a). *Konwergencja gospodarcza w krajach OECD w świetle zagregowanych modeli wzrostu*. Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Poznaniu.
- Malaga, K. (2004b). Konwergencja gospodarcza w krajach OECD w latach 1960–1999: wyniki badań empirycznych. *Zeszyty Naukowe Akademii Ekonomicznej w Poznaniu*, (41), 56–93.
- Malaga, K. (2015). *O niektórych dylematach teorii wzrostu gospodarczego i ekonomii*. <http://www.pte.pl/pliki/2/12/K.%20Malaga.pdf>.
- Malaga, K., Kliber, P. (2007). *Konwergencja i nierówności regionalne w Polsce w świetle neoklasycznych modeli wzrostu*. Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Poznaniu.
- Müller, G. (2001). *A Glimpse on Sectoral Convergence of Productivity Levels* (IWH Discussion Papers, No. 133). <https://www.econstor.eu/bitstream/10419/77051/1/133.pdf>.
- Puziak, M. (2009). *Konwergencja gospodarcza w wybranych krajach Unii Europejskiej. Ujęcie sektorowe* [rozprawa doktorska, Uniwersytet Ekonomiczny w Poznaniu]. http://www.wbc.poznan.pl/Content/120819/Puziak_Marcin-rozprawa_doktorska.pdf.
- Quah, D. T. (1997). Empirics of Growth and Distribution: Stratification, Polarization, and Convergence Clubs. *Journal of Economic Growth*, 2(1), 27–59. <https://doi.org/10.1023/A:1009781613339>.
- Sala-i-Martin, X. (1996a). The Classical Approach to Convergence Analysis. *The Economic Journal*, 106(437), 1019–1036. <https://doi.org/10.2307/2235375>.
- Sala-i-Martin, X. X. (1996b). Regional Cohesion: Evidence and theories of regional growth and convergence. *European Economic Review*, 40(6), 1325–1352. [https://doi.org/10.1016/0014-2921\(95\)00029-1](https://doi.org/10.1016/0014-2921(95)00029-1).
- Silverman, B. W. (1986). *Density Estimation for Statistics and Data Analysis*. Chapman and Hall.
- Solow, R. M. (1957). Technical Change and the Aggregate Production Function. *The Review of Economics and Statistics*, 39(3), 312–320. <https://doi.org/10.2307/1926047>.
- Tokarski, T. (2007). Teoretyczne podstawy przyczyn zróżnicowania rozwoju gospodarczego. W: R. Piasecki (red.), *Ekonomia rozwoju* (s. 32–54). Polskie Wydawnictwo Ekonomiczne.
- Tokarski, T. (2010). Przestrzenne zróżnicowanie łącznej produktywności czynników produkcji w Polsce. *Gospodarka Narodowa*, 238(3), 24–39. <https://doi.org/10.33119/GN/101149>.
- Tokarski, T., Roszkowska, S., Gajewski, P. (2005). Regionalne zróżnicowanie łącznej produktywności czynników produkcji w Polsce. *Ekonomista*, (2), 215–244.
- Wong, W.-K. (2006). OECD convergence: A sectoral decomposition exercise. *Economics Letters*, 93(2), 210–214. <https://doi.org/10.1016/j.econlet.2006.05.004>.
- Wójcik, P. (2008a). Dywergencja czy konwergencja: dynamika rozwoju polskich regionów. *Studia Regionalne i Lokalne*, (2), 41–60. https://studreg.uw.edu.pl/dane/web_sril_files/286/2008_2_wojcik.pdf.
- Wójcik, P. (2008b). *Wzorce konwergencji regionalnej w Polsce* [rozprawa doktorska, Uniwersytet Warszawski]. http://coin.wne.uw.edu.pl/pwojcik/semmag/01_Obrona_WNE2008.10.pdf.