ZESZYTY PROBLEMOWE
POSTĘPÓW NAUK ROLNICZYCH
Zeszyt 12

PROGRAMOWANIE LINIOWE W ROLNICTWIE

JERZY FIERICH

Zanim przejdę do omawiania właściwego zagadnienia, jakim jest możliwość i korzyści programowania liniowego w rolnictwie, pragnę w pierwszej części mego referatu omówić pewne sprawy o charakterze ogólnym a tyczące się planowania w rolnictwie.

I

Mało kto jest zadowolony z dzisiejszego stanu gospodarczego w kraju i każdy potrafi zacytować długi szereg rażących braków, błędów czy wprost nadużyć na tym terenie. Ale — mimo widocznych niepowodzeń dotychczasowych metod planowania, zwłaszcza w rolnictwie, — ludzie, którzy mają na ten temat coś do powiedzenia względnie do wykonania w tym zakresie, okazują wiarę w pozytywne wyniki stosowania nadal dotychczasowych metod tegoż planowania.

Tymczasem na terenie rolnictwa, (ale i nie rolnictwa) duża część dotychczasowych zaleceń czy rad, udzielanych przez naszych nawet poważnych uczonych, nie posiada — moim zdaniem — głębszego uzasadnienia. Wchodzi tutaj w grę opieranie się na pewnych analogiach z innymi krajami — wiadomo, że analogia jest jednym z najmniej pewnych sposobów rozumowania — na pewnych nieścisłych, bo powierzchownych i nie opartych na odpowiednim materiale uogólnieniach, czy w końcu nawet na subiektywnych „wyczuciach". Może nawet pewne zalecenia są słuszne, ale to nie znaczy, aby był udowodnione.

Można by ten stan rzeczy tłumaczyć faktem, że życie wymaga doraźnego planu i że wobec tego z konieczności trzeba planować nawet na podstawie decyzji dokładnie nieprzemyślanych i nie opartych na jakiejś naukowej podstawie. Ale uważam, że w tej chwili stało się już koniecznością państwową, a z drugiej strony obowiązkiem ludzi nauki, aby jak najszybciej rozpocząć opracowywanie naukowych metod planowania w rolnictwie. Przypuszczam, że nikt nie sprzeciwi się tej myśli, ale obawiam się, że mało kto zdaje sobie w pełni sprawę z trudności i długotrwałości takiego przedsięwzięcia. Od niedawna dopiero mam pewien kontakt z tymi zagadnieniami, ale — jak dotąd przynajmniej, widzę jedynie długą litanię trudności, przy czym dopiero bardzo niewyraźnie zaznaczają mi się kierunki, w których można by czy należałoby szukać rozwiązania niektórych z nich. Referat mój, z tych powodów będzie raczej krytyczny, ze stosunkowo małą tylko ilością elementów konstruktywnych.

Droga do wypracowania naukowych metod planowania jest — jak powiedziałem — długa i żmudna. Czym się ta droga charakteryzuje?

Planowanie jest oparte na przepowiadaniu zaistnienia pewnych zjawisk w przyszłości, pod warunkiem zastosowania odpowiednich środków. Każde zaś przepowiadanie, o ile nie ma być zwykłym wróżeniem, jest możliwe jedynie poprzez uprzednie poznanie zależności czy praw rządzących daną grupą zjawisk. Otóż ustalenie praw rządzących życiem gospodarczym jest bardzo trudne i dlatego ekonomia jest jedną z najtrudniejszych nauk, jest znacznie trudniejsza nawet od fizyki. Istnieją dwa główne tego powody: a) niemożliwość w ekonomii eksperymentu naukowego i b) nieprzewidzialność reakcji człowieka, która wprowadza element niepewności i wszystkie prawa ekonomiczne czyni prawami wyłącznie statystycznymi. Z tych powodów na terenie ekonomii musi się stosować metodę stopniowych przybliżeń do rzeczywistości. Wychodzi się od pewnego uproszczonego modelu rzeczywistości — na tym polega dedukcja, wyciąga się z niego pewne wnioski, które później weryfikuje się poprzez badania statystyczne, które w tym wypadku noszą nazwę ekonometrycznych. Badania więc ekonomiczne muszą być oparte na teorii z zastosowaniem ścisłych metod także matematycznych.

Czy to jednak nie będzie zbytnim odbieganiem od rzeczywistości, a więc teoretyzowaniem? — Jeszcze od czasu do czasu toczy się w pewnym stopniu spór między teorią a praktyką, chociaż nie posiada on żadnych realnych podstaw, przy czym teoretycy prawie nigdy nie negują konieczności praktyki, a tylko praktycy czasami negują potrzebę teorii, najczęściej ci, którzy nie potrafią jej opanować np. z powodu braków w wiadomościach matematycznych.

Jak wiadomo, szereg ostatnich lat w Polsce to okres dominacji praktycyzmu — ten okres na szczęście mamy już poza sobą, np. matematyka staje się nie tylko tolerowana w naukach niematematycznych, ale wprost forsowania przez Ministerstwo na wyższych uczelniach. Przeżywamy więc nawrót do teorii, która uzyskała z powrotem prawa obywatelstwa. W związku z tymi zagadnieniami przypatrzmy się jak wygląda stosunek praktyki do teorii w naukach rolniczych?

Nauki rolnicze są naukami praktycznymi; są naukami, tzn. mają stosować ścisłe naukowe metody badawcze, a praktyczność ich winna się objawiać wyłącznie w doborze odpowiednich tematów badawczych: rolnicy mają badać przede wszystkim te zależności, których następnik (skutek) jest ważny dla praktyki rolniczej.

Tymczasem — o ile mogę się oprzeć na niezbyt może długich i dokładnych obserwacjach — między zootechnikami na ten temat istnieją dość specjalne zapatrywania (oczywiście nie wygłaszane, a nawet — zdaje się, często nie uświadomione):

a) Wbrew zadaniom nauk praktycznych, teoretyzują oni w zakresie doboru tematów: wiadomo, że przed wojną profesorowie rolnictwa uciekali do zagadnień albo chemicznych, albo fizjologicznych — obecnie sytuacja jest podobna: przestudiowałem około 50 prac opublikowanych w Rocznikach Nauk Rolniczych i Leśnych w ciągu ostatnich trzech lat — otóż znikoma ich tylko część — moim zdaniem — posiada jakiś poważniejszy aspekt praktyczny (poza dość częstymi brakami metodyczno-statystycznymi).

b) Z drugiej zaś strony, znowu w sprzeczności z tym jak być powinno, „praktycyzuje" się na terenie metody, tzn. nieżyczliwie czy wprost negatywnie odnosi się do wprowadzenia ściślejszych (tj. w pewnym stopniu dedukcyjnych) metod badawczych. Wynika z tego pozornie paradoksalny wniosek, że należy na terenie rolniczej pracy badawczej walczyć równocześnie o jej upraktycznienie (na terenie doboru tematów) i o jej „uteoretycznienie" (na terenie metody).

Trudności w planowaniu, o których mówiłem poprzednio — w tym stopniu jak wspomniałem, powstały dopiero niedawno: rok czy dwa lata temu, mianowicie w związku ze z m i a n ą c e l u p l a n o w a n i a: przestało być tym celem najlepsze zaspokojenie potrzeb społeczeństwa poprzez maksimum produkcji, a stało się nim również najlepsze zaspokojenie potrzeb społeczeństwa, ale poprzez rentowność: w każdym razie kładzie się teraz jak najsilniejszy nacisk na urentownienie wszystkich przedsiębiorstw także rolniczych.

Tym samym nastąpiła zmiana celu: z technicznego na ekonomiczny. W związku z tym muszę podać pewne uwagi:

1. Przy celu ekonomicznym o podjęciu pewnej produkcji (oraz o jej wielkości) decyduje stosunek ceny produktów do ceny kosztów. W cenie ofiarowywanej przez konsumenta ujawnia się jego skłonność do kupna, która jest wynikiem siły jego potrzeb, ale również wysokości jego dochodu. Z tych powodów w ustroju kapitalistycznym, przy niesprawiedliwym rozkładzie dochodu narodowego, produkcja nastawiona na maksimum rentowności nie może uchodzić za produkcję w najlepszy sposób zaspokajającą potrzeby ludności. W ustroju zaś socjalistycznym, w którym dochody poszczególnych ludzi są sprawiedliwe czy sprawiedliwsze, rentowność może uchodzić za miarę jedynie siły zaspokajania potrzeb społeczeństwa. W tym więc drugim ustroju, tj. socjalistycznym, za społecznie

szkodliwe uznać należy każdą nierentowną (lub nie najbardziej rentowną) produkcję (poza oczywiście produkcją potrzebną dla zaspokojenia potrzeb pilniejszych od potrzeb gospodarczych, jak obronność kraju itp.).

2. Jeżeli mamy w życiu gospodarczym dążyć do rentowności, to techniczny punkt widzenia w zjawiskach gospodarczych trzeba uznać za szkodliwy — ujawniało się to już przed wojną, a tymbardziej po wojnie. Mimo to punkt widzenia techniczny był i jest bardzo często przyjmowany z tego prostego powodu, że jest znacznie łatwiejszy do realizacji niż ekonomiczny, gdyż a) przy celu technicznym uwzględnia się jedynie jedną stronę działalności gospodarczej tj. fizyczny wynik tej działalności, b) wynik ten jest — jako realny, łatwy do stwierdzenia. W przeciwieństwie do tego c e l e k o n o m i c z n y jest: a) na oko niewidoczny i co najważniejsze, b) jest znacznie trudniejszy do ustalenia. A poza tym możliwość jego realizacji uzależniona jest o d k i l k u w a r u n k ó w:

A) Do ustalenia czy to istniejącej rentowności danej produkcji, czy to przeszłej trzeba znać c e n y. Jak wiemy, ceny przy wolnym rynku ustalają się spontanicznie i są ściśle związane z całym życiem gospodarczym kraju, będąc jego wynikiem: mówią nam one o rzeczywistym zapotrzebowaniu społeczeństwa na dany przedmiot. W gospodarce zaś planowej ceny są jednymi z podstawowych a równocześnie jednymi z najtrudniejszych do ustalenia wielkości — oczywiście o ile mają one się wiązać z całokształtem życia gospodarczego. Jest to zagadnienie, które wychodzi poza ramy mego referatu, a które rozwiązywane jest u nas w praktyce na drodze przypadku przetargów międzyresortowych itp. — w każdym razie bez oparcia się o jakąś dokładniejszą analizę życia gospodarczego. Paradoksy cen u nas, już choćby na terenie produkcji rolniczej, są ogólnie znane (dochodzi jeszcze wielorakość cen).

W tych warunkach celowość nastawiania (gdyby nawet wszystkie inne trudności zostały usunięte) produkcji na rentowność przy cenach reglamentacyjnych wydaje się problematyczną. Może ono bowiem w każdej chwili ulec radykalnej zmianie, a poza tym — co najważniejsze — ustalenie rentowności na ich podstawie nie gwarantuje najlepszego zaspokojenia potrzeb społeczeństwa, a nawet jest pewne, że do tego stanu nie doprowadzi.

Z tego powodu Zakład Ekonomiki IZ stara się obecnie ustalić jakieś mierniki „naturalne", które by — oczywiście w sposób wcale nie najlepszy — ale może lepszy niż w oparciu się o ceny reglamentowane, stały się podstawą do ustalenia optymalnej wielkości i jakości produkcji rolnej.

B) Poza znajomością cen, dla obliczenia rentowności trzeba znać jeszcze pewne dane. Jeżeli stosujemy metodę m a k r o e k o n o m i c z n ą wówczas musimy znać:

a) stan obecny, wyjściowy — znajomość ta jest bardzo słaba,

b) tendencje rozwojowe,[1]

c) wpływ czynników czy zabiegów na wysokość plonów [2].

Te wszystkie obliczenia mają charakter badań makroekonomicznych, które są zawsze niepewne, bo stanowią pewne sumaryczne ujęcia czy ustalenia zależności w zakresie zbiorowości zwykle bardzo niejednorodnych. Żmudniejsze, ale moim zdaniem, znacznie ściślejsze są badania mikroekonomiczne i na nie głównie zwrócę uwagę. Chodziłoby więc w tej chwili o nastawienie na optimum ekonomiczne poszczególnego przedsiębiorstwa rolnego.

W tym celu ze strony techników rolników, a więc i zootechników — potrzebne jest dostarczenie szeregu danych czy stwierdzenia przez nich odpowiednich zależności. Zwracam na nie uwagę dlatego, iż o ile jestem zorientowany, badaniom tego rodzaju dotychczas w ogóle, a w literaturze polskiej w szczególności, poświęcono bardzo niewiele tylko uwagi — w każdym razie znacznie mniej niżby im poświęcić należało.

Podstawowym zadaniem jakie spoczywa na technikach rolniczych jest — moim zdaniem — ustalenie funkcji produkcji różnych produktów rolnych. Mówią nam one o zależności wielkości produkcji od ilości zastosowanych w tejże produkcji środków produkcyjnych.

1. Pierwszym zadaniem będzie ustalenie optymalnej wielkości przedsiębiorstwa rolnego. To optimum zależy przede wszystkim od odpowiedzi na pytanie czy funkcja produkcji jest homogeniczna pierwszego stopnia, czy też nie. Funkcja homogeniczna pierwszego stopnia to taka funkcja, przy której równomierny wzrost wszystkich czynników produkcji da równomierny i w tym samym stopniu wzrost wielkości produkcji (ilość produktów); znaczy to, że zwiększenie przedsiębiorstwa nie daje żadnych dodatkowych korzyści, czyli, że nie dochodzi przy niej do żadnych tzw. external czy internal economies, tj. do oszczędności czy ułatwień, które może czy ma dawać produkcja rolna na dużą skalę. Badania ostatnich lat w USA zdają się stwierdzać, że funkcja produkcji, przynajmniej w gospodarstwach badanych, jest homogeniczną pierwszego stopnia. Badania tego rodzaju winny być prowadzone i u nas, przy współpracy techników z ekonomistami.

2. Drugie zadanie polega na ustaleniu wielkości produkcji.

---

[1] Że można dojść na tym terenie do pewnych ściślejszych wyników, dowodzi nie wydana jeszcze praca mgra Wacławowicza, który obliczył trend metodą najmniejszych kwadratów, ustalił rozkład odchyleń od linii trendu i stwierdziwszy, iż jest on normalny, przewidywał przyszłe wielkości w granicach pewnego przedziału ufności.

[2] Na tym znowu terenie mgr Wacławowicz przy zastosowaniu metody korelacji cząstkowej doszedł do równania przedstawiającego zależność wysokości plonów od ilości zużytego obornika i nawozów sztucznych.

W tym celu konieczne jest ustalenie funkcji produkcji przy przyjmowaniu pewnych zmiennych niezależnych za stałe, a więc przy badaniu jak zmienia się np. mleczność w zależności od ilości (i jakości) paszy, podobnie przyrost tuczników, nieśność kur itp. Główną rolę odgrywa tutaj żywienie — ale należą tutaj także badania wpływu innych czynników na produkt hodowlany.

Dopóki chodziło o maksimum produkcji wystarczała znajomość produkcji maksymalnej (pułap), np. mleczności danej krowy. Jeżeli jednak ma dominować ekonomiczny punkt widzenia konieczna jest znajomość całej krzywej produkcji lub co najmniej znajomość jej na pewnym odcinku: nigdy bowiem optimum ekonomiczne nie pokrywa się z technicznym maksimum produkcyjności. Dopiero bowiem znajomość tych krzywych pozwoli — przy znajomości cen i składników kosztów produkcji — na ustalenie optymalnej, z punktu widzenia ekonomicznego, wielkości produkcji. Aby to nastąpiło trzeba, jak wiemy, zrównać koszt krańcowy z ceną.

Badania tego rodzaju winny być przede wszystkim przeprowadzone w stosunku do poszczególnych ras: każda rasa — moim zdaniem — winna być scharakteryzowana swoją funkcją produkcji czy krzywą produkcji. Wydaje mi się rzeczą pewną, że dyspersja krzywych produkcji w obrębie tej samej rasy będzie mniejsza od dyspersji tychże krzywych między rasami.

Oczywiście krzywa produkcji winna być tylko punktem wyjścia do scharakteryzowania danej rasy: winna być ona uzupełniona różnymi wiadomościami na temat specyficznego sposobu reagowania tej rasy na nadmiar, wzrost, czy ubytek paszy.

3. Następnie powstaje zagadnienie ustalenia najrentowniejszego u s t o s u n k o w a n i a ilości poszczególnych c z y n n i k ó w p r o d u k c j i do siebie. Zależy to od kształtu tzn. izokant, które nam mówią czy czynniki są komplementarne czy substytucyjne. Czynniki produkcji są zasadniczo komplementarne: wszak współdziałanie kilku czynników jest konieczne, aby do produkcji doszło. W skrajnych wypadkach nie mogą się one wcale zastępować i wówczas istnieje pewien stały optymalny stosunek ilości tych czynników do siebie. Ale w rolnictwie (w przeciwieństwie do przemysłu) czynniki produkcji są często, przynajmniej w pewnym zakresie, substytucyjne: wszak mogą produkować np. ziemniaki przy większej ilości narzędzi a mniejszej pracy lub vice versa. Otóż, jeżeli czynniki mogą się zastępować, wówczas warunkiem maksymalizacji rentowności jest przy wszystkich czynnikach produkcji, zrównanie stosunku produkcyjności krańcowej do ceny czynnika produkcyjnego z odwrotnością ceny produktu.

4. W końcu czwarte i ostatnie zagadnienie (o p t i m u m s t o s u n k u p r o d u k t ó w): wiadomo, że produkcja rolnicza w przeciwieństwie do

przemysłowej, jest produkcją łączną całego szeregu produktów roślinnych i zwierzęcych, dlatego, że produkty te uzupełniają się, zwłaszcza w tym znaczeniu, że produkty roślinne są czynnikami produkcji hodowlanej i vice versa. Powstaje w ten sposób organiczna całość, co w wysokim stopniu utrudnia wszelką kalkulację i zmusza do całościowego ujmowania przedsiębiorstwa rolnego. W związku z tym przed każdym kierownikiem przedsiębiorstwa rolnego staje pytanie: jakie produkty i w jakich ilościach produkować, aby osiągnąć maksymalny dochód przy danych czynnikach produkcji. Otóż tutaj przede wszystkim można w rolnictwie zastosować metodę programowania liniowego.

II

W ostatnich latach powstały trzy nowe metody ekonometryczne: a) najszerszą z nich jest teoria gier (czy strategii) rozwinięta w r. 1944 przez v. Neumanna i Morgensterna, b) metoda programowania liniowego (czyli matematycznego), która jest matematycznie równoważna ze specjalną formą teorii gier, w końcu c) analiza input-output, która znowu jest specjalnym, ale bardzo ważnym przypadkiem programowania liniowego i która została zapoczątkowana przez amerykańskiego ekonomistę rosyjskiego pochodzenia — Wasyla Leontiefa (1951) (posiada ona wspólny punkt wyjścia z „Tableau économique" Quesnay'a). Wszystkie te metody stanowią przewrót tak pod względem stosowanej przez nie techniki, jak i wartości i ważności osiąganych przy ich pomocy wyników. Winny one znaleźć jak najszersze zastosowanie, zwłaszcza w gospodarce planowej. U nas zagadnieniami programowania liniowego zajmują się przede wszystkim prof. Wiesław Sadowski (1957) i mgr Władysław Tomaszewski (1957).

Programowanie liniowe polega na stosowaniu pewnego modelu matematycznego do określonych zagadnień. Model ten nadaje się do rozwiązywania wszystkich problemów, które polegają na znalezieniu ekstremów funkcji liniowej, której zmienne spełniają szereg dodatkowych warunków.

Metoda ta znalazła bardzo szerokie zastosowanie w wielu gałęziach gospodarki narodowej, jak w rolnictwie, przemyśle, transporcie, handlu, w problemach odżywiania się itd. Można je stosować w stosunku do pojedynczego przedsiębiorstwa, grupy przedsiębiorstw lub w stosunku do całej gospodarki narodowej.

Istnieje szereg metod programowania liniowego, np.:

a) metoda „simplex" opracowana przez Dantziga (1956), oparta na rachunku wektorów i matryc jest technicznie bardzo prosta przy małej ilości zmiennych, a bardzo uciążliwa przy ich większej ilości. Ograniczam się do przedstawienia tylko tej metody,

b) metoda selekcji, która nadaje się do analizy problemów stochastycznych (T i n t n e r G., 1957).

W r o l n i c t w i e programowanie liniowe może znaleźć zastosowanie przede wszystkim do rozwiązania dwóch problemów:

A) najlepszego — z punktu widzenia ekonomicznego (maksimum dochodu) rozdziału posiadanych czy osiągalnych czynników produkcji pomiędzy różne procesy (tj. produkty).

B) najtańszego doboru pasz w żywieniu zwierząt domowych.

Ad A) — Zastosowanie metody simplex przedstawię na przykładzie poprzedzając go jedynie kilkoma najprostszymi wiadomościami wstępnymi z rachunku wektorów.

Wektorem nazywamy szereg liczb uporządkowanych, np.:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Wektor może się składać z dowolnej liczby elementów. Dodawanie (lub odejmowanie) wektorów do siebie polega na dodaniu (lub odjęciu) odpowiadających sobie elementów, np.:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Mnożenie wektora przez pewną liczbę polega na pomnożeniu przez tę liczbę każdego elementu danego wektora, np.:

$$3 \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 15 \\ 24 \end{pmatrix}$$

Kombinacją liniową dwóch wektorów nazywa się sumę (lub różnicę) dwóch wektorów pomnożonych przez pewne liczby, np.:

$$\begin{pmatrix} 8 \\ 21 \\ 32 \end{pmatrix} = 3 \times \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} + 2 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \tag{1}$$

To równanie wektorowe możemy również napisać w postaci

$$P_1 = 3\,P_2 + 2\,P_3\,, \text{ gdzie } P_1 = \begin{pmatrix} 8 \\ 21 \\ 32 \end{pmatrix},\ P_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix},\ P_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

To równanie wektorowe zawiera te same wiadomości, co następujący szereg równań algebraicznych:

$$\begin{aligned} 8 &= 3 \times 2 + 2 \times 1 \\ 21 &= 3 \times 5 + 2 \times 3 \\ 32 &= 3 \times 8 + 2 \times 4 \end{aligned}$$

Tabela I

		c Czysty dochód	Baza	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4 (Produkt A)	P_5 (Produkt B)	R
				—	0	0	0	3	2	
I	Ziemia w ha	0	P_1	2	1	0	0	1	1	2
	Praca w dniach	0	$\leftarrow P_2$	6	0	1	0	4	2	$1\frac{1}{2}$
	Pieniądze w zł	0	P_3	8	0	0	1	1	8	8
		z	—	0	0	0	0	0	0	—
		$z - c$	—	0	0	0	0	-3	-2	—
II		0	P_1	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{4}$	0	0	$\frac{1}{2}$	1
		3	$\rightarrow P_4$	$1\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	0	1	$\frac{1}{2}$	3
		0	$\leftarrow P_3$	$6\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{4}$	1	0	$7\frac{1}{2}$	$\frac{13}{15}$
		z	—	$4\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{4}$	0	3	$1\frac{1}{2}$	—
		$z - c$	—	$4\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{4}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	—
III		0	P_1	$\frac{1}{15}$	1	$-\frac{7}{30}$	$-\frac{1}{15}$	0	0	
		3	P_4	$1\frac{1}{15}$	0	$\frac{4}{15}$	$-\frac{1}{15}$	1	0	
		2	$\rightarrow P_5$	$\frac{13}{15}$	0	$-\frac{1}{30}$	$\frac{2}{15}$	0	1	
		z	—	$4\frac{14}{15}$	0	$\frac{11}{15}$	$\frac{1}{15}$	3	2	
		$z - c$	—	$4\frac{14}{15}$	0	$\frac{11}{15}$	$\frac{1}{15}$	0	0	

Tabela Ia

	A	B	P_1	Razem
Ziemia	$1\frac{1}{15}$	$\frac{13}{15}$	$\frac{1}{15}$	2
Praca	$4\frac{4}{15}$	$1\frac{11}{15}$	0	6
Pieniądze	$1\frac{1}{15}$	$6\frac{14}{15}$	0	8
Dochód	$3 \times 1\frac{1}{15} = 3\frac{3}{15}$	$2 \times \frac{13}{15} = 1\frac{11}{15}$	0	$4\frac{14}{15}$

Bazą pewnego wektora nazywamy taki układ wektorów liniowo niezależnych, którym możemy ten wektor wyrazić w postaci liniowej kombinacji (definicja przybliżona): np. w równaniu (1) wektory P_2 i P_3 stanowią bazę wektora P_1.

Przechodzę do objaśnienia[1] tabeli I.

Tabela podzielona jest na trzy części, I, II i III, które przedstawiają trzy etapy poszukiwania rozwiązania, tj. najrentowniejszego rozdziału czynników produkcji między różne produkty.

Etap I stanowi punkt wyjścia. Mamy w tej części tablicy umieszczonych 6 wektorów po trzy elementy każdy. Pierwszy z nich zaznaczony symbolem P_0 składa się z trzech elementów: pierwszego „2", który wyraża ilość hektarów ziemi, drugiego „6", które są ilością jednostek pracy i trzeciego „8", które są ilością jednostek pieniędzy. Wektor ten jest wektorem zapasów, gdyż mówi nam jaka maksymalna ilość czynników produkcji: ziemi, pracy i kapitału stoi do naszej dyspozycji. Tę właśnie ilość czynników mamy rozdzielić na produkcję poszczególnych produktów.

W tabeli przewidziane są tylko dwa możliwe produkty (procesy) A i B oznaczone wektorami: P_4 i P_5. Pierwszy z nich powiada nam ile trzeba użyć każdego z trzech czynników, aby otrzymać pewną, za jednostkę przyjętą, ilość produktu A, np. żyta. Widzimy, że potrzeba do tego 1 jednostki ziemi, 4 jednostek pracy oraz 1 jednostki pieniędzy. Drugi produkt (np. ziemniaki) wymaga 1 jednostki ziemi, 2 jednostek pracy i 8 jednostek pieniędzy. Przyjmujemy, że moglibyśmy wyprodukować dwa razy więcej produktu „A" niż dotychczas (= produkcja na poziomie 2), gdybyśmy wzięli dwa razy więcej czynników aniżeli dotychczas; moglibyśmy otrzymać trzy razy więcej produktu przy potrójnym zwiększeniu ilości czynników produkcji itd.

Na tabeli widzimy, poza dotychczas omówionymi trzema wektorami, jeszcze trzy dalsze, które noszą nazwę pomocniczych: P_1, P_2 i P_3. Każdy z tych wektorów — jak widzimy — składa się jedynie z jednej jednostki pojedynczego czynnika produkcji: P_1 składa się tylko z 1 ha ziemi, P_2 z jednej jednostki pracy i P_3 z jednostki pieniężnej. Ponieważ pojedynczy czynnik nie wystarcza, aby produkcja dała jakiś wynik, przeto wektor P_1 reprezentuje 1 ha ziemi niezatrudnionej w produkcji, P_2 jednostkę pracy również niezatrudnionej, a P_3 jednostkę pieniężną również jałową. Dobranie tych wektorów pomocniczych ułatwia obliczenie wyników.

Trzecia kolumna od lewej strony nosi tytuł „baza". Zaznaczam, że tylko te wektory są realizowane, które są w bazie. W naszym przypadku baza

[1] Boles J. N. (1955), Tomaszewski W. (1957). Na życzenie Prezydium PTZ objaśnienie jest bardzo szczegółowe.

składa się z trzech wektorów pomocniczych, tzn., że na tym etapie nie łączymy jeszcze wcale czynników produkcji ze sobą a więc, że nie dochodzi na tym etapie jeszcze wcale do jakiejś produkcji.

Że trzy wektory pomocnicze stanowią bazę wszystkich innych można o tym się łatwo przekonać, np.: $P_0 = 2P_1 + 6P_2 + 8P_3$.

Pozostaje nam do objaśnienia symbol „c” i „z”. „c” oznacza wysokość dochodu czystego osiąganego z produkcji danego wektora: jednostka produktu A daje — jak widzimy — dochodu trzy jednostki, a produktu B dwie jednostki dochodu. Wektory pomocnicze, jako składające się z poszczególnych tylko czynników produkcji, nie przynoszą żadnego dochodu. „z” zaś oznacza dochód z tych samych wektorów, ale przy założeniu, że przedstawi się je jako liniową kombinację procesów znajdujących się w bazie. Ponieważ baza składa się z wektorów nie dochodowych, przeto po takiej zamianie wektory P_4 i P_5 też nie dadzą dochodu: dlatego wszystkie „z” są zerowe.

Wiersz ostatni „$z - c$” mówi nam ile tracimy, jeżeli dotychczas luźno traktowanych czynników produkcji nie złożymy w całość produkcyjną, przewidzianą danym wektorem, np. jednostka ziemi, 4 jednostki pracy oraz jednostka pieniędzy, traktowane odrębnie od siebie nie dadzą żadnego dochodu, a zastosowane wspólnie w produkcji produktu A dadzą dochód 3.

Z faktu, że w wierszu „$z - c$” mamy liczby ujemne, dowiadujemy się, że dotychczasowy sposób zatrudnienia czynników nie jest najrentowniejszy. Należy więc zacząć produkować ten produkt, który da największy zysk, a więc ten przy którym „$z - c$” jest najbardziej ujemne, w naszym przypadku produkt A. Decyzja nasza produkowania produktu A oznacza, że chcemy w bazę wprowadzić wektor P_4 i to w możliwie największej ilości.

Ilość czynników mamy jednak ograniczoną i nie możemy jej przekroczyć, możemy więc wyprodukować produktu A tylko najwyżej tyle, na ile nam pozwoli czynnik, którego jest stosunkowo najmniej. Dlatego dzielimy ilości czynników w wektorze zapasowym przez ilości każdego z czynników potrzebne do produkcji produktu A. Okazuje się (kolumna R), że stosunkowo najmniej mamy czynnika pracy ludzkiej, bo jej zapas wystarczy najwyżej na $1^1/_2$ produktu A. Tyle więc produkujemy produktu A, a tym samym wyczerpujemy całkowicie zapas pracy: wektor więc P_2 wychodzi z bazy, a wchodzi w jego miejsce wektor P_4.

W drugim etapie widzimy skutki wprowadzenia nowej bazy: P_1, P_4 i P_3. Drogą prostych obliczeń ustalamy wygląd dotychczasowych wektorów przy nowej bazie.

Obliczenie to dokonujemy drogą a) algebraiczną lub b) rachunkową.

Ad a) Chcemy np. wyrazić P_0 w nowej bazie, w której, jak wiemy, w miejsce wektora P_2 ma wystąpić wektor P_4.

Przy dotychczasowej bazie:

$$P_0 = 2P_1 + 6P_2 + 8P_3$$
$$P_4 = 1P_1 + 4P_2 + 1P_3;$$

z drugiej równości wynika

$$P_2 = {}^1/_4\, P_4 - {}^1/_4\, P_1 - {}^1/_4\, P_3$$

Tę wartość na P_2 wstawiamy we wzór na P_0.

$$P_0 = 2P_1 + 6\,({}^1/_4\, P_4 - {}^1/_4\, P_1 - {}^1/_4\, P_3) + 8P_3$$
$$P_0 = 2P_1 + {}^6/_4\, P_4 - {}^6/_4\, P_1 - {}^6/_4\, P_3 + 8P_3, \text{ stąd otrzymujemy}$$
$$P_0 = {}^1/_2\, P_1 + 1^1/_2\, P_4 + 6^1/_2\, P_3$$

Ad b) — Wiersz, w którym znajduje się nowowprowadzony do bazy wektor oznaczam literą A'. Podobnie kolumnę, w której znajduje się nowy wektor.

Chcąc obliczyć wielkości znajdujące się w wierszu z nowym wektorem (u nas P_4) dzielimy liczby znajdujące się w wierszu ustępującego z bazy wektora (u nas P_2) przez wielkość znajdującą się na przecięciu wiersza starego wektora (P_2) z kolumną A', — tj. u nas przez 4. W ten sposób w miejsce wiersza

w starym etapie otrzymujemy	P_2	6,	0,	1,	0,	4,	2,
wiersz w nowym etapie	P_4	$1^1/_2$,	0,	1/4,	0,	1,	1/2,

Wielkości zaś w innych wierszach obliczamy w następujący sposób: chodzi nam np. o obliczenie wielkości ${}^1/_2$ znajdującej się w drugim etapie w wierszu P_1, a w kolumnie P_0; oznaczamy tę wielkość symbolem $\alpha_{1,0}$.

Chcąc ją obliczyć:

a) wypisujemy wielkość w tej samej kratce, ale w poprzednim etapie, tj. u nas 2. — (Oznaczamy tę wielkość symbolem $\alpha_{\underline{1},0}$, przy czym podkreślenie jedynki oznacza, że chodzi tutaj o pierwszy wiersz, ale w poprzednim etapie).

b) Od tej liczby odejmujemy iloczyn $\alpha_{A',0} \times \alpha_{\underline{1},A'}$ tj. odejmujemy iloczyn liczby w wierszu nowego wektora (P_4), a kolumnie zerowej oraz liczby w wierszu pierwszym poprzedniego etapu, a kolumnie wektora P_4 (tj. wprowadzonego).

W naszym przykładzie będziemy mieli:

$$\alpha_{1,0} = \alpha_{\underline{1},0} - \alpha_{A,'0} \cdot \alpha_{\underline{1},A'}$$

czyli ${}^1/_2 = 2 - 1^1/_2 \cdot 1$

Widzimy, że przez produkcję produktu A w ilości półtora jednostek, niezatrudnionych w dalszym ciągu pozostało $^1/_2$ ha ziemi i $6^1/_2$ jednostek pieniędzy. Widzimy również, że w tym etapie otrzymujemy już dochód, który równa się dochodowi z jednostki produktu A (= 3) razy ilość poziomów tej produkcji, tj. $1^1/_2$; razem więc dochód wyniesie $4^1/_2$.

W tym drugim etapie jednak, „z — c" jest jeszcze nadal ujemne przy produkcji produktu B, czyli możemy jeszcze zwiększyć dochód przez dalszą zmianę bazy. Wprowadzamy więc z kolei produkcję B do bazy i to w miejsce wektora P_3: w ten sposób przechodzimy do trzeciego etapu poszukiwań.

W tym etapie nie otrzymujemy już wcale ujemnych „z — c", co dowodzi, że otrzymaliśmy już o p t i m a l n ą k o m b i n a c j ę. Dochód nasz wyniesie $4^{14}/_{15}$, przy czym, jak widzimy, produkować mamy na $1^1/_{15}$ ha zimi produkt A, na $^{13}/_{15}$ ha produkt B, a $^1/_{15}$ część hektara zostanie nieuprawiona.

Tabela Ia wskazuje nam w jaki sposób posiadane czynniki powinny zostać rozdzielone pomiędzy oba produkty.

Specjalne znaczenie mają różnice „z — c" tych czynników, które nie wchodzą w bazę przy ostatecznym rozwiązaniu, tj. w ostatnim etapie. Wektor P_2 oznacza jeden dzień pracy, a więc równanie wektorowe:

$P_2 = - {^7/_{30}}\, P_1 + {^4/_{15}}\, P_4 - {^1/_{30}}\, P_5$ mówi, że

I) Jeżeliby jeden dzień pracy został z ostatecznej kombinacji usunięty, to a) $^7/_{30}$ ha ziemi stałoby się nieuprawionymi;

b) wektor P_4 zmniejszyłby się o $^4/_{15}$, a to kosztem $^4/_{15} \cdot 3 = {^{12}/_{15}}$ zł;

c) wektor P_5 zwiększyłby się o $^1/_{30}$, a to z zyskiem $^1/_{30}$ razy $2 = {^1/_{15}}$ zł; czyli ostatecznie nastąpiłaby strata w wysokości $^{11}/_{15}$ złotych, co się równa pozycji „z — c" dla P_2 w ostatnim etapie. Podobnie gdybyśmy dodali jeden dzień pracy, dochód zwiększyłby się o $^{11}/_{15}$ złotych. Jest to więc p r o d u k c y j n o ś ć k r a ń c o w a p r a c y (wyrażona w pieniądzach).

II) Analogicznie produkcyjność krańcowa p i e n i ę d z y wyniesie $^1/_{15}$ zł.

III) Produkcyjność krańcowa z i e m i wynosi zero, gdyż część jej nie została uprawiona, czyli jest ona — w naszym przykładzie — dobrem wolnym.

Należy w końcu zaznaczyć, że ponieważ przyjęta została homogeniczność pierwszego stopnia funkcji produkcji, zgodnie z trzecim twierdzeniem Walrasa, dochód rozdzieli się pomiędzy czynniki produkcji w ten sposób, że każdy czynnik produkcji otrzyma wynagrodzenie równe iloczynowi ilości danego czynnika przez jego produkcyjność krańcową:

$$^{11}/_{15} \cdot 6 + {^1/_{15}} \cdot 8 + 0 \cdot 2 = 4^{14}/_{15}$$

Z dochodu więc w wysokości $4^{14}/_{15}$, praca otrzyma $4^{6}/_{15}$, pieniądze $^{8}/_{15}$, a ziemia jako dobro wolne nie otrzyma żadnego dochodu.

Zaznaczam, że istnieją już metody upraszczające wszystkie te obliczenia[1].

Jak widać całe powyżej przedstawione obliczenie jest oparte na pewnych założeniach czy uproszczeniach. Przyjęte są:

a) jako funkcja produkcji funkcja homogeniczna pierwszego stopnia, więc bez względu na wielkość produkcji te same ilości czynników produkcji są potrzebne do identycznego zwiększenia produkcji. Przyjęta jest więc stałość tzw. współczynników technicznych produkcji (input coefficients).

b) skrajna limitacyjność czynników produkcji — czyli, że stale mamy ten sam stosunkowy skład czynników produkcji, co nie jest zgodne z sytuacją w rolnictwie. Ale raz ustalony, przy danych cenach, optymalny stosunek czynników, będzie utrzymywany taki sam mimo zwiększenia produkcji.

c) stałe ceny produktów i stałe plony oraz pewien stały zapas czynników.

Ten przykład jest możliwie najprostszy, można jednak przy pomocy metody „simplex" rozwiązać znacznie bardziej skomplikowane zadania.

1. Można brać pod uwagę znacznie większą ilość tak „procesów", tj. produktów, które mają być produkowane jak i ilości czynników. Jeżeli chodzi o czynniki produkcji (wiersze) to mogą one być rozbijane na poszczególne całkiem szczegółowe elementy, np. praca może być podzielona na poszczególne miesiące lub rodzaje pracy, ziemia na kategorie jakościowe itp. Metoda pozostaje niezmieniona, tylko oczywiście rozwiązania są coraz żmudniejsze. Można też porównywać ze sobą całe płodozmiany.

2. Można stan początkowy pewnego koniecznego czynnika przyjmować za zero, tj. oblicza się przy danym stopniowym rozwiązaniu ilość potrzebnego np. kapitału. To zagadnienie ma duże znaczenie w USA, gdzie sposób zagospodarowania obszaru zależy w pierwszej linii od ilości kredytu.

Tabela II przedstawia nam jak zmienia się optimalne ustosunkowanie ilości trzech produktów roślinnych do siebie przy zwiększającej się ilości kapitałów:

Przy małej ilości kapitału stosunkowo najrentowniejszy jest owies, przy większej zaś ziemniaki. Kapitał, w naszym przykładzie, w kwocie powyżej 5080 dolarów nie daje już wzrostu dochodu, gdyż stosunkowo zbyt małe stają się ilości innych czynników produkcji.

3. Można też ustalać optimalne rozlokowanie czynników, nie jak dotychczas — przy konkurencyjności produktów — ale ich uzupełnianiu się. Typowym przykładem będzie tutaj produkcja roślinna w stosunku do produkcji zwierzęcej. Wówczas pewne współczynniki techniczne (input

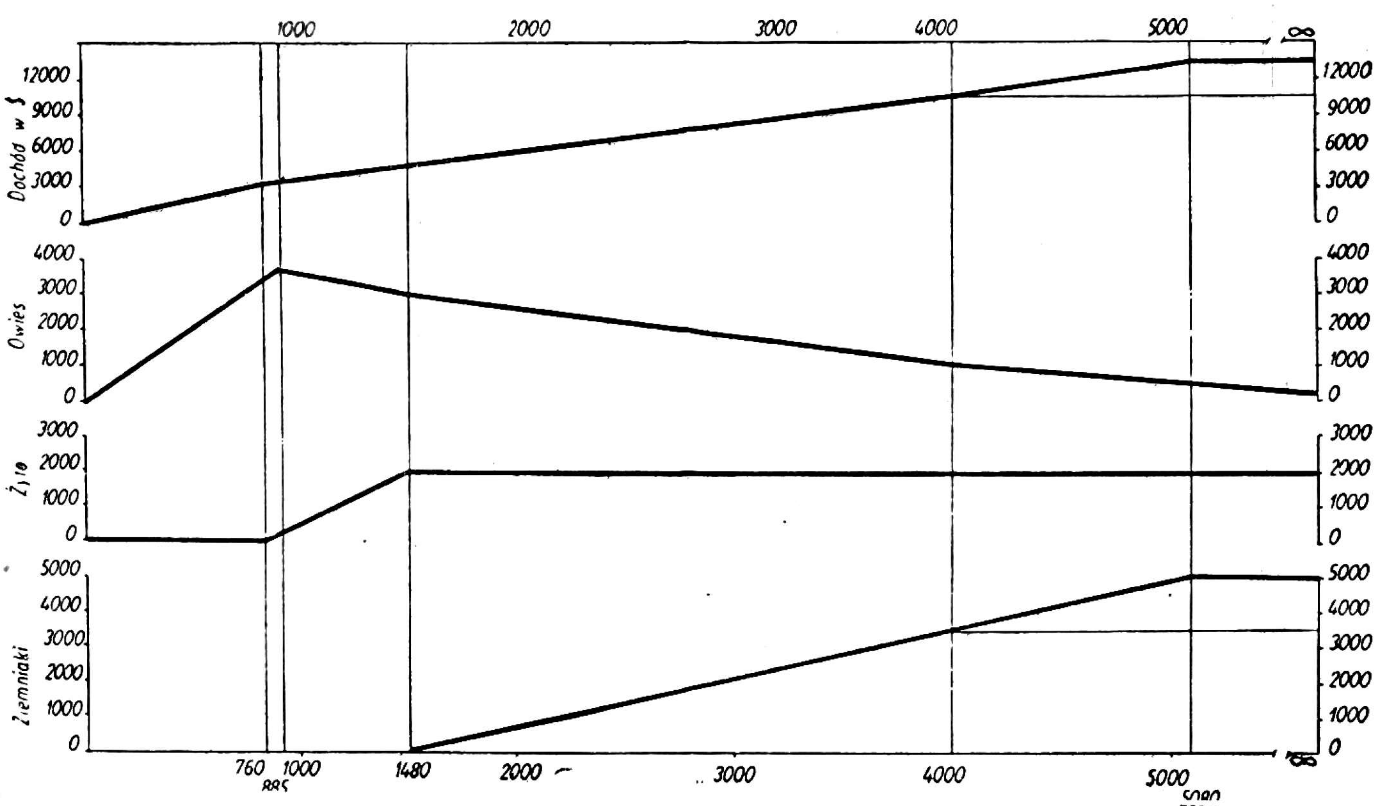
[1] Boles J. N. (1956), Puterbaugh H. L. (1956), Waugh F. V. i Glenn B. L. (1955).

coefficients) przyjmują znak ujemny, co oznacza, że dany czynnik nie zmniejsza swej ilości w produkcji tylko przeciwnie — zwiększa, np. obornik przy produkcji zwierzęcej będzie miał znak ujemny, a w produkcji roślinnej dodatni (przy paszach zaś będzie przeciwnie) (C a n d l e r W. 1956).

4. Zastosowań programowania liniowego w r o l n i c t w i e należy jeszcze wspomnieć o istnieniu:

a) modelu do wybrania najlepszej kombinacji płodozmianów czy jednego płodozmianu, — (a więc nie kombinacji poszczególnych roślin),

T a b e l a II



$ Kapitał

b) modelu ustalania najlepszej kombinacji produktów zwierzęcych przy danej już (przyjętej) rotacji (płodozmianie) i co najważniejsze,

c) modelu kompletnego G. A. P e t e r s o n a (Illinois 1955), a więc najbardziej zbliżonego do rzeczywistości, w którym ustala się równocześnie hodowlę zwierząt jak i płodozmiany. Na 240 akrach ziemi autor przyjmuje 27 „procesów" między nimi 4 trzody chlewnej, 7 bydlęcych, 8 rotacji, 3 zbioru siana i 4 handlowe. Czynniki zaś wyróżnia następujące: 12 pozycji pracy w każdym miesiącu osobno, pasze treściwe, ziarno, siano, 4 rodzaje pastwisk, cielęta i ziemia.

Rachunków dokonał przy pomocy maszyn elektronowych, metodą simplex. Musiano obliczyć 27 etapów (stopni) aby dojść do stanu optimalnego. Czas pracy maszyny trwał 25 minut. Wyróżniono „tylko" 27 procesów i 20 czynników, gdyż to stanowiło maksimum wydajności maszyny. Pracy dokonano w Illinois w 1955 roku.

Tabela III

						Siano A	Buraki B	Otręby C	
	C koszt kg			M	M	6	1	16	R
		Baza	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	
Jednostki karmowe	M	P_1	11,65	1	0	0,53	0,23	1,02	11,42
Białko g	$\leftarrow M$	$\leftarrow P_2$	1200	0	1	55	7	117	10,26
	z	—	1211,65 M	M	M	55,53 M	7,23 M	118,02 M	
	$z - c$	—	—	0	0	55,53 M −6	7,23 M −1	118,02 M −16	

	M	$\leftarrow P_1$	1,20	1	−0,009	0,06	0,17	0	7,0
	16	$\rightarrow P_5$	10,26	0	$\frac{1}{117}$	$\frac{55}{117}$	$\frac{7}{117}$	1	171,0
	z	—	1,20M + 164,16	M	−0,00911 +0,137	0,06 M +7,5	0,17 M +0,96	16	
	$z - c$	—	—	0	−1,009 M +0,137	0,06 M +1,5	0,17 M −0,04	0	

	1	$\rightarrow P_4$	7	5,9	−0,053	0,3	1	0	23,0
	16	$\leftarrow P_5$	9,84	0,348	0,012	0,45	0	1	21,8
	z	—	164,44	0,33	0,139	7,5	1	16	
	$z - c$	—	—	0,33 -M	0,139-M	1,5	0	0	

	1	P_4	0,46	6,13	−0,054	1	1	− 0,66	
	6	$\rightarrow P_3$	21,8	0,77	0,003	0	0	2,2	
	z	—	131,26	1,51	−0,036	6	1	12,54	
	$z - c$	—	—	1,51 -M	−0,036-M	0	0	− 3,46	

Tabela IIIa

	Jednostki karmowe	Białko g	Skład optymalny	Jednostki karmowe	Białko g	Koszt 1 kg	Koszt ogólny
Siano	0,53	55	21,8	11,55	1199	6	130,80
Buraki	0,23	7	0,46	0,10	3,22	1	0,46
			Razem	11,65	1202,22	—	131,26 zł

Postulaty Petersona: a) potrzebne są większe maszyny elektronowe, b) najważniejszym jest ustalenie współczynników technicznych, do czego konieczna jest współpraca techników i ekonomistów.

ad B) Drugie zastosowanie programowania liniowego w rolnictwie daje nie najlepszy rozdział posiadanych czynników produkcji, ale najtańszy zestaw pasz przy żywieniu. Nas będzie obchodzić tylko żywienie zwierząt. Łoś J. i Tomaszewski W. (1957) obliczyli zestaw pasz dla tuczników, a ja ustaliłem go dla krów (tab. III). Przyjęto: krowę 500 kg żywej wagi o mleczności 15 litrów dziennie mleka oraz istnienie trzech rodzajów pasz: siana, buraków i otrąb pszennych.

Tutaj chodzi nie o maksimum rentowności przy danych czynnikach produkcji, tylko o najniższy koszt produkcji przy przyjętej z góry wielkości produkcji. Dlatego w górnym wierszu „c" mamy podany nie dochód czysty z produkcji, tylko koszt zużycia danej paszy. Koszt wyprodukowania mleka przy zastosowaniu samego tylko białka (lub całkiem bez białka) będzie niezmiernie duży. Ten koszt niezmiernie wielki oznaczamy literą M.

Poza tym do bazy przechodzi, nie jak dotychczas, produkt o najbardziej ujemnym „$z - c$", tylko o najbardziej dodatnim.

Wyniki obliczeń ujęte są w tabeli IIIa.

LITERATURA

1. Boles J. N. (1955): Linear Programming and Farm Management Analysis. Journal of Farm Economics, tom XXXVII/1.
2. Boles J. N. (1956): Short Cuts in Programming Computations, Journal of Farm Economics, tom XXXVIII/4.
3. Burkhardt F. (1955): O proporcjach w planowaniu gospodarczym, Przegląd Statystyczny, nr 4.
4. Candler W. (1956): A modified simplex Solution for Linear Programming with Variable Capital Restrictions, Journal of Farm Economics tom XXXVIII/4.
5. Charner A., Cooper W. W. i Henderson A. (1953): An Introduction to Linear Programming, New York.
6. Dantzig G. B. (1956): Maximalization of a Linear Function of Variables Subject to Linear Anequalities, — Activity Analysis of Production and Allocation, ed. by Koopmans, T. C., New York, II wydanie (pierwsze 1951).
7. Dorfman R. (1953): Mathematical of „Linear" Programming, The American Econ. Review, December.
8. Heady E. O. (1954): Simplified Presentation and Logical Aspects of Linear Programming Technique, Journal of Farm Economics, tom XXXVI/5.
9. Heady E. O. (1957): Economics of Agricultural Production and Resource Use Price-Hall.
10. King R. A. (1953): Some Applications of Activity Analysis in Agricultural Economics, Journal of Farm Econ., tom XXXV/5.

11. King R. A. i Freund R. J. (1953): A Procedure for Solving a Linear Programming Problem, Journal Paper No 563, North Carolina Agricultural Experiment Station, July.
12. Leontief W. W. (1951): The Structure of American Economy 1919/1939, Oxford.
13. Łoś J. i Tomaszewski W. (1957): O zastosowaniu ekonometrii w nauce żywienia, Handel wewnętrzny, zeszyt 5.
14. Noel W. (1955): An Application of Linear Programming to the Selection of raw Materials, Applied Statistics, London, March.
15. Peterson G. A. (1955): Selection of Maximum Profit Combinations of Livestock Enterprises and Crop Rotations, Journal of Farm Econ. t. XXXVII.
16. Puterbaugh H. L. (1956): Computation of the R Column of the Simplex Linear Programming Worksheet, Journal of Farm Econ., tom XXXVIII/4.
17. Sadowski W. (1957): Zastosowanie teorii programowania liniowego do rejonizacji zaopatrzenia, Przegląd Statystyczny, nr 2.
18. Smith V. E. (1955): Perfect Discontinuous Markets, A linear Programming Analysis, Journal of Farm Economics, tom XXXVII/3.
19. Sulmicki P. (1957): Konstrukcja narodowego planu gospodarczego, Gospodarka planowa XII/1.
20. Tintner G. (1952): Econometrics, New York, London.
21. Tintner G. (1955): Stochastic Linear Programming with Applications to Agricultural Economics, Second Symposium in Linear Programming, tom 1, Washington.
22. Tintner G. (1957): Game Theory, Linear Programming and Input-Output Analysis. Zeitschrift für Nationaloekonomie, Wiedeń, tom XVII/1.
23. Tomaszewski W. (1957): Zagadnienia programowania leśniczego, Ekonomista nr 3.
24. Waugh F. V. i Glenn B. L. (1955): A short Cut to Linear Programming, Econometrica, January.