

Analiza widmowa niestacjonarnych drgań złożonych

STANISŁAW PRZYGÓRZEWSKI

W ostatnich latach, w okresie szybkiego rozwoju badań naukowych i przemysłu, szerokie zastosowanie znalazły badania dynamiczne maszyn i urządzeń. Badania te są odpowiedzią na potrzebę zwiększenia sprawności i niezawodności maszyn i urządzeń, a także obniżenia kosztów opracowania nowych konstrukcji. Początkowo badano wpływ drgań na urządzenia pracujące w szczególnie trudnych warunkach eksploatacyjnych, a obecnie badania dynamiczne stosuje się prawie w każdej gałęzi techniki.

Drgania mechaniczne występują w konstrukcjach, które podlegają działaniu zmiennych sił. W niektórych przypadkach drgania służą do uzyskania żądanych efektów np. ubijania betonu, przenoszenia ciał sypkich, zmniejszenia siły tarcia itp. W innym przypadku drgania są zjawiskiem szkodliwym, niszczącym naszą pracę względnie eksploatowane przez nas urządzenia np. drgania budowli, pojazdów mechanicznych, samolotów, obrabiarek itp.

Żeby danym zjawiskiem móc się posługiwać, względnie skutecznie mu się przeciwstawić, należy zjawisko to dokładnie poznać. Służy do tego między innymi analiza widmowa drgań złożonych.

TEORETYCZNE PODSTAWY UZYSKIWANIA WIDMA CHWILOWEGO

1. WIDMO W SENSIE FOURIERA

Klasyczna analiza widmowa obejmuje rozkład funkcji periodycznej na trygonometryczny szereg nieskończony tzw. szereg Fouriera oraz przedstawienie funkcji nieperiodycznej przy pomocy formuły całkowej Fouriera. Zestawimy poniżej komplet wzorów obejmujących te przypadki.

(a) Dla funkcji periodycznej $y = f(t)$ o okresie T , spełniającej tzw. warunki Dirichleta, odpowiadający jej szereg Fouriera ma postać:

$$y = f(t) = \frac{a_0}{2} \sum_{n>1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin \omega_1 t) \quad (1)$$

gdzie:

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) dt$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) \cos n\omega_1 t dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) \sin n\omega_1 t dt$$

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$$

lub też ten sam szereg w prostszej postaci:

$$y = f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} h_n \sin(n\omega_1 t + \varphi_n) \quad (2)$$

gdzie:

$$h_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

$$\varphi_n = \operatorname{arctg} \frac{a_n}{b_n}$$

(b) Dla funkcji nieperiodycznej $y = f(t)$, spełniającej odpowiednie warunki całkowności, przyporządkowaną jej formułę całkową Fouriera przedstawia wzór:

$$y = f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{-\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) \cos \omega(t-s) ds \quad (3)$$

Dogodnie jest stosować powyższe wzory w postaci zespolonej, dla której pisownia jest szczególnie przejrzysta i prosta w przeliczeniach. Przyjmują one postać następującą:

— dla funkcji periodycznej:

$$y = f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{in\omega_1 t} \quad (4)$$

gdzie:

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} f(s) e^{-in\omega_1 s} ds \quad (5)$$

— dla funkcji nieperiodycznej:

$$y = f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) e^{-i\omega(s-t)} ds \quad (6)$$

Jeżeli ponadto wyodrębnić wyrażenie

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) e^{-i\omega s} ds \quad (7)$$

znane jako całka Fouriera, to wzór (3), stanowiący formułę całkową Fouriera, można zapisać w postaci:

$$y = f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (8)$$

Wzory (7) i (8) tworzą układ wzorów transformacyjnych Fouriera. Zbiór współczynników h_n szeregu Fouriera przedstawia się na wykresie jako układ prążków umieszczonych w stałych odstępach, równych wielokrotności częstości podstawowej ω_1 , tj. przyporządkowanych $\omega_k = k \cdot \omega_1$ i tworzy prążkowe widmo harmoniczne.

Każdy prążek stanowi amplitudę odpowiedniej składowej periodycznej. Natomiast całka Fouriera $S(\omega)$ daje na wykresie linię ciągłą, jako tzw. widmo ciągłe, przy czym ciągłość oznacza jedynie tę własność, że każdej wartości ω jest przyporządkowana jakaś wartość $S(\omega)$ na ogół różna od zera. Ponadto wielkość widmowa $S(\omega)$ nie jest amplitudą, lecz gęstością spektralną.

Ujednoczenie zapisu obu wielkości widmowych przedstawionych wzorami (5) oraz (7) jest możliwe w postaci wzoru:

$$G(\omega) = P \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) e^{-i\omega s} ds \quad (9)$$

gdzie odpowiednie wyspecjalizowanie czynnika P pozwala na zróżnicowanie tego wzoru dla funkcji periodycznej i nieperiodycznej. Sama całka Fouriera

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) e^{-i\omega s} ds$$

dla funkcji periodycznej $y = f(s)$ jest rozbieżna dla częstości $\omega_k = k\omega_1$, ale rozbieżność ta jest tego rodzaju, że iloczyn całki $S(\omega)$ z nieskończenie małą wielkością staje się wartością skończoną.

Jeżeli całkę

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(s) e^{-i\omega s} ds$$

traktować i tutaj jako gęstość spektralną, to $G(\omega) = d\omega S(\omega)$ stanowi amplitudę składowej spektralnej odpowiadającą częstości $k\omega_1$.

Dla funkcji nieperiodycznej (przy odpowiednim założeniu co do zbieżności całki) całka Fouriera przedstawia gęstość spektralną, dogodnie jest więc przyjąć jako P dowolną liczbę, stanowiącą jedynie współczynnik proporcjonalności.

W ten sposób wzór (9) obejmuje rzeczywiście oba przypadki przedstawiając w każdym z nich wartość skończoną wielkości widmowej, tj. dla funkcji periodycznej amplitudę składowej elementarnej, dla nieperiodycznej — gęstość spektralną.

Należy jeszcze podkreślić, że gęstość spektralna dla prążka widmowego odpowiadającego składowej funkcji periodycznej jest nieskończona, co wynika z poprzednich rozważań, natomiast amplituda składowej elementarnej dla funkcji nieperiodycznej jest wielkością infinitezymalną. Gdyby bowiem pomnożyć całkę $S(\omega)$, przedstawiającą skończoną wartość gęstości spektralnej przez $d\omega$, to formalnie

uzyskałoby się również dla funkcji nieperiodycznej amplitudę składowej elementarnej, ale byłaby ona wielkością nieskończenie małą.

Dlatego też ma sens wyodrębnienie przede wszystkim tych wielkości widmowych, które dla danego przebiegu mają wartości skończone.

Widmo w sensie Fouriera w odniesieniu do funkcji, w której można wydzielić składniki periodyczne i nieperiodyczne, w najogólniejszym pojęciu przedstawia zbiór amplitud składowych periodycznych oraz gęstość spektralną składnika nieperiodycznego.

Wielkość widmowa $G(\omega)$ w iloczynie z czynnikiem periodycznym daje składową elementarną, którą przedstawia wzór:

$$\Phi(\omega, t) = G(\omega) e^{i\omega t} = P \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) e^{i\omega(t-s)} ds \quad (10)$$

Jeżeli wykona się superpozycję składowych elementarnych dla pewnego skończonego przedziału częstości, to znaczy scałkuje się wzór (10) w granicach np. (ω_1, ω_2) , otrzyma się składową spektralną określoną wzorem:

$$\begin{aligned} \Psi(\omega_1, \omega_2, t) = & \int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{i\omega t} d\omega \left(P \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) e^{-i\omega s} ds \right) - \\ & - P \int_{\omega_1}^{\omega_2} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) e^{i\omega(t-s)} ds \end{aligned} \quad (11)$$

Ten zarys zagadnień matematycznej analizy widmowej stanowi pewną zwartą całość konieczną jako wprowadzenie do problemów analizy przebiegów realnie istniejących drganiowych.

2. WIDMO CHWILOWE JAKO UOGÓLNIENIE WIDMA FOURIEROWSKIEGO

Drgania, które realnie istnieją nie mają charakteru periodycznego we właściwym tego słowa znaczeniu, nie mogą więc być przedstawione za pomocą funkcji periodycznej, która jest zawsze zdefiniowana w nieskończonym zakresie swego argumentu. Drgania realnie istnieją w czasie skończonym, mogą więc stanowić co najwyżej dostatecznie długi wycinek przebiegu periodycznego, tzn. można je uważać za drgania monochromatyczne w sensie uogólnionym. Stąd wynika bezpośrednio nieprzydatność rozkładu funkcji na szereg Fouriera dla interpretacji zjawisk realnie istniejących.

Pozorne jest również tylko dopasowanie całki Fouriera jako metody dla analizy zjawisk nieperiodycznych. Wprawdzie formalizm ten nie zakłada i nie wymaga ani periodyczności funkcji, która miałaby jakieś zjawisko opisywać, ani nieskończonego czasu jej trwania, ale w wyniku analizy prowadzi on do uzyskania wielkości widmowych stałych w czasie oraz do periodycznych składowych elementarnych. Byłoby całkowicie niekonsekwentne dążenie do uzyskania składowych periodycznych wtedy, kiedy samo pojęcie periodyczności wykluczamy jako nie znajdujące realnego odpowiednika fizycznego.

Konieczne więc były poszukiwania metod dla analizy zupełnie dowolnych zjawisk drganiowych o urozmaiconych przebiegach w czasie. Wypracowanie metody

uogólnionej analizy harmonicznej [2, 7] oraz widma chwilowego [4, 5, 6], ponadto prawie równoległe widma bieżącego i chwilowego [1] (ale w odrębnym sensie niż tu stosowane) oraz ewolucyjnego [3], stanowią nowy etap w rozwoju metod widmowych dostosowanych do badań przebiegów i zjawisk drganiowych.

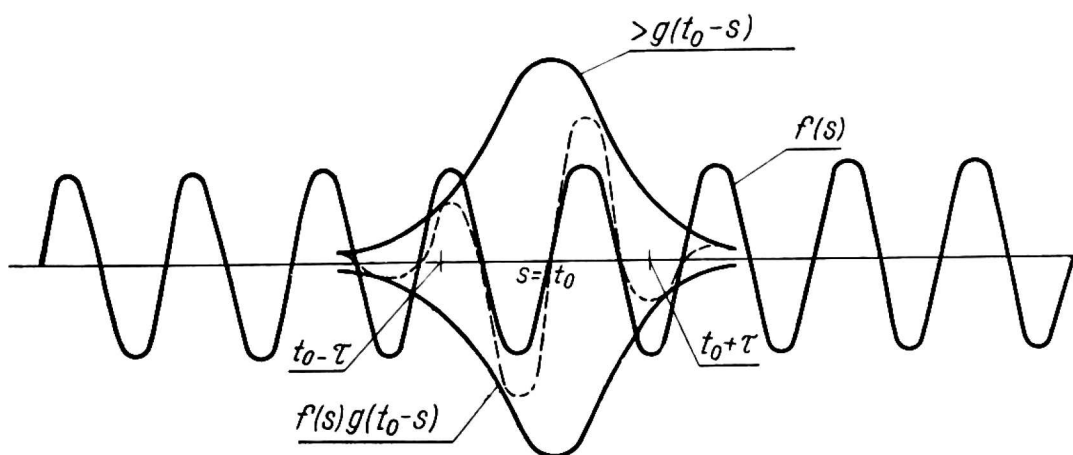
W pracy tej ograniczymy się tylko do widma chwilowego, więc ono jedynie będzie przedmiotem dalszych szczegółowych rozważań. Ogólnie warto tylko podkreślić, że wszystkie wyżej wymienione rodzaje widma mają charakter dynamiczny, tj. umożliwiającą zdanie sprawy ze zmiennego w czasie przebiegu analizowanego zjawiska.

Przejsie od całki Fouriera do formalizmu widma chwilowego, wykazującego, jak już wspomniano, dynamiczne własności w porównaniu do stałych w czasie wielkości, które daje nam całka, dokonano przez wprowadzenie jako czynnika pod całkę pewnej funkcji, której zadaniem jest odpowiednie zawężenie granic całkowania do wybranego otoczenia chwili bieżącej, stąd też jej nazwa „funkcji granic”.

Formalizm widma chwilowego przedstawia zatem wzór

$$G(\omega, t) = P \int_{-\infty}^{+\infty} f(s)g(t-s)e^{-i\omega s} ds \quad (12)$$

gdzie P jest czynnikiem normalizującym, $g(t-s)$ funkcją granic. Argument funkcji granic jest dobrany pod kątem widzenia możliwości zacieśnienia granic całkowania, którego ona dokonuje w otoczeniu pewnego wybranego punktu $s = t$. Jeżeli wyobrazić sobie, że drganie analizowane przedstawione funkcją $y = f(s)$ zostało zarejestrowane tak jak pokazuje rys. 1, to dobranie dla funkcji granic argumentu $(t-s)$ pozwala na umieszczenie tej funkcji tak, aby tzw. punkt charakterystyczny, który najczęściej odpowiada jej maksimum, znalazł się w dowolnie obranym punkcie $s = t$ i mógł się poruszać do odpowiednio dyskretnie wybranych punktów $s = t_1, t_2, \dots$



Rys. 1. Przesuwanie funkcji granic na tle zarejestrowanego drgania

Na rys. 1 funkcji granic daliśmy pewien określony kształt. Dokładne badania przydatności jakiejś funkcji jako funkcji granic pokazują [6], że z funkcji dotychczas zbadanych jedynie funkcja błędu Gaussa może być użyta do wytworzenia widma chwilowego.

Dla zilustrowania zasadniczej roli, jaką w powstawaniu widma chwilowego odgrywa odpowiedni dobór funkcji granic, najlepiej przedstawić zależność prążka

widmowego od kształtu funkcji granic. Jeżeli poddać analizie drgania monochromatyczne, przedstawione przy pomocy funkcji

$$f(s) = e^{i\omega_1 s}$$

to drganie składowe uzyskane na zasadzie widma chwilowego przedstawi wzór

$$\Phi(\omega_1 t) = P \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega_1 s} g^{(t-s)} e^{i\omega(t-s)} ds \quad (13)$$

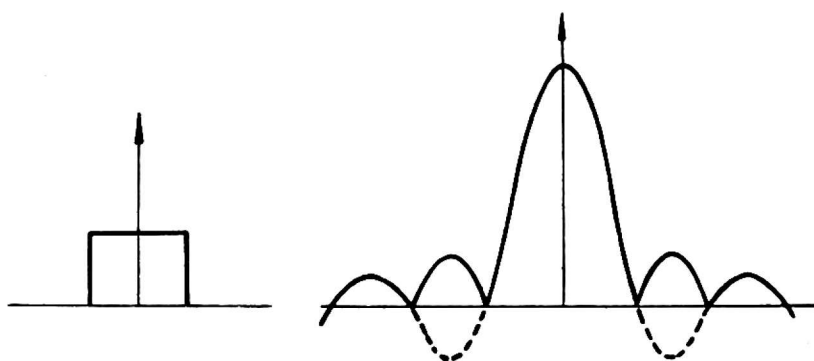
Przyjmując nową zmienną $t-s = u$ oraz wprowadzając wielkość $\Omega = \omega_1 - \omega$, która daje miarę rozstrojenia częstości względem częstości zawartej w analizowanym przebiegu, można łatwo wykazać, że

$$\Phi(\omega, t) = P\gamma(\Omega, \omega) e^{i\omega_1 t} \quad (14)$$

gdzie wielkość γ przedstawia się wzorem

$$\gamma(\Omega, \omega_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\omega) e^{-i\Omega u} du \quad (15)$$

Stanowi ona amplitudę składowej drgania o częstości ω_1 , ponadto formalnie jest widmem fourierowskim funkcji granic. Decyduje więc ona o kształcie prążka widmowego, a w konsekwencji wpływa na postać obwiedni składowej uzyskanej w wyniku analizy. Odpowiednim więc doбором funkcji granic można regulować stopień rozmycia czy w ogóle kształt prążka widmowego.



Rys. 2. Funkcja granic prostokątna i jej widmo

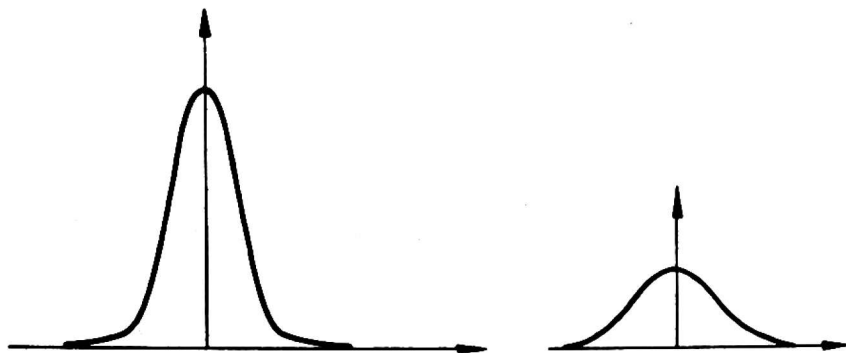
Zestawienie dwóch odpowiednio wybranych funkcji granic uwypukli dokładniej, tymczasem w zakresie teoretycznego traktowania zagadnienia, zależność wyników analizy od zastosowanej funkcji granic. Użycie prostokątnej funkcji granic określonej wzorami

$$g(s) = \begin{cases} 0 & \text{dla } s < a \\ 1 & \text{dla } a \leq s \leq b \\ 0 & \text{dla } b < s \end{cases}$$

prorowadzi do uzyskania prążka widmowego kształtu $\frac{\sin x}{x}$ (rys. 2).

Zastosowanie funkcji granic typu funkcji błędu Gaussa $g(s) = e^{-k^2 s^2}$ daje w wyniku prążek o tym samym kształcie (rys. 3).

Widmo chwilowe to — w pierwszym rzędzie — widmo, którego zadaniem a zarazem i własnością ma być potencjalna możliwość zdania sprawy ze zmieniającego się w czasie, w zależności od samego przebiegu, składu widmowego analizowanego zjawiska. Ale głębszy sens temu pojęciu nadały dopiero wymagania, aby spełniło ono tzw. warunki zachowania wierności w dziedzinie częstości [3, 6] oraz czasu [4, 5].



Rys. 3. Funkcja granic typu funkcji błędu Gaussa i jej widmo

Pierwszy z nich wyraża się w żądaniu, aby widmo posiadało maksimum jedynie dla tych częstości, które występują w analizowanym drganiu. Wtedy dla drgań monochromatycznych prążek widmowy powinien posiadać jedyne maksimum dla odpowiedniej częstości zawartej w drganiu.

Wymaganie zachowania wierności w dziedzinie czasu łatwiej wyrazić, przenosząc to wymaganie na składową spektralną. Dotyczy ona żądania, aby składowa ta istniała w czasie równym lub niewiele dłuższym od czasu trwania samego przebiegu, a ewentualne przebiegi transjentowe były jak najbardziej krótkotrwałe i charakteryzowały się monotonicznym przebiegiem obwiedni.

Powołując się na omówioną poprzednio zależność kształtu prążka widmowego od zastosowanej funkcji granic, łatwo zdać sobie sprawę z tego, że funkcja granic typu funkcji błędu Gaussa jest tą, która gwarantuje, zachowuje w widmie obu rodzajów wierności, dopuszczając bowiem pewne rozmycie prążka, nie powoduje jednak powstawania maksimum bocznych dla częstości nie zawartych w analizowanym przebiegu, ponadto zapewnia monotoniczny wzrost (lub zanikanie) obwiedni transjentu składowej spektralnej.

Należy podkreślić wagę i trochę dokładniej omówić postać przebiegu widma oraz obwiedni odpowiedniej składowej spektralnej przy zastosowaniu gaussowskiej funkcji granic dla drgania startującego od zera, czy też zanikającego gwałtownie. Ma to bowiem znaczenie dla możliwości potraktowania dostatecznie długiego impulsu o obwiedni prostokątnej jako wycinka drgania monochromatycznego przy analogicznym sposobie powstawania i wygasania jak wyżej omówiony.

Rozważania nad kształtowaniem się widma dla tego rodzaju przebiegu można krótko przedstawić następująco [5, 6].

Drganie monochromatyczne startujące od zera (rys. 4) w chwili $s = t_0$ można opisać przy pomocy wzorów

$$f(s) = J(s)e^{i\omega_1 s}$$

gdzie:

$$J(s) = \begin{cases} 1 & \text{dla } s \geq t_0 \\ 0 & \text{dla } s < t_0 \end{cases}$$



Rys. 4. Drgania monochromatyczne startujące od zera w chwili $s = t_0$

Widmo chwilowe przy zastosowaniu funkcji granic $g(t-s)$ przedstawia się wzorem

$$G(\omega, t) = P \int_{-\infty}^{+\infty} J(s-t_0) e^{i\omega_1 s} g(t-s) e^{-i\omega s} ds$$

po podstawieniu $t-s = u$ i $\omega_1 - \omega = \Omega$ wzór ten przyjmie postać

$$G(\omega, t) = P \int_{-\infty}^{+\infty} J(t-u-t_0) g(u) e^{-i\Omega u} du$$

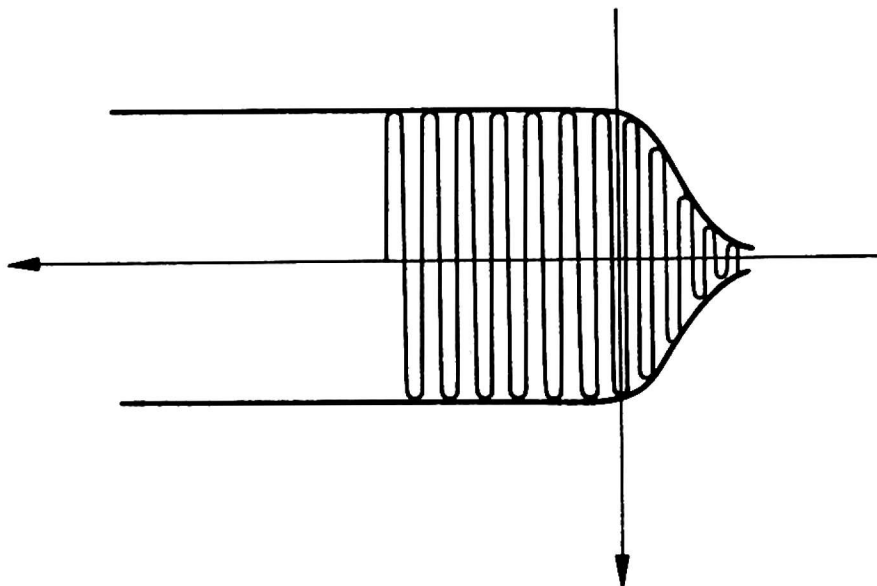
Ponieważ $J(t-u-t_0)$ jest funkcją skoku jednostkowego dla $s = t_0$, a w przeniesieniu ma nową zmienną dla $u = t-t_0$, obcina ona wszystkie przyczynki poniżej t_0 , tj. dla $u > t-t_0$ będzie więc

$$G(\Omega, t) = P \int_{-\infty}^{t-t_0} g(u) e^{-i\Omega u} du \quad (16)$$

Po dokładniejszym przeanalizowaniu tego wzoru widać, że dla $t \ll t_0$, tj. $t-t_0 \ll 0$, całka (16) znika, dla t rzędu wielkości t_0 , tj. $t-t_0 \simeq 0$, ostatnia całka będzie równa całce

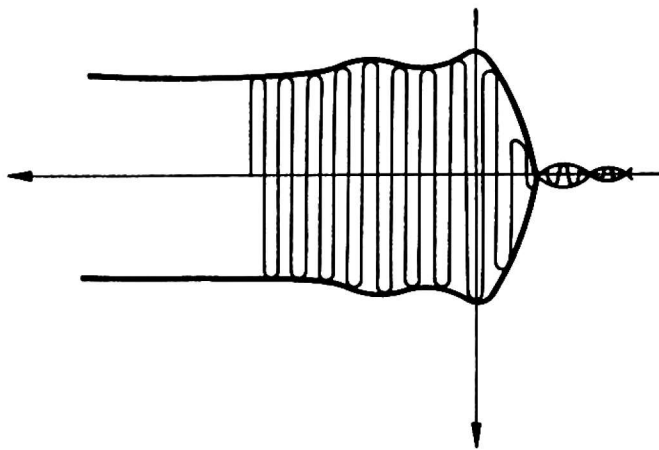
$$\int_{-\infty}^0 g(u) e^{-i\Omega u} du$$

i dla parzystej funkcji granic $g(u)$ będzie $S(\Omega, t) = \frac{1}{2}\gamma(\Omega)$, przy czym wielkość $\gamma(\Omega)$ jest wzięta z wzoru (15), dla $t \gg t_0$ można przyjąć $S(\Omega, t) = \gamma(\Omega)$.



Rys. 5. Przebieg obwiedni transjentu składowej spektralnej uzyskanej przy pomocy gaussowskiej funkcji granic

Najbardziej interesujące jest otoczenie punktu t_0 , dla którego wielkość widmowa $S(\Omega, t)$ narasta od 0 do pełnej osiągalnej wartości, tj. amplitudy $\gamma(\Omega)$ drgania monochromatycznego, a sposób narastania jest uzależniony od postaci funkcji granic. Samo narastanie amplitudy drgania w zależności od kształtu funkcji granic łatwiej zaobserwować, rozpatrując obwiednię składowej i jej przebieg w zakresie nieustalonym (rys. 5).



Rys. 6. Przebieg obwiedni transjentu składowej spektralnej, uzyskanej przy pomocy prostokątnej funkcji granic

Funkcja błędu Gaussa wytwarza monotoniczny przebieg obwiedni składowej, natomiast funkcja granic prostokątna powoduje zarysowanie się dla tego samego nieustalonego zakresu drgania dodatkowych maksimum w widmie, a w przeniesieniu na postać obwiedni składowej spektralnej pozwala zaobserwować tzw. „nawroty pamięci” w zakresie transjentu początkowego lub końcowego (rys. 6).

3. WYBRANE ZAGADNIENIA TEORETYCZNE ZWIĄZANE Z EKSPERYMENTALNĄ REALIZACJĄ WIDMA CHWILOWEGO

Przechodząc od rozważań teoretycznych do zagadnień eksperymentalnej realizacji widma chwilowego, należy pokazać, że w aparaturze analizującej istnieje rzeczywiście „odpowiednik” funkcji granic, tj. czynnika wytwarzającego w formalizmie widmowym granice całkowania.

Nie jest to jakiś pojedynczy element, ale zespół elementów, a właściwie ich współdziałanie, które w procesie eksperymentalnego tworzenia się widma odgrywa taką rolę jak funkcja granic w samym formalizmie. Ten zespół czynników nazwano funkcją pamięci aparatury [2].

Analizując działanie aparatury spektralnej, w szczególności wymienionych dwóch zasadniczych jej rodzajów, jak filtry i analizatory (np. heterodynowe), stosunkowo nietrudno doszukać się postaci funkcji pamięci aparatury analizującej.

Rozpatrzmy przypadek filtra, którego zadaniem jest wydzielenie z analizowanego przebiegu tzw. składowej spektralnej. Wyeliminowanie czynnika czasowego, a więc np. pomiar na wyjściu filtra samego napięcia, doprowadzić może do zarejestrowania wielkości widmowej.

Jeżeli do filtru pasmowego o częstotliwości środkowej ω wprowadzić drganie monochromatyczne o częstotliwości ω_1 i ustalić tak zasadę jego działania, aby on przepuścił drganie o tej samej częstotliwości, co można zapisać analitycznie przy pomocy wzoru

$$\Phi(\omega, t) = P\gamma(\omega, \omega_1 t)e^{i\omega_1 t} \quad (17)$$

gdzie γ stanowi funkcję przepuszczania filtru, to stosując formalizm widma chwilowego otrzyma się

$$\Phi(\omega, t) = P \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega_1 s} g(t-s) e^{i\omega(t-s)} ds$$

Stąd po prostych przeliczeniach uzyskuje się dla funkcji przepuszczania postać

$$\gamma(\omega, \omega_1) = P \int_{-\infty}^{+\infty} g(u) e^{-i\Omega u} du \quad (18)$$

Funkcja przepuszczania jest więc formalnie widmem fourierowskim funkcji granic, która w odniesieniu do aparatury nosi nazwę funkcji pamięci.

Ażeby z kolei otrzymać efektywną postać funkcji pamięci, po pomnożeniu wzoru (18) obustronnie przez $e^{i\Omega t}$ i scałkowaniu w granicach nieskończonych, uzyskuje się

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \gamma(\Omega) e^{i\Omega t} dt = P \int_{-\infty}^{+\infty} d\Omega \int_{-\infty}^{+\infty} g(u) e^{i\Omega(t-u)} du \quad (19)$$

gdzie $\Omega = \omega_1 - \omega$.

Prawa strona wzoru (19) jest formułą całkową dla funkcji $g(t)$, stąd

$$g(t) = Q \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma(\Omega) e^{i\Omega t} dt \quad (20)$$

lub, z uwagi na symetrię funkcji γ

$$g(t) = Q \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma(\Omega) e^{-i\Omega t} dt \quad (20')$$

W wyniku uzyskuje się przedstawienie funkcji pamięci jako widma fourierowskiego funkcji przeniesienia filtru. Między tymi dwiema funkcjami zachodzi więc zależność w sensie transformacji Fouriera. Odpowiednie ukształtowanie funkcji przeniesienia (a dla analizatora — funkcji rozkładu) może pośrednio zadecydować o kształcie funkcji pamięci, która nadaje wagę przyczynom do całkowania, wytwarza odpowiedni kształt dla prążka widmowego oraz odpowiednią postać obwiedni składowych spektralnych, interesującą szczególnie w zakresie ich stanu nieustalonego

Drugą sprawą niezmiernie ważną dla dalszych badań, a wiążącą się również z opisem działania aparatury, to oszacowanie tzw. relacji nieostrości

$$\Delta\omega \cdot \Delta t = \text{const.}$$

i wynikające stąd konsekwencje, Δt jest bowiem czasem tworzenia się widma, $\Delta\omega$ określa dokładność lokalizacji uzyskanej wielkości widmowej na osi częstotliwości,

a w odniesieniu do aparatury stanowi ograniczenie dla zakresu częstości (tzw. „bramkę”).

Jest oczywiste, że im dłuższy czas analizy, tym dokładniejszy jej wynik w sensie lokalizacji na osi częstości. Najlepiej scharakteryzować to w oparciu o rozważania analizy matematycznej na przykładzie impulsu cosinusowego wyciętego z drgania monochromatycznego o częstości ω_0 , który stopniowo się wydłuża, obejmując z kolei analizą dwa dowolnie wybrane, coraz to dłuższe wycinki tego samego drgania.

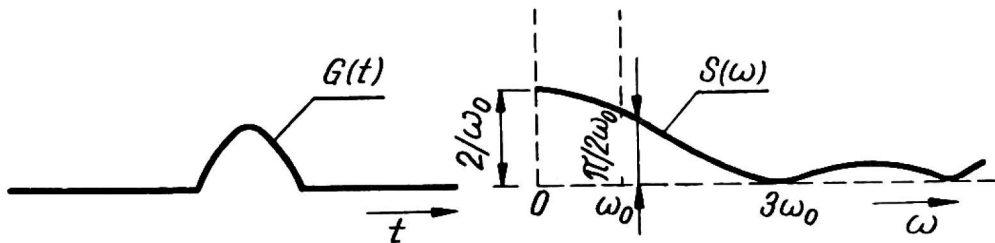
Zestawienie postaci analitycznych tych trzech zbadanych przypadków dogodnie jest podać w następującej postaci:

$$y = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < -(2n+1)\frac{T}{4} \\ a \text{ const.} & \text{dla } -(2n+1)\frac{T}{4} \leq t \leq (2n+1)\frac{T}{4} \\ 0 & \text{dla } (2n+1)\frac{T}{4} < t \end{cases}$$

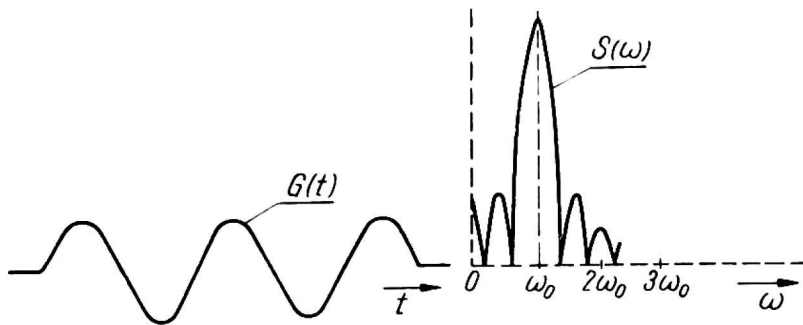
gdzie n przyjmuje wartość

$$(1) n = 0 \quad (2) n = 2 \quad (3) n = 5$$

Widma odpowiadające tym trzem przebiegom są przedstawione odpowiednio na rysunkach 7, 8 i 9.

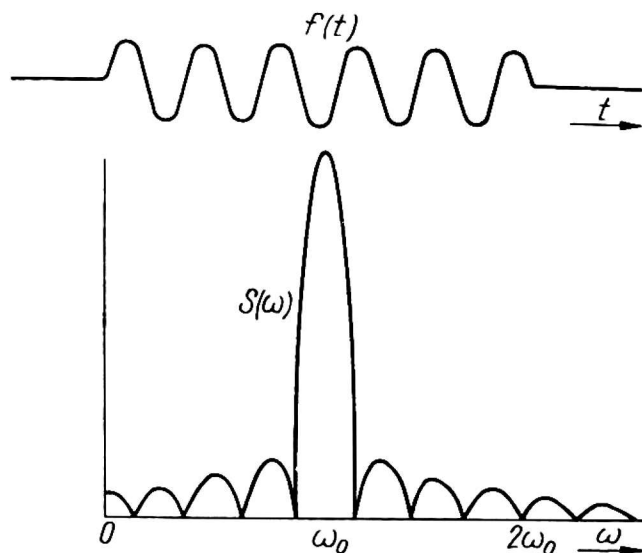


Rys. 7. Przebieg funkcji oraz jej widma dla $n = 0$



Rys. 8. Przebieg funkcji oraz jej widma dla $n = 2$

Jak widać, widmo bardzo krótkotrwałego impulsu cosinusowego jest prawie płaskie i nie pozwala zlokalizować częstości drgania, z którego ten wycinek został wycięty. Dla możliwości więc uzyskania jakiegoś konkretnego wyniku analizy drgania monochromatycznego konieczna jest pewna minimalna długość wycinka Δt

Rys. 9. Przebieg funkcji oraz jej widma dla $n = 5$

tego drgania, która jest zdolna do wytworzenia wyraźnie zarysowującego się maksimum widmowego, a tym samym do wyznaczenia odpowiedniego $\Delta\omega$.

Z drugiej strony, dla uchwycenia zmian w czasie konfiguracji badanego przebiegu, istotnych dla widma chwilowego, konieczne jest skrócenie czasu analizy, co znowu wpływa niekorzystnie na wzrost wielkości $\Delta\omega$. Stąd wynika potrzeba optymalnego wyboru jednej z tych wielkości z myślą o wartości drugiej.


To zagadnienie traktowane z punktu widzenia teorii widma chwilowego nabiera trochę innego znaczenia, gdyż czas trwania impulsu, któremu można już przyporządkować jakieś maksimum widmowe, zależy i wzajemnie powiązany z czasem Δt funkcji granic i odpowiednio w realizacji eksperymentalnej — funkcji pamięci aparatury, a nie tylko z czasem trwania samego zjawiska.

W matematycznym formalizmie określającym widmo chwilowe, czas powstania widma musi być wyznaczony przez przedział, w którym funkcja granic jest różna od zera. Jeżeli więc funkcja ta ma postać odpowiadającą przebiegowi funkcji błędu Gaussa, to Δt należy określić w drodze umowy, gdyż funkcja tego typu nie posiada miejsc zerowych.

Na ogół przyjmuje się jako użyteczny zakres funkcji pamięci aparatury taki przedział, na końcu którego funkcja przyjmuje pewną ustaloną wartość, a więc np. dla wymienionej wyżej funkcji wartość

$$e^{-\frac{\pi}{4}} = 0,456 \approx 0,5$$

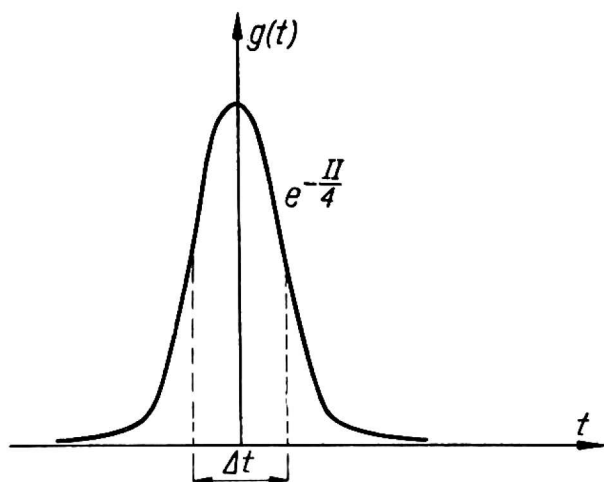
Jest to tzw. połówkowa szerokość funkcji błędu Gaussa.

Jak już wspomniano, kształt prążka widmowego jest określony przez widmo fourierowskie funkcji granic lub też w analizie eksperymentalnej — funkcji pamięci aparatury. Dla gaussowskiej funkcji pamięci prążek ma również postać funkcji błędu Gaussa. Wielkość Δt ustalono na drodze umowy, natomiast $\Delta\omega$ wynika z przeliczeń, które przedstawiają rys. 10 i 11. 

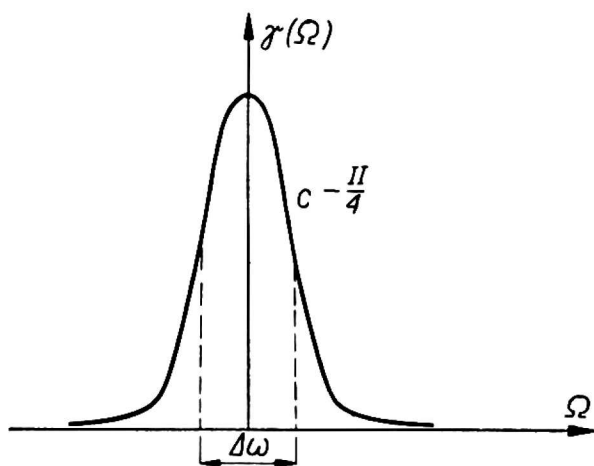
Jeżeli rozpatrywana funkcja granic ma postać $g(t) = he^{-k^2t^2}$, gdzie zwykle oznacza się $\Delta t = 2\tau$, przy czym dogodnie jest przyjąć $h = \frac{\sqrt{\pi}}{2\tau}$ (rys. 10), to rzędne na

końcach przedziału Δt mają wartość $\approx 0,4564$, jest to więc tzw. szerokość połówkowa. Widmo tej funkcji granic ma postać

$$\gamma(\Omega) = he^{-\frac{\tau^2 \Omega^2}{\pi}}$$



Rys. 10. Funkcja błędu Gaussa jako funkcja granic i jej szerokość połówkowa



Rys. 11. Widmo funkcji błędu Gaussa i jego szerokość połówkowa

Zakres $\Delta\omega$ dla częstości stanowiącej odpowiednią „widmową” szerokość połówkową, tj. przedział, na końcu którego funkcja przyjmuje wartość $e^{-\frac{\pi}{4}}$, jest określony przez $\Delta\omega = \frac{\pi}{2} \pi$, stąd związek $\Delta\omega \cdot \Delta t = 2\pi$.

Jest to najmniejsza z osiągalnych wartości dla iloczynu określającego tzw. relację nieostrości.

STRESZCZENIE

W ostatnich latach, w okresie szybkiego rozwoju badań naukowych i przemysłu, szerokie zastosowanie znalazły badania dynamiczne maszyn i urządzeń. Badania te są odpowiedzią na potrzebę zwiększenia sprawności i niezawodności maszyn i urządzeń, a także obniżenia kosztów opracowania nowych konstrukcji. Początkowo badano wpływ drgań na urządzenia pracujące w szczególnie trudnych warunkach eksploatacyjnych, a obecnie badania dynamiczne stosuje się prawie w każdej gałęzi techniki.

Drgania mechaniczne występują w konstrukcjach, które podlegają działaniu zmiennych sił. W niektórych przypadkach drgania służą do uzyskania żądanych efektów np. ubijania betonu, przenoszenia ciał sypkich, zmniejszenia siły tarcia itp. W innym przypadku drgania są zjawiskiem szkodliwym, niszczącym naszą pracę względnie eksploatowane przez nas urządzenia np. drgania budowli, pojazdów mechanicznych, samolotów, obrabiarek itp.

Żeby danym zjawiskiem móc się posługiwać, względnie skutecznie mu się przeciwstawić, należy najpierw zjawisko to dokładnie poznać. Służy do tego między innymi analiza widmowa drgań złożonych.

W opracowaniu omówiono teoretyczne podstawy uzyskiwania widma chwilowego z uwzględnieniem:

- (1) widma w sensie Fouriera,
- (2) widma chwilowego jako uogólnienia widma fourierowskiego,
- (3) wybranych zagadnień teoretycznie związanych z eksperymentalną realizacją widma chwilowego.

LITERATURA

1. Charkiewicz A., *Spektry i Analiz*, Moskwa 1962.
2. Kwiek M., *Nowa metoda statystycznej i harmonicznej analizy hałasu*. Prace II Sem. Otw. z Akustyki, Olsztyn 1955, s. 157—172.
3. Pimonow L., *Vibrations en regime transitoire*, Paris 1962.
4. Przygórzewski S., *Modèles spatiaux d'évolution du spectre instantané de differents bruits d'impulsion*. F-65-5 Congrès International D'Acoustique, Liège 1965.
5. Przygórzewski S., *Sur le pouvoir de séparation du son, les bases théoriques d'obtention du spectre momentané*. Bull. de la soc. des amis des sciences et lettres de Poznań, Serie B — XIX Liv. 1966, pp. 141—149.
6. Ryffert H., *Uzyskiwanie widma chwilowego na zasadzie uogólnionej analizy drgań*. Postępy Akustyki, 1961, s. 49—88.
7. Wagner K. W., *Einfubrung in die Lehre von den Schwingungen und Wellen*. Wisbaden 1947.

СТАНИСЛАВ ПЖЫГУЖЕВСКИ

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СЛОЖНЫХ КОЛЕБАНИЙ

Р е з ю м е

В периоде быстрого развития научных и промышленных исследований, широкое применение за последние годы нашли динамические исследования машин и установок. Исследования эти являются отзывом на необходимость повышения исправности и надежности машин и установок, а также уменьшения стоимости разработки новых конструкции. Сначала испытывалось влияние колебаний на установки работающие в особенно тяжелых эксплуатационных условиях. Теперь динамические исследования применяются почти в каждой отрасли техники.

Механические колебания выступают в конструкциях где действуют переменные силы. В некоторых случаях колебания употребляются для получения требуемых эффектов нп. уплотнение бетона, перемещение сыпучих материалов, уменьшение сил трения и прочее. В других случаях колебания являются вредным явлением, которое уничтожает наш труд или использованные нами установки нп. колебания постоек механических средств передвижения, самолетов, станков и т. п.

Чтобы использовать это явление или же эффективно противодействовать ему, следует раньше подробно его изучить. Для изучения этого явления употребляется, между прочим, спектральный анализ сложных колебаний.

В настоящей работе излагаются теоретические основы получения мгновенного спектра учитывая:

- (1) спектр Фурье,
- (2) мгновенный спектр как обобщение спектра Фурье,
- (3) избранные теоретические задачи связанные с экспериментальным осуществлением мгновенного спектра.