

*Michał Wierzbicki, Bogusław Przedwojski*

## **OPIS UKŁADU POZIOMEGO ZAKOLI RZEKI PROSNY PRZY WYKORZYSTANIU KRZYWEJ COSINUSOIDALNEJ**

### **Streszczenie**

W artykule przedstawiono ogólną charakterystykę krzywej cosinusoidalnej, jej równanie, przebieg krzywej i jej krzywizny.

Przedstawiono metodykę wyznaczania parametrów łuków (wartości promienia minimalnego oraz długości łuku) opisujących istniejące zakola rzeki w układzie współrzędnych geodezyjnych mapy. Opracowaną metodykę wykorzystano do opisu układu poziomego zakoli odcinka rzeki Proсны od km 94+330 do km 93+660, znajdującego się bezpośrednio poniżej projektowanej zapory czołowej planowanego zbiornika wodnego Wielowieś-Klasztorna.

Na podstawie znajomości parametrów zakoli przeprowadzono obliczenia topografii dna badanego odcinka rzeki, których wyniki porównano z wynikami pomiarów terenowych. Efektem obliczeń i pomiarów terenowych jest zależność układu pionowego od układu poziomego naturalnego koryta Proсны na długości badanych zakoli.

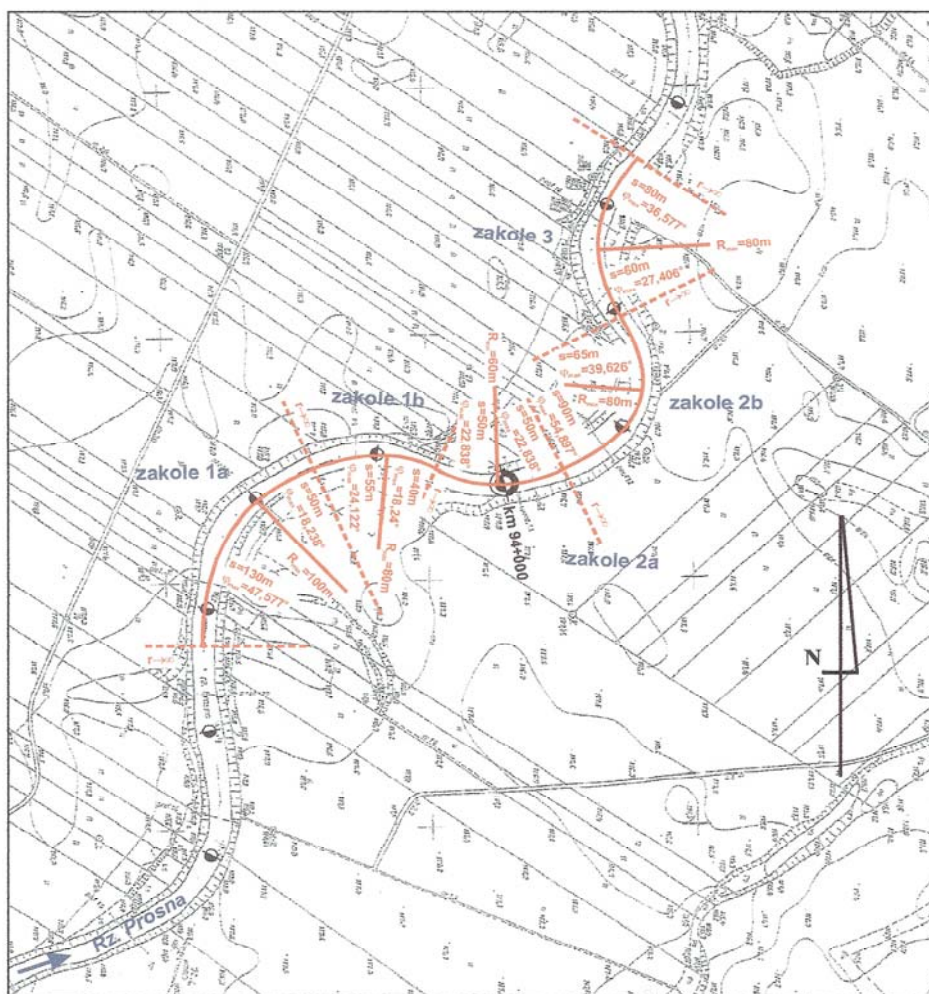
Analiza wyników pozwoliła stwierdzić, że obliczony układ dna dobrze odwzorowuje pomierzony w naturze kształt koryta oraz, że łuki uzyskane dla badanego odcinka rzeki Proсны odpowiadają rzeczywistemu obrazowi układu poziomego zakoli rzeki.

**Słowa kluczowe:** układ poziomy rzeki, układ pionowy rzeki, zakola rzeczne, topografia dna

## WSTĘP

W korytach naturalnych, na całej długości ich biegu, występuje nieprzerwany wpływ ruchu wody na kształtowanie koryta. Wpływ ten objawia się zarówno stałymi zmianami profilu podłużnego, przekrojów poprzecznych, jak i zmianami rzutu poziomego cieku.

Badania rzeki Proсны wykonano dla odcinka, który objął następujące po sobie zakola, od km 94+370 do km 93+610 (rys. 1).



**Rysunek 1.** Badany odcinek rzeki Proсны  
**Figure 1.** Measured section of Prosna river

Na badanym odcinku wykonano pomiary terenowe, które objęły: pomiary topografii dna i pomiary hydrometryczne w przekrojach poprzecznych koryta na długości badanych zakoli. Na podstawie wyników pomiarów terenowych oraz opracowanej mapy numerycznej [Wierzbicki 2004] wyznaczono oś koryta, którą opisano łukami o zmiennej krzywiznie. Do opisu układu poziomego koryta wykorzystano krzywą o zmiennej krzywiznie – krzywą cosinusoidalną. Dla badanego odcinka rzeki Proсны wykonano obliczenia na modelu matematycznym do obliczania wartości charakterystyk przepływu w korycie złożonym z zakoli o zmiennej krzywiznie. Obliczenia przeprowadzono pod kątem weryfikacji uzyskanego opisu układu poziomego rzeki.

#### **KRZYWA UKŁADU POZIOMEGO BADANEGO ODCINKA RZEKI PROSNY**

Na podstawie prac Leopold'a i Langbein'a [Leopold, Langbein 1966] oraz Engelunda [Engelund 1974], Hooka [Hook 1975] i Przedwojskiego [1990] do opisu układu poziomego badanego odcinka rzeki Proсны wybrano krzywą o zmiennej krzywiznie, krzywą cosinusoidalną, opisaną w układzie współrzędnych krzywoliniowych równaniem (1):

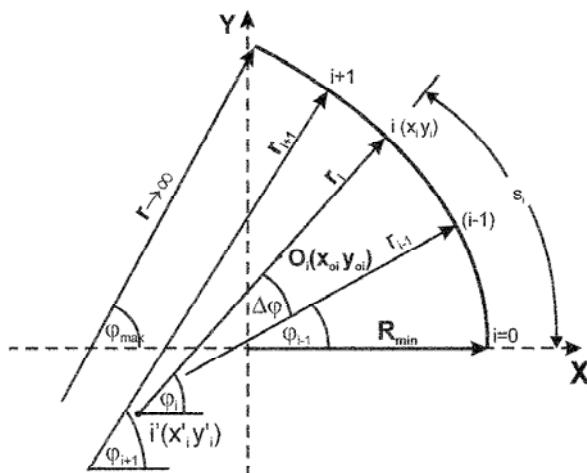
$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R_{\min}} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{L} \cdot s\right) \quad (1)$$

gdzie:  $r$  – wartość promienia w danym punkcie łuku,  
 $R_{\min}$  – wartość promienia minimalnego na wierzchołku łuku,  
 $L$  – długość łuku,  
 $s$  – odległość od wierzchołka łuku.

Kształt łuku zależy od dwóch parametrów: promienia minimalnego  $R_{\min}$  oraz długości łuku  $L$ , a krzywizna jest funkcją odległości od wierzchołka łuku  $s$  (rys.2). Krzywizna łuku zmienia się w sposób ciągły od wartości minimalnej na początku łuku (maksymalna wartość promienia) przez wartość maksymalną na wierzchołku łuku (minimalna wartość promienia) do ponownie wartości minimalnej na końcu łuku.

Obliczenia w celu wytyczenia krzywej [Wierzbicki, Przedwojski 2001] prowadzi się dla odcinka łuku o długości  $s = L/4$  (rys. 2) dla wartości wyjściowych: promienia minimalnego  $R_{\min}$  i długości łuku  $L$ . Wynikiem obliczeń są współrzędne prostokątne ( $X$ ,  $Y$ ) punktów na łuku.

Obliczanie łuku przy założonych parametrach  $R_{min}$  oraz  $L$  wymagało modyfikacji, gdyż nie jest znana *a priori* wartość promienia minimalnego  $R_{min}$  danego zakola oraz dlatego, że układ obliczeniowy  $(X, Y)$  (rys. 2) jest układem lokalnym, który może być obrócony o dowolny kąt w stosunku do układu współrzędnych mapy.

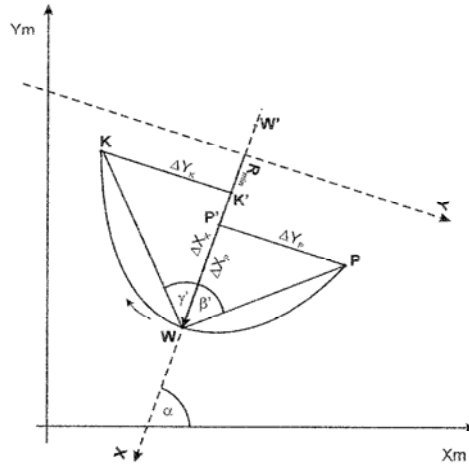


**Rysunek 2.** Schemat tyczenia łuku według krzywej cosinusoidalnej  
**Figure 2.** Schema of cosinegenerated curve marking out

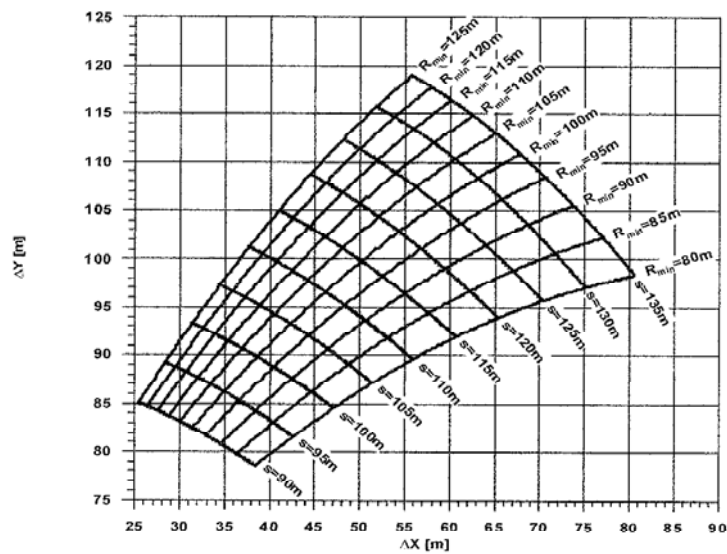
#### OPIS UKŁADU POZIOMEJ BADANEGO ODCINKA RZEKI

Procedura obliczania łuków krzywej cosinusoidalnej do opisu wybranych zakoli zakłada jako wyjściowe współrzędne geodezyjne punktów charakterystycznych łuku (początek, wierzchołek, koniec), dla których szukaną wartością jest promień minimalny  $R_{min}$  na wierzchołku łuku.

Dla schematu obliczeń (rys. 3), po określeniu współrzędnych geodezyjnych punktów zakola: początku –  $P$ , wierzchołka –  $W$ , końca –  $K$ , oblicza się współczynniki kierunkowe oraz wartości kątów nachylenia do osi  $X$  mapy odcinków  $PW$  i  $KW$  oraz  $PW$  i  $KW$ . Wyznaczenie przyrostów współrzędnych  $\Delta X \Delta Y$  dla danej długości łuku pozwala na wyznaczenie wartości promienia minimalnego, obliczenie krzywej oraz parametrów łuku danego zakola, ponieważ dla danej długości łuku  $s$  ( $s = L/4$ ) przyrost obliczeniowych współrzędnych  $\Delta X \Delta Y$  (rys. 3) jest spełniony tylko dla jednej wartości promienia minimalnego  $R_{min}$  (rys. 4).



**Rysunek 3.** Schemat do obliczania parametrów krzywej w układzie współrzędnych mapy  
**Figure 3.** Schema of curve parameters calculating in map's co-ordinates



**Rysunek 4.** Zmienność przyrostów współrzędnych obliczeniowych  $\Delta X \Delta Y$  w zależności od promienia minimalnego i długości łuku (dla  $s = 90-135$  m)  
**Figure 4.** Changes of calculated co-ordinates  $\Delta X \Delta Y$  depended of minimal radius and curve length ( $s = 90-135$  m)

Obliczenia prowadzi się osobno dla części powyżej i poniżej wierzchołka łuku. Wyniki można weryfikować poprzez sprawdzanie przyrostów współrzędnych obliczeniowych, długości i kierunku promienia minimalnego oraz zgodności obliczonych wartości promienia minimalnego na wierzchołku łuku. Do wykonywania obliczeń według zaproponowanej metodyki opracowano program komputerowy, który dla założonych punktów i ich współrzędnych oblicza szukane parametry danego zakola rzeki.

Dla badanego odcinka zakoli rzeki Proсны przeprowadzono obliczenia zgodnie z założoną procedurą, wykorzystując opracowany program. Wynikiem obliczeń jest opis układu poziomego wybranego odcinka rzeki Proсны (rys. 1). Zakola tego odcinka są zakolami niesymetrycznymi o różnych długościach od 95 m do 180 m i wartościach promieni minimalnych od 60 m do 100 m. Zgodnie z założeniami obliczeń krzywej cosinusoidalnej, krzywizna łuków jest najmniejsza na początku łuku i zmienia się w sposób ciągły do wartości największej na wierzchołku (najmniejsza wartość promienia minimalnego) i wartości minimalnej na końcu łuku. Zmiana trasy oraz łączenie łuków następuje w punkcie, gdzie wartość promienia  $r \rightarrow \infty$ .

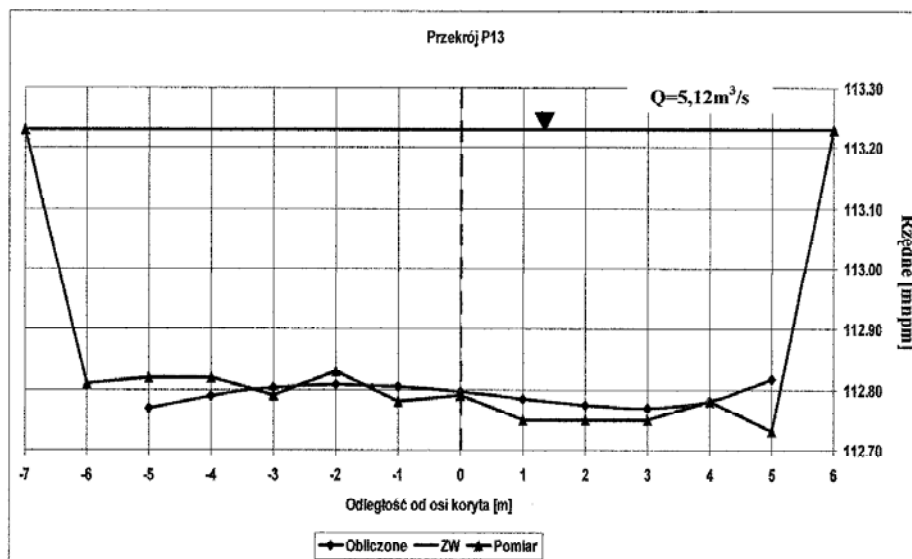
Powyższe rozwiązanie opisu układu poziomego w sposób dokładny odzwierciedla przebieg osi koryta badanego odcinka rzeki Proсны.

Znajomość parametrów krzywych opisujących rzekę pozwala na dokładną charakterystykę warunków przepływu wody w korycie. Stanowi również podstawę do prowadzenia badań modelowych mających na celu odzwierciedlenie zmian, jakie następują w korycie rzeki na długości badanych zakoli.

### **OBLICZENIA BADANEGO ODCINKA RZEKI PROSNY**

Dla badanego odcinka rzeki Proсны wykonano obliczenia na modelu opracowanym przez Przedwojskiego [Przedwojski 1998], służącym do obliczania wartości głębokości przepływu, prędkości podłużnej i prędkości poprzecznej. Obliczenia prowadzi się dla kolejnych przekrojów z biegiem cieku, usytuowanych w dowolnej odległości od przekroju początkowego badanego obszaru przepływu. Przekroje obliczeniowe dobrano tak, aby ich lokalizacja była zgodna z lokalizacją przekrojów pomiarowych koryta rzeki. Porównanie wyników obliczeń z wynikami pomiarów terenowych pozwoliło na weryfikację opisu

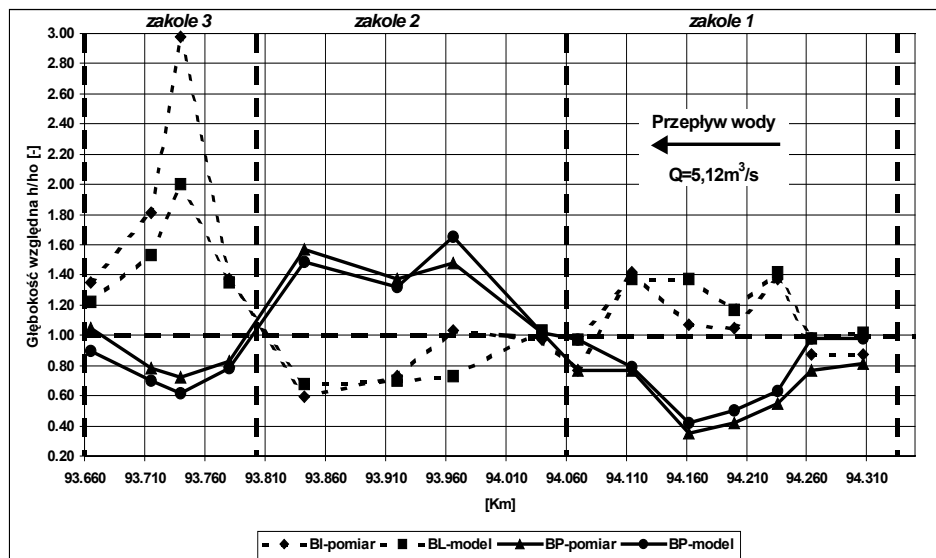
układu poziomego uzyskanego na podstawie mapy numerycznej i opracowanej metodyki. Wybrany, pomierzony i obliczony przekrój poprzeczny P13 przedstawiono na rysunku 5.



**Rysunek 5.** Przekrój pomiarowy P13 – wyniki pomiarów terenowych i obliczeń modelowych

**Figure 5.** Cross section P13 – results of surveys and model calculations

Obliczony układ dna dobrze odwzorowuje pomierzony w naturze kształt koryta. Zgodność wyników obliczeń z rzeczywistym obrazem układu pionowego uwidacznia się również w odniesieniu do profilu podłużnego badanego odcinka rzeki Proсны. W pomierzonych i obliczonych przekrojach obliczono głębokości względne w odległości  $0,2B$  (szerokości w zwierciadle wody) od osi koryta, jako stosunek  $h/h_0$  ( $h$  – dana głębokość,  $h_0$  – głębokość w osi koryta (rys. 6).



**Rysunek 6.** Głębokości względne w profilu podłużnym badanego odcinka rzeki Prosny

**Figure 6.** Relative depths down measured Prosna river section profile

## PODSUMOWANIE I WNIOSKI

Głównym celem badań było uzyskanie opisu układu poziomego wybranego odcinka rzeki Prosny na mapach numerycznych na podstawie układu współrzędnych geodezyjnych oraz opracowanie zależności układu pionowego od układu poziomego rzeki.

Opis układu poziomego badanego odcinka rzeki Prosny uzyskano na podstawie mapy numerycznej, przy zastosowaniu opracowanej metodyki obliczeniowej. Krzywą o zmiennej krzywiznie wykorzystaną do opisu zakoli koryta jest krzywa cosinusoidalna. Obliczenia modelowe posłużyły do weryfikacji otrzymanych rozwiązań. Zgodność danych modelowych z danymi pomiarowymi potwierdziła właściwy dobór parametrów układu poziomego w drodze opracowanej metodyki.

Przeprowadzone analizy wyników pomiarów terenowych oraz obliczeń pozwoliły sformułować następujące wnioski:

1. Wynikiem przeprowadzonych badań jest opracowana metodyka służąca do opisu krzywoliniowego układu poziomego rzeki. Metodyka ta pozwala na obliczenie promienia minimalnego  $R_{min}$  i długości



łuku  $L$  zakoli rzeki na podstawie współrzędnych punktów charakterystycznych zakoli odczytanych z mapy numerycznej.

2. Mapa numeryczna pozwala na szybkie i dokładne określenie wielkości charakteryzujących kształt zakoli w układzie poziomym i opis topografii dna oraz parametrów przepływu wody w korycie krzywoliniowym, a powyższa metodyka może być wykorzystana do opisu istniejącego bądź projektowanego układu poziomego koryta rzeki.

3. Koryto rzeki Proсны na badanym odcinku jest w stanie naturalnym, a zakola tego odcinka są zakolami niesymetrycznymi o różnych długościach i wartościach promieni minimalnych.

4. Analiza wyników obliczeń i porównanie z wynikami badań terenowych wskazuje, że dobór krzywej i metody obliczania jej parametrów był właściwy, a uzyskane krzywe dla badanego odcinka rzeki Proсны odpowiadają rzeczywistemu obrazowi układu poziomego zakoli rzeki. Przedstawione rozwiązanie opisu parametrów przepływu wody w zakolach wykazuje zgodność z rzeczywistą charakterystyką ruchu wody w korycie krzywoliniowym.

## BIBLIOGRAFIA

- Engelund F. *Flow and bed topography in channels bends*. Journal of the Hydraulics Division ASCE, 1974, 100, no HY 11, s. 1631–1648.
- Hook R. *Distribution of Sediment Transport and Shear Stress in Meander Bend*. Journal of Geology, 1975, No 5, vol. 83.
- Leopold L., Lanbein W. B. *River Meanders*. Scientific American, 1966, vol.214.
- Przedwojski B. *Krzywa cosinusoidalna w układzie poziomym rzek*, Gospodarka Wodna nr 2/1990, 1990, s. 40–45.
- Przedwojski B. *Ruch wody i topografia dna w zakolach rzecznych*. Roczniki Akademii Rolniczej w Poznaniu, Poznań 1998.
- Wierzbicki M., Przedwojski B. *Opis poziomego układu cieku naturalnego przy wykorzystaniu krzywej cosinusoidalnej – materiały XXI Ogólnopolskiej Szkoły Hydrauliki*. Wydawnictwo IBW PAN, Gdańsk 2001.
- Wierzbicki M. *Geometria koryta rzeki Proсны poniżej projektowanego zbiornika wodnego Wielowieś-Klasztorna*. Przegląd Naukowy Inżynierii i Kształtowanie Środowiska nr XIII, Wydział Inżynierii i Kształtowania Środowiska SGGW w Warszawie, Warszawa 2004, zeszyt specjalny (30), s. 138–147.
- Wołoszyn J., Czamara W., Eliasiewicz R., Krążel J. *Regulacja rzek i potoków*. Wydawnictwo Akademii Rolniczej we Wrocławiu, Wrocław 1994.

Dr inż. Michał Wierzbicki  
Katedra Budownictwa Wodnego  
Akademia Rolnicza w Poznaniu  
Prof. dr inż. Bogusław Przedwojski  
Katedra Budownictwa Wodnego  
Akademia Rolnicza w Poznaniu

Recenzent: *Prof. dr hab. inż. Wojciech Bartnik*

*Michał Wierzbicki, Bogusław Przedwojski*

## **THE HORIZONTAL CONFIGURATION OF PROSNA RIVER BENDS DESCRIPTION WITH COSINEGENERATED CURVE**

### **SUMMARY**

This article presents characteristic of cosinegenerated curve, its equation, shape and curvature. It presents the methodology of curve parameters (minimum radius and curve length) setting witch describe real river bends in map's co-ordinates. The methodology was used for describing horizontal configuration of river bends down Prosna river section form 94+330 km to 93+660 km located below designed Wielowieś-Klasztorna water reservoir.

On the basis of bends parameters numerical modeling of bed topography was made. Results of modeling were compare with results of in situ surveys. The result of model calculations and in situ surveys is horizontal and vertical configuration dependence down investigate river bends.

On the basis of surveys results it was set that the calculated river bed topography describes real bed topography in a good way. It was also set that calculated curves corresponds with configuration of river bends.

**Key words:** river horizontal configuration, river vertical configuration, river bends, river bed topography