

JAN MARIAN WŁODEK

Zakład Biologii Wód PAN, Zakład Statystyki WSR Kraków

OBLICZANIE MNOŻNIKÓW GAUSSA DLA CELÓW DOŚWIADCZALNICTWA ROLNICZEGO

I. Wstęp

Zajmując się badaniami korelacji i regresji w związku z hodowlą nowych produktywnych szczepów karpia polskiego, wprowadziłem do tych badań metodę regresji i korelacji wielorakich, zwanych też wielokrotnymi. Zastosowanie analizy wielorakiej w hodowli karpia umożliwia nam pełniejsze wniknięcie w powiązania morfologiczno-użytkowe karpia polskiego. Charakterystyczną cechą analizy jest to, że traktujemy w niej cały szereg zmiennych w przeciwieństwie do analizy zwykłej (prostej), gdzie ujmuje się tylko dwie zmienne równocześnie. Dotychczas stosowano analizę statystyczną zwykłą do badań nad karpem w latach 30 w Czechosłowacji, Niemczech i Austrii. W Polsce, która jest przecież kolebką rasy karpia polskiego, znanej w gospodarce stawowej na całym świecie pod niesłuszną nazwą rasy karpia galicyjskich, analizy statystycznej, choćby dla poznania samej rasy tylko, nie stosowano ani przed II wojną światową, ani po wojnie. Dopiero z chwilą objęcia w 1953 r. kierownictwa ruszyły pełną parą prace nad karpem polskim. Praca ta jest wynikiem naukowego Zakładu Biologii Stawów PAN przez prof. K. Starmacha, studium metodycznego, jakie przeprowadzałem w ostatnich latach w Zakładzie Biologii Stawów (obecnie Wód) PAN, nad zastosowaniem metody regresji i korelacji wielorakich do badań nad karpem polskim. Wyniki tej pracy mogą być wykorzystane nie tylko przez gospodarke stawową w hodowli karpia polskiego, ale i przez doświadczalnictwo rolnicze.

Metoda regresji i korelacji wielorakich jest w statystyce rolniczej od dawna znana, jednak stosowanie jej do badań naukowych miało ograniczone miejsce, ze względu na ogromny nakład pracy potrzebny do pokonania przy jej stosowaniu. Wiązało się to zwłaszcza z rozwiązywaniem układów równań normalnych o wielu niewiadomych.

Mnożnikami Gaussa nazywamy w statystyce elementy krakowianu (11) (macierzy) odwrotnościowego układu równań normalnych.

Mnożniki Gaussa służą nam do szeregu obliczeń związanych ściśle z metodą regresji i korelacji wielorakich; do obliczania równań regresji wielorakiej (komplet współczynników regresji), do obliczania błędów

współczynników regresji cząstkowej i analizy zmienności w regresji wielorakiej.

Przy stosowaniu metody regresji i korelacji wielorakich zagadnienie metody, za pomocą której dochodzimy do obliczania współczynników regresji cząstkowej, staje się szczególnie palące, zwłaszcza wówczas, gdy wzrasta ilość zmiennych w badanym zagadnieniu. Chodzi o to, aby metoda ta była najprostsza, to znaczy, aby posiadała najprostszy schemat myślowy oraz aby była najłatwiejsza w wykonaniu praktycznym, to jest, aby miała do wykonania jak najmniejszą ilość działań rachunkowych. Prostota i łatwość wykonania wiążą się ze sobą. Te dwa postulaty są szczególnie ważne dla doświadczalnika-rolnika, którego nie powinno się obciążać zbyt skomplikowanymi obliczeniami.

Oprócz podania tutaj najlepszej metody obliczania mnożników Gaussa, podam też metodę obliczania błędów średnich współczynników regresji cząstkowej oraz obliczanie kompletu równań regresji wielorakiej. Praktyczna bowiem korzyść z obliczania mnożników Gaussa uwidacznia się przy obliczaniu błędów średnich współczynników regresji cząstkowej oraz kompletu współczynników regresji cząstkowej. Np. w problemie statystycznym, gdzie przyjmujemy kolejno wszystkie zmienne za zmienne zależne, obliczenie tylko jeden raz krakowianu mnożników Gaussa zastępuje wszystkie kolejne podstawiania zmiennych zależnych. Zamiast więc rozwiązywać np. sześć układów równań normalnych w problemie, gdzie mamy sześć zmiennych — rozwiązujemy jeden układ, wraz z mnożnikami Gaussa. Korzyść ogromna. Wprowadzenie przez prof. U. J. Banachiewicza specjalnych metod rozwiązywania układów równań o wielu niewiadomych — metod, które prof. Banachiewicz nazwał krakowianowymi — ułatwia bardzo znacznie stosowanie w doświadczalnictwie metody regresji i korelacji wielorakich. W pracy tej nie omawiam szczegółowo metody pierwiastka krakowianowego, na której się opieram, gdyż zrobiłem to gdzie indziej (11). Zajmuję się tu przede wszystkim obliczaniem mnożników Gaussa, których obliczanie jest dalszym ciągiem rozwiązywania równań normalnych.

W rachunku krakowianowym krakowian (macierz) mnożników Gaussa obliczamy przez podniesienie do drugiej potęgi inwersu pierwiastka krakowianowego układu równań normalnych.

Dlatego też obliczanie mnożników Gaussa sprowadza się do obliczania inwersu pierwiastka układu równań normalnych. Dochodzić do obliczania inwersu możemy różnymi drogami. Sądzę, że metoda spełniająca dwa podstawowe warunki: prostoty i najmniejszej ilości działań, jest jedną z metod rachunku krakowianowego, którą postaram się szczegółowo przedstawić.

Samych metod krakowianowych jest kilka. Oprócz tego istnieje cały szereg innych metod. Najbardziej znane są: metoda, którą proponuje

prof. Radhakrishna Rao (9) oraz metoda skrócona Doolittle'a (7). Metody te omówiłem i porównałem z punktu widzenia użyteczności zastosowania do rozwiązywania równań normalnych gdzie indziej (12). Ponieważ obliczanie inwersu układu równań normalnych i z kolei w oparciu o inwers obliczanie mnożników Gaussa stanowi przedłużenie rozwiązywania równań normalnych na krakowian jedynekowy, wobec tego wnioski z porównania metod stosują się także i do obliczania mnożników Gaussa. Ponieważ, jak to wykazałem w tej pracy, metoda krakowianu pierwiastkowego jest najlepsza, dlatego też i tutaj omawiam obliczanie mnożników Gaussa tylko tą metodą.

II. Obliczanie mnożników Gaussa metodą pierwiastka krakowianowego

Dotychczasowy sposób obliczania mnożników Gaussa. Postępując za R. A. Fisherem (6), celem obliczania mnożników Gaussa zastępujemy kolejno kolumny wyrazów wolnych w układach równań normalnych — nowymi kolumnami, składającymi się z jedności i zer. Postępowanie przy tym jest takie, że wstawiamy na miejsce kolumny wyrazów wolnych tyle razy nową kolumnę, ile jest wierszy w układzie, przy czym jedynekę wstawiamy zawsze o jeden wiersz niżej. Dla układu równań normalnych, gdzie występuje np. pięć zmiennych, dostajemy skutkiem tego pięć nowych układów do rozwiązania. Sposób ten zawdzięczamy Gaussowi, który go pierwszy użył, a następnie R. A. Fisherowi, który go zastosował. R. A. Fisher proponuje kolejne rozwiązywanie, sądzę jednak, że jest ono bardzo żmudne, zwłaszcza, że możemy wszystkie te kolumny jednakowo dopisać razem do całego układu danych i rozwiązać łącznie, co czynimy w metodach krakowianowych i innych. Mówimy, że dopisujemy do układu danych krakowian (macierz) jedynekowy. Ponieważ w każdej następnej kolumnie jedynekę wstawiamy o jeden wiersz niżej, wobec tego jedynki układają się nam na przekątnej. Nowy krakowian jedynekowy oznaczamy $\{\tau\}$.

Metoda pierwiastka krakowianowego. Jest ona, jak sądzę, dla doświadczalnictwa rolnego najlepszą metodą dochodzenia do inwersu układu danych dlatego, że jest najprostszą i najkrótszą w użyciu. Stosuje się ją przede wszystkim do układów symetrycznych, z jakimi w biometrii mamy przeważnie do czynienia. Posiada bardzo prosty schemat myślowy, wysoko zautomatyzowany oraz najmniejszą ilość działań rachunkowych do wykonania. Wszystkie działania, z wyjątkiem pierwiastkowania, można wykonać na zwykłej czterodziałaniowej maszynie do liczenia. Nadaje się też do stosowania w układach niesymetrycznych, na co zwraca uwagę Dwyer (3) i Faddiejewa (5). W tym ostatnim wypadku nie daje jednak większych ułatwień

niż druga metoda rachunku krakowianowego, którą nazywamy metodą czynników kanonicznych.

Zastosowanie metody pierwiastka polega na tym, że rozwiązuje się łącznie z głównym krakowianem dopisany krakowian jedynekowy. Krakowian jedynekowy dopisujemy tak, aby odpowiadał krakowianowi głównemu. Powstaje w ten sposób nowy krakowian, który możemy nazwać krakowianem skośnym (8) (patrz tabela 1). Pierwiastek z takiego krakowianu skośnego możemy obliczyć według metody pierwiastka krakowianowego prof. Banachiewicza (1) (11). Po obliczeniu pierwiastka przystępujemy do obliczania krakowianu niewiadomych mnożników Gaussa, które będą oznaczał jako krakowian $\{C\}$. Elementy tego krakowianu, czyli poszczególne mnożniki Gaussa, będą oznaczał jako elementy c_{ij} . Niewiadome (współczynniki regresji cząstkowej) możemy obliczać za pomocą działania zwrotnego (11).

Oprócz tego istnieje inny sposób obliczania współczynników regresji cząstkowej: za pomocą mnożenia kolumny $\{W'\}$ kolejno przez kolumny inwersu pierwiastkowego. Przykład takiego obliczenia podaję poniżej.

Krakowian $\{C\}$ jest krakowianem odwrotnościowym w stosunku do głównego krakowianu, w tej metodzie otrzymujemy go podnosząc do kwadratu inwers. Jeżeli chodzi nam tylko o obliczenie błędów średnich współczynników regresji cząstkowej, to wystarczy podnieść do drugiej potęgi kolejno kolumny inwersu pierwiastka (Patrz str. 77). Chcąc mieć kontrolę sumową obliczania mnożników Gaussa, wypisuje się krakowian jedynekowy po lewej stronie nowego — odwrotnościowego — układu, czyli pod krakowianem $\{K\}$, następnie oblicza się niewiadome, najlepiej za pomocą mnożenia. Mnożąc kolumny inwersu przez kolumnę sumową, dostajemy kolumnę $\{S'\}$. Sumy wierszy w krakowianie $\{C'\}$ powinny zgadzać się z elementami $\{S'\}$. W ten sposób mamy kontrolę dokładności obliczeń współczynników regresji cząstkowej, jak też i kontrolę obliczeń mnożników Gaussa.

Wziąwszy ten sam przykład, którym dotychczas posługiwałem się dla demonstracji metody (11) dopisujemy krakowian (macierz) jedynekowy obok kolumny wyrazów wolnych. Poszczególne kolumny krakowianu jedynekowego możemy oznaczyć jako τ . W przykładzie tym posługuję się pomiarami biometrycznymi na 130 karpach. Zmiennymi rozpatrywanymi wielorako są:

waga ciała karpia	zmienna	W
długość całkowita karpia	„	A
największa wysokość karpia	„	B
największa grubość karpia	„	C
długość jelita karpia	„	D

Zmienną zależną jest waga ciała karpia. Elementy podane poniżej krakowianu to elementy, które oznaczam jako P_{ij} , są to sumy iloczynów zmiennych, podzielone przez ich ilość (w przykładzie tym $N = 130$).

Zastosowanie metody rachunku krakowianowego do znajdowania mnożników Gaussa daje największe ułatwienia rachunkowe w stosunku do pozostałych metod. Polega ono na zastosowaniu czynności rachunkowych, które wykonuje się w metodzie pierwiastka do kolumn krakowianu jedynkowego. W metodzie pierwiastka traktujemy te kolumny tak, jak traktujemy kolumnę $\{W\}$, gdy chcemy obliczyć $\{W'\}$.

Postępując w ten sposób dostajemy w kolumnach oznaczonych jako i nowe elementy pierwiastkowe. Są to elementy inwersu, czyli odwrotności pierwiastka krakowianowego. Jest to niezwykle prosta metoda obliczania elementów inwersu pierwiastka.

Całość obliczeń przy obliczaniu krakowianu mnożników przedstawia tabela 1.

Szczegółowe omówienie obliczeń.

Jak widać z powyżej podanego przykładu, obliczanie mnożników Gaussa rozpada się na trzy etapy:

I. E t a p: obliczenie i wypisanie krakowianu danych, który składa się z trzech krakowianów:

- $\{P\}$ = krakowianu głównego;
- $\{W\}$ = krakowianu wyrazów wolnych;
- $\{\tau\}$ = krakowianu jedynkowego.

(Na to potrzeba, abyśmy mieli gotowe elementy P_{ij} , to jest sumy pomnożonych przez siebie wszystkich kombinacji zmiennych i podzielone przez ich ilość).

Dostajemy w ten sposób krakowian skośny.

II. E t a p: obliczenie z tak utworzonego krakowianu pierwiastka metodą krakowianową (11). Metodę tę stosujemy też do dopisanego z prawej strony krakowianu jedynkowego. Dostajemy w ten sposób trzy nowe krakowiany:

- $\{K\}$ = krakowian pierwiastkowy właściwy;
- $\{W'\}$ = krakowian pierwiastkowy kolumny wyrazów wolnych;
- $\{I\}$ = krakowian pierwiastkowy krakowianu jedynkowego $\{\tau\}$ nazywamy go inwersem (odwrotnością) pierwiastka, powstał on z zastosowania metody pierwiastka do części jedynkowej tablicy.

Tabela 1
krakowian
sumowy
(pomocniczy)

Przykład na obliczanie mnożników Gaussa

I etap obliczeń: wpisanie krakowian danych

krak. $\{W\}$ krakowian $\{\tau\}$ (tau)

α	A	B	C	D	$\{W\}$	τ_1	τ_2	τ_3	τ_4	τ_5	$\{S\}$
1,0	32,0369	11,0192	5,1561	77,8154	645,4615	1,0					773,4891
	1032,0990	355,2517	166,0275	2509,1225	21032,2500	0,0	1,0				25127,7876
		122,6510	57,3043	863,7803	7278,9960	0,0	0,0	1,0			8690,0025
			26,8847	403,7443	3397,1890	0,0	0,0	0,0	1,0		4057,3059
				6173,2993	51286,0000	0,0	0,0	0,0	0,0	1,0	61314,7618

II etap obliczeń: zastosowanie met. pierwiastka krakowianowego do powyżej podanego krak. danych. Po zastosowaniu otrzymujemy:

krakowian pierwiastkowy $\{K\}$ krakowian inwersu $\{I\}$ krakowian
pierwiastko-

wy kol. W

rozłożony met. pierwiastka krakowian jedyn-

krak. $\{W'\}$ kowy tau czyli inwers pierwiastka $\{K\}$

k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	$\{W'\}$	i_1	i_2	i_3	i_4	i_5	$\{S'\}$
1,0	32,0369	11,0192	5,1561	77,8154	645,4615	1,0					773,4891
	2,3950	0,9314	0,3516	6,7467	147,6678	-13,3766	0,4175				145,1335
		0,6006	0,2676	0,0549	48,2665	2,3972	-0,6475	1,6650			52,6042
			0,3226	0,4138	13,2947	-3,3924	0,0821	-1,3811	3,0998		12,4393
				8,5071	6,4339	1,6110	-0,3309	0,0564	-0,1508	0,1175	16,2441

III etap obliczeń: Obliczenie krakowianu mnożników Gaussa przez podniesienie do drugiej potęgi krakowianu $\{I\}$ (mnoży się każdą kolumnę w krak. $\{I\}$ przez każdą kolumnę kolejno)

1	2	3	4	5	$\{x\}$	c'_1	c'_2	c'_3	c'_4	c'_5	$\{S''\}$
1,0	0,0	0,0	0,0	0,0	-1248,8631	199,7837					-1057,8267
	1,0	0,0	0,0	0,0	29,3612	-7,9485	0,7098				22,1819
		1,0	0,0	0,0	62,3653	8,7674	-1,2101	4,6828			71,3222
			1,0	0,0	40,2407	-10,7587	0,3044	-4,2896	9,6315		36,1108
				1,0	0,7560	0,1893	-0,0389	0,0066	-0,0177	0,0138	1,9094

Obliczenie elementów $\{I\}$ odbywa się dokładnie tak samo jak obliczanie elementów $\{W'\}$. Np.:

$$i_{12} = \frac{0,0 - 32,0369 \times 1,000}{2,3950} = -13,3766$$

$$i_{44} = \frac{1,0 - 0,0}{0,3226} = 3,0996$$

$$i_{24} = \frac{0,0 - 0,3516 \times 0,4175 + 0,2676 \times 0,6475}{0,3226} = \frac{0,0 - (-0,0265)}{0,3226} = +0,0821 \text{ itd. itd.}$$

Dostajemy w ten sposób krakowian $\{I\}$, który odpowiada części jedynkowej krakowianu danych i na podstawie którego obliczamy mnożniki.

III. Etap: obliczanie mnożników Gaussa oraz niewiadomych (współczynników regresji cząstkowej).

a. Krakowian jedynkowy wpisujemy z lewej strony kolumny $\{x\}$ w odpowiednie kolumny pod krakowianem $\{K\}$, tak jak w wyżej podanym schemacie. Jest to konieczne dla kontroli obliczeń.

b. Krakowian współczynników regresji cząstkowej $\{x\}$ obliczamy za pomocą mnożenia. Stosowanie rozwiązania zwrotnego wydaje się jednak dokładniejsze. Mnożenie jest łatwiejsze. Znajdowanie niewiadomych za pomocą mnożenia kolumny $\{W'\}$ kolejno przez kolumny $\{I\}$ przedstawia się następująco:

$$\begin{aligned} a. &= \{W'\} \cdot i_1 = -1248,8631 \\ A &= \{W'\} \cdot i_2 = 29,3612 \\ B &= \{W'\} \cdot i_3 = 62,3653 \\ C &= \{W'\} \cdot i_4 = 40,2407 \\ D &= \{W'\} \cdot i_5 = 0,7560 \end{aligned}$$

(1) Ogólnie możemy to napisać: $\{W'\} \cdot \{I\} = \{x\}$.

c. Krakowian odwrotnościowy $\{C'\}$ krakowianu głównego $\{P\}$ (czyli krakowianu mnożników Gaussa) znajdujemy przez podniesienie do drugiej potęgi krakowianu $\{I\}$.

(2) Zapisujemy ten fakt: $\{I\}^2 = \{C'\}$.

To znaczy, że musimy w krakowianie $\{I\}$ pomnożyć każdą kolumnę przez każdą kolumnę. Obliczenie np. elementu c'_{23} :

$$i_2 \cdot i_3 = c'_{23} = \begin{pmatrix} 0,4175 \\ 0,6475 \\ 0,0821 \\ 0,3309 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,0 \\ 1,6650 \\ 1,3811 \\ 0,0564 \end{pmatrix} = 1,2101$$

lub elementu $c_{55} =$

$$i_5 \cdot i_5 = c'_{55} = \begin{pmatrix} 0,0000 \\ 0,0000 \\ 0,0000 \\ 0,1175 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,0000 \\ 0,0000 \\ 0,0000 \\ 0,1175 \end{pmatrix} = 0,0138$$

Zaznaczyć należy, że w wypadku takim jak przedstawiono, tj. krakowianu $\{P + W + \tau\}$ dostajemy inne wartości elementów c_{ij} niż gdybyśmy mieli do czynienia z krakowianem, gdzie elementy danych występują w wartościach empirycznych, który oznaczam jako krakowian $\{A\}$. Ponieważ mamy tu wszystkie elementy podzielone przez N (czyli elementy P_{ij}), więc krakowian danych jest zmniejszony N razy (w naszym przykładzie $N = 130$). Ponieważ krakowian $\{\tau\}$ nie zmienia się, więc wskutek tego elementy w $\{I\}$ są N razy większe niż gdyby to miało miejsce w wypadku stosowania krakowianu $\{A\}$, gdzie dane występują nie podzielone przez N . Skutkiem tego, na to, żeby otrzymać właściwe elementy c_{ij} , trzeba podzielić każdy element c'_{ij} przez N . Dlatego krakowian $\{C\}$, który otrzymujemy z krakowianu $\{P\}$, oznaczam jako $\{C'\}$, ponieważ:

$$(3) \quad c'_{ij}/N = c_{ij}$$

Przedstawiłem tu postępowanie rachunkowe, gdy chcemy znaleźć cały krakowian mnożników Gaussa dla danego krakowianu $\{P\}$.

III. Obliczanie błędów średnich współczynników regresji cząstkowej

Znając wartości współczynników regresji cząstkowej, poszukujemy ich błędów średnich, celem oceny ich wiarygodności.

W tym celu, postępując za M. Ezekielem (4), podaję następujący ogólny wzór dla błędów średnich współczynników regresji cząstkowej:

$$(4) \quad \sigma_{b_{ij.(j+1)\dots m}} = \sqrt{\frac{S_{i.j\dots m}^2}{N\sigma_j^2[1 - R_{j.(j+1)\dots m}^2]}}$$

Symbole we wzorze:

$S_{i.j\dots m}^2$ = kwadrat odchylenia średniego wokół płaszczyzny regresji wielorakiej;

$R_{i.(j+1)\dots m}^2$ = kwadrat współczynnika korelacji wielorakiej;

σ_j^2 = kwadrat odchylenia średniego;

N = ilość obserwacji;

m = ilość zmiennych w analizie;

i = numer zmiennej zależnej;

j = numer zmiennej niezależnej.

Dla małych N powinniśmy wprowadzić poprawkę dla $S_{i,j \dots m}^2$ tj. pomnożyć przez $\frac{n}{n-m}$

gdzie: n = ilość obserwacji,
 m = ilość stałych w równaniu.

W zastosowaniu praktycznym wzór ten jest bardzo trudny. Stosując tego typu wzory musielibyśmy obliczać odpowiednie R^2 i S^2 dla każdego błędu średniego. Pociągnęłoby to dodatkowe rozwiązywanie układów równań. Istnieje jednak metoda pozwalająca obejść znużenie stosowanie tych wzorów. Jest nią posługiwanie się mnożnikami Gaussa. Wykorzystuje ona fakt, że:

$$(5) \quad \frac{1}{N\sigma_j^2(1 - R_{j, (j+1) \dots m}^2)} = c'_{jj}$$

M. Ezekiel (15) podaje następujące wzory na błędy średnie współczynników regresji cząstkowej:

$$(6) \quad \begin{aligned} a, b, c \quad \sigma_{b_{12,34}} &= S_{1,234} \sqrt{c_{22}} \\ \sigma_{b_{13,24}} &= S_{1,234} \sqrt{c_{33}} \\ \sigma_{b_{14,23}} &= S_{1,234} \sqrt{c_{44}} \quad \text{itd.} \end{aligned}$$

Na przykład gdybyśmy mieli obliczyć błąd średni współczynnika $b_{34,125678}$, to mamy

$$(6) \quad d \quad \sigma_{b_{34,125678}} = S_{3,1245678} \sqrt{c_{44}}$$

Jak widzimy, mamy do czynienia z elementami krakowianu $\{C\}$, leżącymi na przekątnej. Wskazują na to subskrypty.

W wypadku stosowania krakowianu $\{P\}$:

$$(7) \quad \frac{1}{\sigma_j^2(1 - R_{j, (j+1) \dots m}^2)} = c'_{jj}$$

Na to więc, aby dostać elementy dla wzoru Ezekieła w krakowianach $\{P\}$, należy podzielić c'_{jj} przez N :

$$(8) \quad \frac{c'_{jj}}{N} = c_{jj}$$

Chcąc uniknąć większej ilości działań, a zwłaszcza pierwiastkowania, należy wybrać najdogodniejszy wzór, którym będzie:

$$(9) \quad \sigma_{b_{(j+1) \dots m}} = \sqrt{\frac{c'_{jj} \cdot S_{i,j \dots m}^2}{N}}$$

Trzeba zaznaczyć, że elementy inwersu, na podstawie których dostajemy elementy c_{ij} , obliczamy w oparciu o kolumny w krakowianie $\{P\}$, czyli, że $\{I\}$ jest obliczony dla $(m - 1)$ niewiadomych, bo ostatnia kolumna, kolumna zmiennej zależnej, nie jest pełna, brak jej do pełnej symetryczności ostatniego elementu. Pełny krakowian mnożników Gaussa, to jest obliczony w oparciu o m zmiennych, stosuje się dla obliczenia całego kompletu równań regresji wielorakiej, o czym niżej. Jeżeli mamy do czynienia z krakowianem $\{A + L\}$, to jest takim, gdzie elementy a_{ij} występują w wielkościach danych empirycznych stosujemy wzór (6). W bardzo często spotykanym wypadku stosowania układu równań normalnych przedstawionych w jednostkach odchylenia od średniej arytmetycznej — także stosujemy wzór (6).

Jak widać z wzoru nr (9) aby obliczyć błąd średni współczynnika A regresji cząstkowej, trzeba znać wartość odchylenia średniego wielorakiego dla zmiennej zależnej oraz odpowiednie mnożniki Gaussa. Obliczanie S podałem gdzie indziej (13), obliczanie mnożników omówiłem powyżej. Dla naszego przykładu otrzymaliśmy:

Obliczenie błędów średnich współczynników regresji cząstkowej

c'_{ij}	$S_{i,j\dots m}^2$	$S_i^2 \cdot c'_{jj}(N)$	$\sqrt{c'_{jj} \cdot S_i^2 / N} = \sigma_{b_{ij.(j+1)\dots m}}$
199,7837	1276,7487	1962,1000	44,2965
0,7098		6,9710	2,6402
4,6828		45,9904	6,7818
9,6315		94,5923	9,7261
0,0138		0,1355	0,3680

Niewiadome obliczono za pomocą rozwiązania zwrotnego. Elementy krakowianu pierwiastkowego najłatwiej i najpraktyczniej nadpisać nad elementami krakowianu danych. Przeprowadzamy obliczenia

- krakowianu pierwiastkowego;
- mnożników Gaussa;
- wielorakiego odchylenia średniego;
- błędów średnich według wzorów podanych.

Całość obliczeń, ale tylko dla obliczenia błędów średnich, w tym samym przykładzie co poprzedni, będzie się przedstawiała tak jak podano w tabeli 2.

Dla ilustracji zastosowania metody przytoczę inne przykłady obliczenia błędów średnich współczynników regresji cząstkowej. Są to przykłady zaczerpnięte z badań biometrycznych różnych populacji karpia.

Tabela 2

Przykład na obliczenie błędów średnich współczynników regresji cząstkowej
 Przykład liczbowy ten sam co poprzednio. Różnica w przedstawieniu graficznym.
 Nadpisywanie elementów krakowianu pierwiastkowego oraz inwersu nad elementami
 krakowianu danych daje ułatwienie w liczeniu.

krakowian $\{P\}$ oraz $\{K\}$		krakowiany $\{W\}$ oraz $\{W'\}$					krakowian $\{\tau\}$ tau oraz $\{I\}$					krakowiany sumowe (pomocnicze)
a, k_1	A, k_2	B, k_3	C, k_4	D, k_5	$\{W\} \{W'\}$	$\tau 1^i$	$\tau 2^i$	$\tau 3^i$	$\tau 4^i$	$\tau 5^i$	$\{S\} \{S'\}$	
1,0	32,0369	11,0192	5,1561	77,8154	645,4615	1,0					773,4891	
1,0	32,0369	11,0192	5,1561	77,8154	645,4615	1,0					773,4891	
	2,3950	0,9314	0,3516	6,7467	147,6678	-13,3766	0,4175				145,1336	
	1032,0990	355,2517	166,0275	2509,1225	21032,2500	0,0	1,0				25127,7876	
		0,6006	0,2676	0,0549	48,2665	2,3972	-0,6475	1,6650			52,6042	
		122,6510	57,3043	863,7803	7278,9960	0,0	0,0	1,0			8690,0025	
			0,3226	0,4138	13,2947	-3,3924	0,0821	-1,3811	3,0998		12,4393	
			26,8847	403,7443	3397,1890	0,0	0,0	0,0	1,0		4057,3059	
				8,5071	6,4339	1,6110	-0,3309	0,0564	-0,1508	0,1175	16,2441	
				6173,2993	51286,0000	0,0	0,0	0,0	0,0	1,0	61314,7618	
+1248,8591	-70,3297	-37,4565	-12,9817			$C'_{jj} = 199,7837$	0,7098	4,6828	9,6315	0,0138		
-1248,8591	+29,3652	+62,3651	+40,2409	+0,7563		$S^2_{i,j..m} = 1276,7487$						
						$\sigma b^2_{ij(j+1)...m} = 1962,10$	6,9710	45,9904	94,5923	0,1355		
						$\sigma b^2_{ij(j+1)...m} = + 44,2965$	2,6402	6,7818	9,7261	0,3680		

Brano pod uwagę w badaniu następujące zmienne:

- X_1 = ciężar całkowity karpia, w g;
- X_2 = długość całkowita karpia, w cm;
- X_3 = długość głowy karpia, w cm;
- X_4 = największa wysokość karpia, w cm;
- X_5 = wysokość odbytowa, w cm;
- X_6 = najmniejsza wysokość karpia, w cm;
- X_7 = największa grubość karpia, w cm;
- X_8 = długość jelita karpia, w cm.

Jako zmienną zależną przyjęto ciężar karpia w g.

Współczynniki regresji cząstkowej, które są podane poniżej, odnoszą się do:

a = współczynnik prostej regresji wielorakiej;

A = współczynnik opisujący zależność między ciężarem a długością całkowitą;

B = współczynnik opisujący zależność między ciężarem a długością głowy;

C = współczynnik opisujący zależność między ciężarem a największą wysokością;

D = współczynnik opisujący zależność między ciężarem a wysokością odbytową;

E = współczynnik opisujący zależność między ciężarem a najmniejszą wysokością;

F = współczynnik opisujący zależność między ciężarem a największą grubością;

G = współczynnik opisujący zależność między ciężarem a długością jelita.

(a — G z uwzględnieniem wpływu pozostałych zmiennych).

Współczynniki regresji cząstkowej i ich błędy średnie odnoszą się do pomiarów biometrycznych 130 karpia, wykonanych przez Zakład Gospodarki Stawowej PAU w 1952 r. Po zastosowaniu omówionych metod dostajemy następujące wyniki (tabela 3):

Gdy rozpatrzymy tablicę współczynników regresji cząstkowej i ich błędy średnie, rzuci się nam w oczy od razu szereg wniosków natury hodowlanej. Szereg współczynników wykazuje małą zmienność, nie przenoszącą jednej trzeciej jego wartości, a szereg współczynników wykazuje ogromną zmienność. Oczywiście zależności opisywane przez współczynniki o ogromnej zmienności w pracach hodowlanych nie powinny być brane pod uwagę jako trwale zależności. I tak największą zmien-

Tabela 3

Tablica współczynników regresji cząstkowej i ich błędów
średnich na podstawie danych ZGS PAU

Treść	Parametr	a	A	B	C	D	E	F	G
Zespół Ochaby N = 40	$b_{ij} \pm \sigma_{b_{ij}}$	-1290,7805	29,2154	6,1113	37,2753	6,4225	59,6237	10,3164	2,2787
		99,4753	6,7073	15,1127	15,7760	13,6482	25,8727	21,5923	0,9252
Zespół Zator N = 30	$b_{ij} \pm \sigma_{b_{ij}}$	-1221,3401	27,7530	29,9059	50,1119	49,2852	-31,4102	91,8176	-0,4910
		96,2966	7,9950	28,2816	21,3794	25,1377	44,4902	26,7919	0,7621
Zespół Łęki N = 60	$b_{ij} \pm \sigma_{b_{ij}}$	-1202,4168	30,9836	-13,2024	55,2983	-5,1082	1,1622	73,7187	0,0100
		72,4919	4,4639	16,4259	13,4478	12,1568	24,6867	18,0239	0,5646
Stawy duże ponad 5 ha N = 40	$b_{ij} \pm \sigma_{b_{ij}}$	-1357,3264	36,3947	9,4668	61,4473	-1,3996	-3,5405	20,1080	0,1395
		85,9194	5,6209	22,4804	17,0985	14,1207	39,7975	22,8492	1,0552
Stawy małe poniżej 5 ha N = 90	$b_{ij} \pm \sigma_{b_{ij}}$	-1113,9889	26,2043	-29,6914	60,4720	-4,0739	34,8757	68,6362	0,4714
		53,5675	0,4151	12,3003	9,9112	29,9365	17,8833	12,5506	0,3897
Stawy nawożone P ₂ O ₅ N = 60	$b_{ij} \pm \sigma_{b_{ij}}$	-1196,4668	30,1873	-4,7901	57,7202	22,9484	-10,0331	23,1602	0,2468
		71,6040	4,1928	15,0506	11,9932	12,1947	30,4978	15,2265	0,5181
Stawy nie nawożone P ₂ O ₅ N = 70	$b_{ij} \pm \sigma_{b_{ij}}$	-1123,0093	30,6905	-20,9553	40,2930	-2,6686	54,0432	68,5509	0,9588
		73,5475	5,3043	4,7794	4,6390	12,1094	20,9069	17,7317	0,5803
Razem 3 zespoły N = 130	$b_{ij} \pm \sigma_{b_{ij}}$	-1198,7463	29,7218	-20,3830	55,5910	0,4186	35,4858	49,9361	0,6517
		48,1084	3,2130	10,2697	9,0390	8,2602	16,5588	11,0693	0,3755

ność spotykamy we współczynnikach D i E , są to współczynniki opisujące współzależność wieloraką między:

D — wagą a wysokością odbytową;

E — wagą a najmniejszą wysokością.

Najmniejszą zmienność wykazuje zależność (oprócz współczynnika a , który dla hodowli nie ma żadnego znaczenia) opisywana przez współczynniki A , C , F . Z tych trzech zależności najbardziej „trwałą” jest zależność opisywana przez współczynnik A .

A — zależność między ciężarem a długością całkowitą;

C — zależność między ciężarem a największą wysokością

F — zależność między ciężarem a największą grubością.

Współczynnik B oraz G , to jest długość głowy i długość jelita, jeżeli chodzi o zmienność, zajmują miejsce pośrednie. Jednak wielkość ich zmienności nie usprawiedliwia brania ich pod uwagę.

Stwierdzenie powyższych faktów miało duże znaczenie dla naszych badań nad hodowlą karpia. Dlatego też powinno być ono jeszcze bardziej szczegółowo rozpracowane. Wnioski hodowlane bowiem wysnute tutaj przez mnie zostały postawione na podstawie studium tylko metody podejścia do zagadnienia współzależności pomiędzy cechami morfologicznymi a użytkowymi. Pozwoliły one nam także już na praktyczne zastosowanie ich w naukowych pracach terenowych. Mogłem bowiem zwiększyć liczbę badań co do ilości karpia przez zmniejszenie liczby pomiarów na poszczególnych sztukach. Osiągnęliśmy przez to odrzucenie cech, które są nieskorelowane wielorako z główną cechą użytkową, to jest z wagą, oraz cech, których zmienność zależności wielorakiej jest tak duża, że nie usprawiedliwia brania ich pod uwagę w hodowli. Dotychczas obowiązujący schemat biometrycznych pomiarów terenowych był skróconym schematem Berga (2) i Starmacha (10) dla karpiovatych. Obecnie opieram się głównie w hodowli na trzech cechach, to jest długości, wysokości i grubości, poza ciężarem.

IV. Obliczenie kompletu współczynników regresji wielorakiej

W przykładzie naszym mamy tylko jedną zmienną zależną, jest nią ciężar karpia. Może jednak zająć potrzeba, a w praktyce statystycznej zachodzi ona często w związku z badaniami korelacyjnymi, że będzie potrzeba kompletu współczynników regresji cząstkowej. To znaczy potrzeba przyjęcia kolejno za zmienne zależne wszystkich pozostałych zmiennych i obliczenia z takich układów równań regresji wielorakich. Mimo stosowania nawet metody pierwiastka krakowianowego jest to żmudna praca — należy w takim wypadku rozwiązać m układów (dla m zmiennych jest m układów, czyli komplet).

Przykład obliczenia kompletu współczynników regresji cząstkowej. Przykład liczbowy ten sam co poprzednio
I etap: wpisanie krakowianu danych. Wszystkie elementy takie same jak w tabeli 1 z dodatkiem nowego wiersza

krakowian $\{P\}$						krakowian jedynkowy $\{\tau\}$ (tau)						Suma
a	A	B	C	D	$\{W\}$	τ_1	τ_2	τ_3	τ_4	τ_5	τ_6	$\{S\}$
1,0	32,0369	11,0192	5,1561	77,8154	645,4615	1,0						773,4891
	1032,0990	355,2517	166,0275	2509,1225	21032,2500	0,0	1,0					25127,7876
		122,6510	57,3043	863,7803	7278,9960	0,0	0,0	1,0				8690,0025
			26,8847	403,7443	3397,1890	0,0	0,0	0,0	1,0			4057,3059
				6173,2993	51286,0000	0,0	0,0	0,0	0,0	1,0		61314,7618
W tym miejscu wstawiamy nowy element przekątniowy \rightarrow						442250,8500	0,0	0,0	0,0	0,0	1,0	325891,7465

II etap: zastosowanie metody pierwiastka krakow. do powyższej tablicy
krakowian pierwiastkowy $\{K\}$

krakowian pierwiastkowy $\{K\}$						krakowian inwersu $\{I\}$						Suma	
k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	$\{W'\}$	i_1	i_2	i_3	i_4	i_5	i_6	$\{S'\}$	
1,0	32,0369	11,0192	5,1561	77,8154	645,4615	1,0						773,4891	
	2,3950	0,9314	0,3516	6,7467	147,6678	-13,3766	0,4175					145,1335	
		0,6006	0,2676	0,0549	48,2615	2,3972	-0,6475	1,6650				52,6042	
			0,3226	0,4138	13,2947	-3,3924	0,0821	-1,3811	3,0998			12,4393	
				8,5071	6,4339	1,6110	-0,3309	0,0544	-0,1508	0,1175		16,2441	
to jest nowy wiersz \rightarrow						35,7316	34,9512	-0,8217	-1,7454	-1,1262	-0,0212	0,0280	66,9955

III etap: podnosimy do drugiej potęgi krakowian $\{I\}$, w ten sposób dostajemy krakowian mnożników Gaussa $\{C'\}$ dla kompletu m zmiennych $\{C'\}$

c'_1	c'_2	c'_3	c'_4	c'_5	c'_6
1421,3701	-36,6679	-52,2364	-50,1207	-0,5517	0,9781
-36,6679	1,3850	0,2240	1,1298	-0,0215	0,0230
-52,2364	0,2240	7,7293	-2,3240	0,0436	0,0488
-50,1207	1,2298	-2,3240	10,8998	0,0061	0,0315
-0,5517	-0,0215	0,0436	0,0061	0,0142	0,0006
0,9781	-0,0230	-0,0488	-0,0315	-0,0006	0,0008

to jest krakowian mnożników Gaussa $\{C'\}$

IV etap: obliczenie kompletu wsp. regr. cząstk. Dzieli się $\{C'\}$ wierszami przez elementy leżące na przekątnej ale z przeciwnym znakiem
komplet. wsp. regr. cząstkowej $\{b_{ij}\} =$

	a	A	B	C	D	W
a	1,0	0,0258	0,0367	0,0353	0,0004	-0,0007
A	26,4750	1,0	-0,1617	-0,8880	0,0155	-0,0166
B	6,7582	-0,0290	1,0	0,3007	-0,0056	-0,0063
C	4,5983	-0,1128	0,2132	1,0	-0,0006	-0,0029
D	38,7153	1,5060	-3,0617	-0,4320	1,0	0,0421
W	-1249,0100	29,3621	62,3691	40,2425	0,7561	1,0

Z pomocą przychodzą nam mnożniki Gaussa. Można bowiem za ich pomocą obliczyć cały komplet równań normalnych, bez uciekania się do rozwiązywania nowych krakowianów. Jest to ogromna zaleta użycia mnożników Gaussa, skraca nam ona czas pracy tym bardziej, im więcej zmiennych mamy w analizie.

W przykładzie użytym w tej pracy mamy sześć zmiennych (wliczając w to zmienną a , której wszystkie elementy równają się jedności). Obliczenie krakowianu $\{C\}$ następuje w tego typu zagadnieniu dokładnie taką samą metodą, jak i poprzednio. Inwers pierwiastka, na podstawie którego oblicza się $\{C\}$, oblicza się z tą tylko różnicą, że dodajemy w krakowianie podstawowym w kolumnie $\{W\}$ wartość P_i^2 . Gdzie i oznacza subskrypt zmiennej zależnej dla danego układu równań normalnych. Jest to ten element, który „dopełnia” do symetryczności krakowian podstawowy. Inwers obliczamy tak samo jak poprzednio. Skutkiem wprowadzenia wartości P_i^2 możemy obliczyć ostatni wiersz inwersu w oparciu o człon prowadzący kolumny dla zmiennej zależnej, to jest ostatniej zmiennej w układzie. Mając tak obliczony inwers możemy przystąpić do obliczenia $\{C\}$. Z kolei mając $\{C\}$ obliczamy współczynniki regresji cząstkowej wszystkich możliwych układów, dzieląc elementy w krakowianie $\{C\}$ przez jego elementy przekątne, ale z przeciwnym znakiem.

Całość postępowania, podobnie jak poprzednio, możemy podzielić na etapy:

I etap: przygotowanie i wpisanie elementów krakowianu podstawowego;

II etap: obliczenie pierwiastka układu podstawowego;

III etap: obliczenie mnożników Gaussa;

IV etap: obliczanie kompletu współczynników regresji cząstkowej.

Całość tych obliczeń przedstawia tabela 4.

Zademonstrowana metoda bardzo ułatwia studium tych zależności.

LITERATURA

1. Banachiewicz T.: Sur la resolution des équations normales de la methode des moindres carrés. Warszawa 1960. Cracow Observatory Reprint.
2. Berg L. S.: Ryby presnych vod SSSR i sopredel'nych stran. Moskva. Izd. Akad. Nauk.
3. Dwyer P. S.: Linear Computations. New York 1952. John Wiley.
4. Ezekiel M.: Methods of Correlation and Regression Analysis. New York 1959. John Wiley.
5. Faddiejewa W. N.: Metody numeryczne algebry liniowej. Warszawa 1955. PAN.
6. Fisher R. A.: Statistical Methods.
7. Goulden C. H.: Methods of Correlation Analysis. Ottawa 1952. John Wiley.

8. Hausbrandt S.: Rozwiązywanie zagadnień rachunkowych przy pomocy zestawu arytometrycznego. Prace Geodez. Instytutu Naukowo-Badawczego, nr 15. Warszawa 1952.
9. Rao R.: Advanced Statistical Methods in Biometric Research. Calcutta 1952. John Wiley. New York.
10. Włodek J. M.: Cechy morfologiczne karpi z Gołysza — Die morphologischen Merkmale der Karfen aus Gołysz. Acta Hydrobiologica, vol. 1, Fasc. 1. Kraków 1959. PWN.
11. Włodek J. M.: Krakowianowa metoda rozwiązywania równań regresji wielorakiej w zastosowaniu do badań biometrycznych w rybactwie. Biuletyn Zakładu Biologii Stawów PAN, nr 2. Kraków 1954. PWN.
12. Włodek J. M.: Najwłaściwsza dla doświadczalnictwa rolniczego metoda rozwiązywania równań liniowych. Kraków 1959. Zeszyty Naukowe WSR Kraków, Rolnictwo, nr 6.
13. Włodek J. M.: Obliczanie współczynnika korelacji wielorakiej oraz błędu standartowego oceny prostej regresji wielorakiej przy stosowaniu rachunku krakowianowego w biometrii. Biuletyn Zakładu Biologii Stawów PAN, nr 4. Kraków 1957. PWN.