

ANALIZA WYTRZYMAŁOŚCI FOLII WIELOWARSTWOWYCH ZE WZGLĘDU NA
WARUNKI FORMOWANIA OPAKOWAŃ

Tadeusz Matuszek

Instytut Mechaniki i Podstaw Konstrukcji Maszyn
Politechniki Gdańskiej

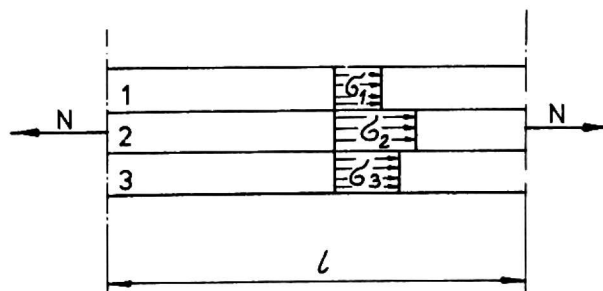
ANALIZA WYTRZYMAŁOŚCIOWA FOLII

W procesie formowania opakowań z folii wielowarstwowych, np. w systemie „trans - wrap” lub „flow - pack”, materiał pod wpływem sił zewnętrznych jest ściskany, rozciągany i zginany. Spełnienie wielu wymagań w systemach opakowaniowych zależy od granicznych wielkości naprężeń wywołanych siłami działającymi na folię w czasie formowania opakowań. Szczególne znaczenie dla bezzakłóceniewego przebiegu tego procesu posiadają parametry geometryczne powierzchni kołnierza formującego [1,4,5].

Założenia dotyczące właściwości materiału

1. Folia jest ciałem izotropowym,
2. Grubość całkowita folii $g_c = \text{const.}$ oraz grubość poszczególnych warstw $g_1, g_2 \dots g_i = \text{const.}$
3. Nie uwzględnia się zmiany pola temperatur działających na folię; tym samym równanie reologiczne stanu folii $F(\sigma, \epsilon, t) = 0$.
4. Folię uważa się za idealnie wiotką tzn. $M_x = M_y = 0$ i $T_x = T_y = 0$.

Rys. 1. Rozciąganie folii wielowarstwowej



5. Dla małych odkształceń folii własności mechaniczne podlegają zasadzie Boltzmana.

Na rysunku 1 przedstawiono przypadek rozciągania folii wielowarstwowej. Jeżeli folię taką uważać za ciało liniowo-sprężyste, wówczas własności tego ciała dla jednoosiowego stanu naprężeń opisuje się równaniem: $\sigma = E \cdot \varepsilon$. Energia (U) takiego układu płaskiego według twierdzenia Castigliano można wyrazić zależnością:

$$U = \sum_{i=1}^n \int_{(li)} \frac{N_i^2}{2E_i A_i} \cdot ds_i + \sum_{i=1}^n \int_{(li)} \frac{T_i^2}{2G_i A_i} \cdot ds_i + \sum_{i=1}^n \int_{(li)} \frac{Mg_i}{2E_i A_i} \cdot ds_i \quad (1)$$

Dla przykładu czystego rozciągania warstw mamy:

$$\frac{\partial U_1}{\partial N_1} = \frac{\partial U_2}{\partial N_2} = \dots = \frac{\partial U_i}{\partial N_i} = P_i \quad (2)$$

Natomiast energia rozciąganej warstwy o długości l wynosi:

$$U = \frac{N^2 l}{2EA}$$

Tak więc:

$$\frac{N_1 \cdot l}{E_1 \cdot A_1} = \frac{N_2 \cdot l}{E_2 \cdot A_2} = \dots = \frac{N_i \cdot l}{E_i \cdot A_i} \quad (3)$$

Z równania (3) otrzymujemy, że:

$$\frac{N_1}{A_1} = \frac{N_2}{A_2} \cdot \frac{E_1}{E_2} \quad (4)$$

A zatem:

$$\sigma_1 = \sigma_2 \cdot \frac{E_2}{E_1} = \sigma_2 \cdot c \quad (5)$$

Oznacza to, że gdy naprężenia w warstwie 2 osiągną wartość dopuszczalną k_2 , to w warstwie 1 naprężenia te osiągną wartość niższą lub wyższą niż dopuszczalne k_1 . Stąd wynika, że przy obliczeniu dopuszczalnej siły ciągnącej (N) folię, miarodajne będą naprężenia dopuszczalne w warstwie o mniejszym k . Siłę N obliczamy z warunku równowagi:

$$\sigma_1 \cdot A_1 + \sigma_2 \cdot A_2 = N \quad (6)$$

Wykorzystując zależność (5) można napisać, że:

$$\sigma_1 = \frac{N}{A_1 + \frac{E_2}{E_1} \cdot A_2} \quad (7)$$

Dla folii n - warstwowej mamy:

$$\sigma_1 = \frac{N}{A_1 + \frac{E_2}{E_1} \cdot A_2 + \frac{E_3}{E_1} \cdot A_3 + \dots + \frac{E_n}{E_1} \cdot A_n} \quad (8)$$

Dla granicznych wartości naprężeń k można w ten sposób określić siłę N_{\max} potrzebną do ciągnięcia folii w procesie formowania opakowań.

W rzeczywistości dla folii wielowarstwowych istnieją zakresy dotyczące wydłużenia, wytrzymałości i grubości poszczególnych warstw. Wyjątkowe pod tym względem są folie z warstwą aluminium, w których występuje znaczne zróżnicowanie odkształcenia i naprężeń w próbie wytrzymałościowej na rozciąganie [1,5].

Tak więc folię wielowarstwową nie można uważać za ciało o sprężystości liniowej. Z wyników dostępnych badań należy stwierdzić, że we foliach występują zjawiska pełzania, relaksacji i częściowego powrotu w czasie po odjęciu obciążenia [1,4,6].

Przybliżenia modelowe właściwości folii

Ze znanych modeli reologicznych, które uwzględniają wymienione wyżej rodzaje odkształceń, można przytoczyć model o cechach podobnych opracowany przez Kelvina-Voigta lub Maxwella.

Jeżeli właściwości wytrzymałościowe folii scharakteryzować modelem Kelvina-Voigta, to wtedy:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon + \eta \cdot \frac{d\varepsilon}{dt} \quad (9)$$

Dla pełzania: $\sigma = \text{const.} = \sigma_0$, rozwiązaniem równania (9) jest:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E} \left(1 - e^{-\frac{E}{\eta} \cdot t} \right) \quad (10)$$

Z równania (10), jeżeli $t \rightarrow 0$, to $\varepsilon(0) = 0$, co oznacza raczej małą przydatność tego modelu dla oszacowania właściwości rzeczywistej folii wielowarstwowej.

Jeżeli przyjąć, że folia jest podobna do modelu o właściwościach ciała według Maxwella, to wtedy na sumaryczne odkształcenie złoży się odkształcenie sprężyste (ε_1) i tłumienie (ε_2). Przy założeniu, że $\delta(t)$ jest znaną funkcją czasu, wówczas całkowite odkształcenie:

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{E} \cdot \delta(t) + \frac{1}{\eta} \int_{\alpha=0}^{\alpha=t} \delta(\alpha) d\alpha \quad (11)$$

Dla warunku stałego naprężenia w czasie: $\delta(t) = \delta_0 = \text{const.}$ ze wzoru (11) otrzymamy:

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{E} \cdot \delta_0 + \frac{1}{\eta} \cdot \delta_0 \cdot t \quad (12)$$

Z równania (12), jeżeli $t \rightarrow 0$, to $\varepsilon(0) = \frac{\delta_0}{E}$, co również nie jest zupełnie zgodne z rzeczywistym zachowaniem się folii. Właściwości folii warstwowych należy więc sprawdzać na modelu bardziej złożonym. Można przypuszczać, że znaczne przybliżenie do rzeczywistych właściwości folii uzyska się przy pomocy modelu przedstawionego

schematycznie na rysunku 2. Jest to model o cechach złożonych z obydwu omówionych modeli i został opracowany przez Burgers'a [4]. Na całkowite odkształcenie materiału folii składają się wówczas: natychmiastowe odkształcenie sprężyste (ε_s), opóźnione odkształcenie sprężyste (ε_{op}) i lepkie płynięcie (ε_l).

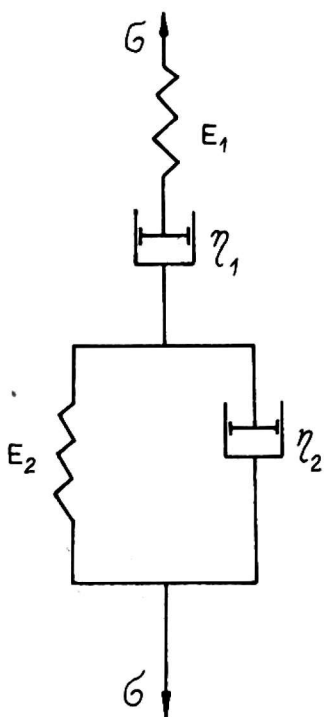
$$\varepsilon_c = \varepsilon_s + \varepsilon_{op} + \varepsilon_l \quad (13)$$

gdzie

$$\varepsilon_s = \frac{\delta}{E_1}$$

$$\varepsilon_{op} = \frac{\delta}{E_2} \left[1 - e^{-\frac{E_2}{3\eta_2} \cdot t} \right] \quad (14)$$

$$\varepsilon_l = \frac{\delta}{3\eta_1} \cdot t$$



Rys. 2. Model właściwości folii warstwowych

A wtedy:

$$\varepsilon_c = \frac{\delta}{E_1} + \frac{\delta}{E_2} \left(1 - e^{-\frac{E_2}{3\eta_2} \cdot t} \right) + \frac{\delta}{3\eta_1} \cdot t \quad (15)$$

Ze względu na dużą różnorodność właściwości folii i możliwości łączenia ich w folie wielowarstwowe, spotyka się znaczne odchylenia od liniowości w zakresie sprężystym i lepkiem. Dlatego też ich właściwości można lepiej wyrazić równaniem:

$$\varepsilon_c = \frac{\delta}{E_1} + K \cdot \delta^\alpha \left(1 - e^{-q \cdot t} \right) + B \cdot \delta^n \cdot t \quad (16)$$

gdzie K, B, q, n, α - to stałe charakterystyczne każdej folii określone doświadczalnie.

Dla przypadku rozciągania folii wielowarstwowej (rys. 1) przy jednakowym wydłużeniu każdej warstwy (np. I, II) w kierunku działania siły otrzymamy:

$$\varepsilon_I = \frac{\delta_I}{E_{I_1}} + \frac{\delta_I}{E_{I_2}} \left(1 - e^{-\frac{E_{I_2}}{3\eta_{I_2}} \cdot t} \right) + \frac{\delta_I}{3\eta_{I_1}} \cdot t = \varepsilon_{II} = \frac{\delta_{II}}{E_{II_1}} + \frac{\delta_{II}}{E_{II_2}} \left(1 - e^{-\frac{E_{II_2}}{3\eta_{II_2}} \cdot t} \right) + \frac{\delta_{II}}{3\eta_{II_1}} \cdot t \quad (17)$$

Z równania (17) można wyznaczyć występujące w tej warstwie naprężenia:

$$\sigma_I = \sigma_{II} \left[\frac{\frac{1}{E_{II_1}} + \frac{1}{E_{II_2}} \left(1 - e^{-\frac{E_{II_2} \cdot t}{3\eta_{II_2}}} \right) + \frac{t}{3\eta_{II_1}}}{\frac{1}{E_{I_1}} + \frac{1}{E_{I_2}} \left(1 - e^{-\frac{E_{I_2} \cdot t}{3\eta_{I_2}}} \right) + \frac{t}{3\eta_{I_1}}} \right] \quad (18)$$

Dopuszczalna siła ciągnąca N jest określona z warunku równowagi statycznej według równania (6). Dla granicznych wartości $\delta = \delta_{kr}$ znajduje się siłę ciągnącą maksymalną N_{max} . Dla folii o n warstwach wzór na siłę N przyjmie postać:

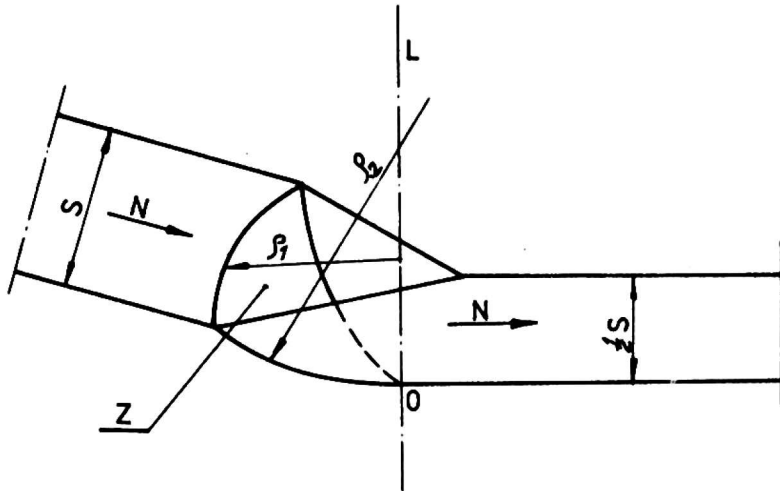
$$\begin{aligned}
 N = \sigma_I \cdot \left[A_I + \frac{\frac{1}{E_{II_1}} + \frac{1}{E_{II_2}} \left(1 - e^{-\frac{E_{II_2} \cdot t}{3\eta_{II_2}}} \right) + \frac{t}{3\eta_{II_1}}}{\frac{1}{E_{I_1}} + \frac{1}{E_{I_2}} \left(1 - e^{-\frac{E_{I_2} \cdot t}{3\eta_{I_2}}} \right) + \frac{t}{3\eta_{I_1}}} A_{II} + \dots + \right. \\
 \left. + \frac{\frac{1}{E_{n_1}} + \frac{1}{E_{n_2}} \left(1 - e^{-\frac{t \cdot E_{n_2}}{3 \cdot \eta_{n_2}}} \right) + \frac{t}{3\eta_{n_1}}}{\frac{1}{E_{I_1}} + \frac{1}{E_{I_2}} \left(1 - e^{-\frac{t \cdot E_{I_2}}{3\eta_2}} \right) + \frac{t}{3\eta_{I_1}}} \cdot A_n \right] \quad (19)
 \end{aligned}$$

Równanie powierzchni formującej folię

Dla pewnych warunków formowania opakowań z tworzyw idealnie wiotkich uznano, że powierzchnia Z jest częścią bryły obrotowej, której oś obrotu L przechodzi przez punkt O (rys. 3). Niech powierzchnię Z określają promienie ρ_1 i ρ_2 . Wówczas dla przyjętych wcześniej założeń oraz dodatkowych takich, że:

- folia przenosi naprężenia południkowe i obrotowe (σ_1 i σ_2),
 - obciążenie folii od powierzchni Z skierowane jest prostopadle do powierzchni folii,
 - folia posiada niewielką grubość g w porównaniu z promieniem krzywizny powierzchni formującej ($\sigma_3 = 0$),
- powinien być wyznaczony warunek sprężystości taki, aby stan naprężenia określony przez σ_1 i σ_2 nie spowodował odkształceń plastycznych podczas formowania folii, tzn.:

$$k_r \geq \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_2} \quad (20)$$



Rys. 3.

Dla folii aluminiowej i jej laminatów powinien być spełniony warunek plastyczności:

$$\sigma_{pl} = \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_2^2} \quad (21)$$

Rozpatrując równowagę statyczną wycinka w folii rozłożonej na powierzchni formującej z (rys. 4), dla rzutów sił na oś x otrzymamy:

$$\sum F_i^{(x)} = 0;$$

$$d(g \cdot \rho_1^x d\alpha \sigma_1) - g \cdot \frac{d\rho_1^x}{\cos\beta} \cdot \sigma_1 \cdot d\alpha \cdot \cos\beta = 0 \quad (22)$$

Przy grubości folii $g = \text{const.}$ otrzymamy:

$$g \cdot d\alpha \cdot d(\rho_1^x \cdot \sigma_2) - g \cdot d\alpha \cdot d\rho_1^x \cdot \sigma = 0 \quad (23)$$

$$d(\rho_1^x \cdot \sigma_2) - d\rho_1^x \cdot \sigma_1 = 0 \quad (24)$$

Ponieważ:

$$d(\rho_1^x \cdot \sigma_2) = d\rho_1^x \cdot \sigma_2 + \rho_1^x \cdot d\sigma_2 \quad (25)$$

to po podstawieniu do równania (24) i podzieleniu przez $r \cdot dr$ otrzymamy:

$$\frac{d\sigma_2}{d\rho_1^x} - \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\rho_1^x} = 0 \quad (26)$$

Po przekształceniu równania (26):

$$\left. \begin{aligned} d\sigma_2 &= (\sigma_1 - \sigma_2) \cdot \frac{d\rho_1^x}{\rho_1^x} \\ \frac{d\sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_2} &= \frac{d\rho_1^x}{\rho_1^x} \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

w rozwiązaniu otrzymujemy:

$$\ln \frac{1}{\sigma_1 - \sigma_2} = \ln c \cdot \rho_1^x \quad (28)$$

skąd:

$$\sigma_2 = \sigma_1 - \frac{1}{c \cdot \rho_1^x} \quad (29)$$

Ze względu na określone w założeniach warunki formowania interesuje nas równanie takiej powierzchni formującej folię, aby całkowite naprężenia w tym tworzywie były minimalne - co oznacza, że minimalne powinny być naprężenia σ_1 i σ_2 czyli spełnienie warunku według wzoru (20).

Aby σ_2 były minimalne, musi być spełniony iloraz:

$$\frac{d\sigma_2}{d\rho_1^x} = 0$$

Tak więc:

$$\frac{d\sigma_2}{d\rho_1^x} = \frac{1}{c \cdot \rho_1^{x2}} \quad (30)$$

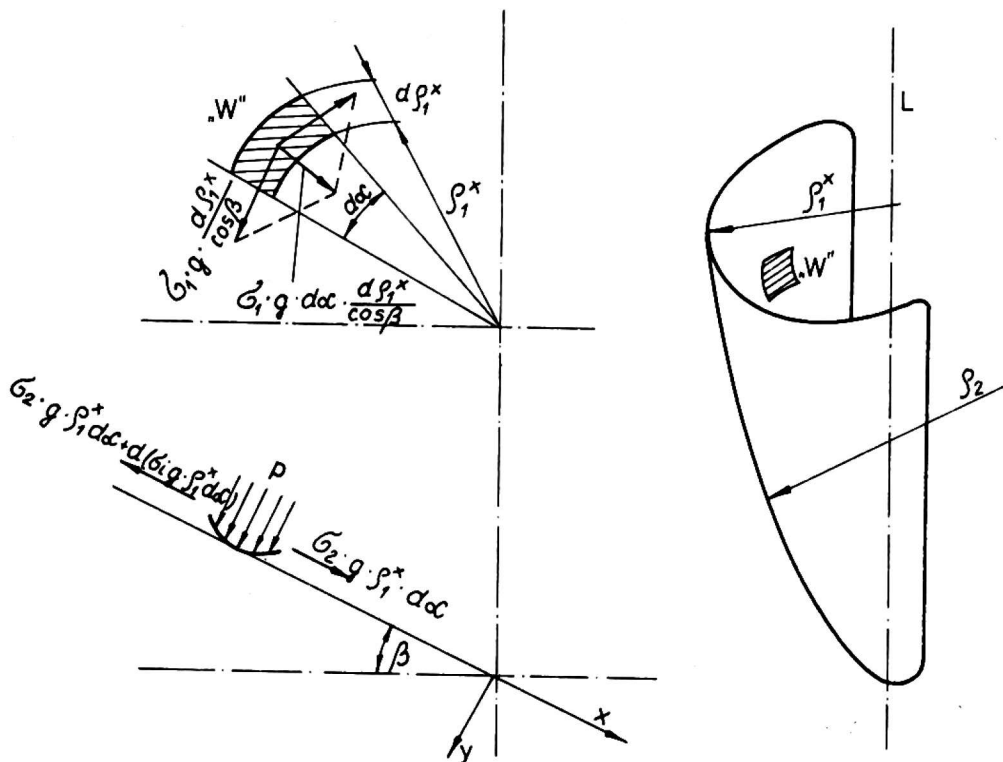
Stąd:

$$\frac{1}{c \cdot \rho_1^{x2}} = 0, \quad \text{dla } \rho_1^x = \infty$$

Warunek ten spełnia powierzchnia paraboliczna płaska. Należy jeszcze sprawdzić, czy dla $\rho_1^x = \infty$ funkcja według wzoru (29) przyjmuje rzeczywiście minimum: 1

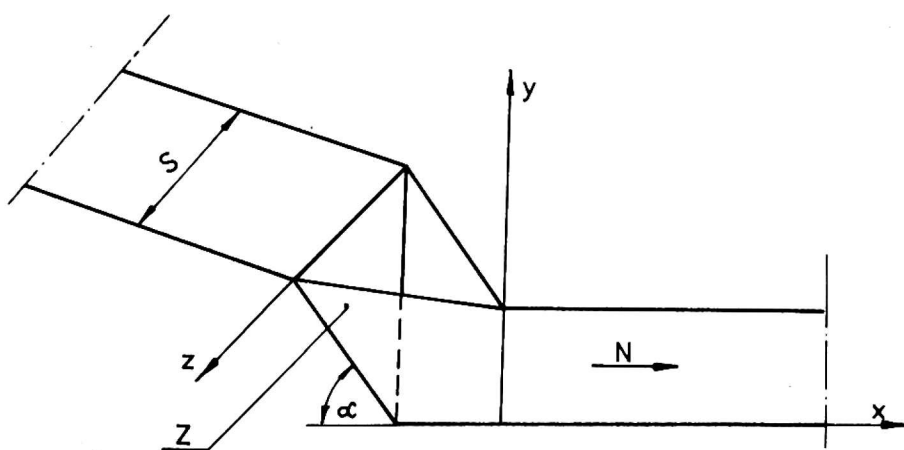
$$\frac{d^2 \delta_2}{d \rho_1^x} = - \frac{1}{c \cdot \rho_1^x{}^3} \quad (31)$$

skąd dla $\rho_1^x = \infty$, $\frac{d^2 \delta_2}{d \rho_1^x} = 0$. Następne pochodne funkcji (29) w punkcie $\rho_1^x = \infty$ też równe są 0.



Rys. 4.

Jeżeli założymy, że powierzchnia formująca Z jest płaszczyzną, np. trójkątem równoramiennym (rys. 5), to wówczas przy uwzględnie-



Rys. 5.

niu sił tarcia folii o powierzchnię Z z warunku równowagi statycznej sił dla wycinka folii $dx \cdot dz$ wynikają następujące zależności (rys. 6):

$$\sum F_i^{(x)} = 0;$$

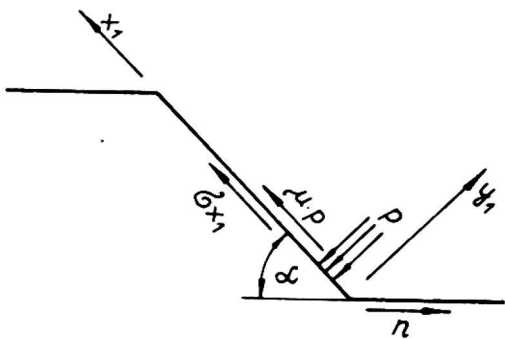
$$n \cdot dz \cdot \cos \alpha = \delta_{x_1} \cdot dz \cdot g + p \cdot dx \cdot dz \cdot \mu \quad (32)$$

$$\sum F_i = 0;$$

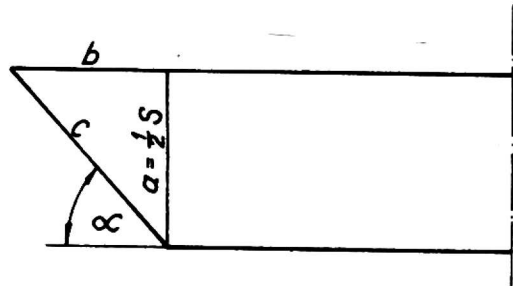
$$p \cdot dz \cdot dx = n \cdot \sin \alpha \cdot dz \quad (33)$$

Stąd otrzymamy:

$$\cos \alpha - \mu \cdot \sin \alpha = \sigma_{x_1} \cdot g/n \quad (34)$$



Rys. 6.



Rys. 7.

Minimum funkcji $\sigma_{x_1} = f(\alpha)$

$$\sigma_{x_1} = \frac{n}{g} (\cos \alpha - \mu \cdot \sin \alpha) \quad (35)$$

$$\frac{d\sigma_{x_1}}{d\alpha} = \frac{n}{g} (\mu \cdot \cos \alpha - \sin \alpha) \quad (36)$$

$$\alpha = \arctg \mu \quad (37)$$

Dysponując minimalnymi wartościami μ znalezionych w tablicach, można określić wymiary geometryczne powierzchni formującej (rys. 7):

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{S}{2c} \rightarrow c = \frac{S}{2 \sin \alpha} \quad (38)$$

WNIOSKI

Wymiary geometryczne powierzchni kołnierzy formujących opakowania z folii warstwowych, powinny być obliczone z warunków wytrzymałościowych materiałów opakowaniowych.

Idealną powierzchnią formującą jest taka, na której wydłużenia folii w czasie formowania są jednakowe w każdym punkcie folii i są one minimalne dla danej siły ciągnącej folię.

Wyznaczenie dopuszczalnej siły ciągnącej folie w czasie formowania opakowań z uwzględnieniem jej wytrzymałości stanowi o prawidłowej, ciągłej i bezzakłócenkowej pracy automatów pakujących.

Wykaz oznaczeń

- A - przekrój [m^2],
 E - moduł Younga [$N \cdot m^{-2}$],
 N - siła rozciągająca [N],
 S - szerokość folii [m],
 σ - naprężenie [Nm^{-2}],
 k_r - dopuszczalne naprężenie na rozciąganie [$N \cdot m^{-2}$],
 g - grubość folii [m],
 ε - odkształcenie,
 t - czas [s],
 η - współczynnik lepkości [$N \cdot s \cdot m^{-2}$],
 μ - współczynnik tarcia,
 $n = \frac{N}{S}$ - jednostkowa siła ciągnąca folię [$N \cdot m^{-1}$],
 p - nacisk jednostkowy powierzchni formującej na folię [$N \cdot m^{-2}$].

LITERATURA

1. Bieliankin F. P., Jacenko W. F.: Pročność i deformativność stoistykh plastikov, N.I. Kijov 1964.
2. Biezuchoy N. I.: Teoria sprężystości i plastyczności, PWN - Warszawa 1971.
3. Ferry J. D.: Lepkosprężystość polimerów, WNT - Warszawa 1965.
4. Findley W. N., Lai J. S., Onaran K.: Creep and relaxation of nonlinear viscoelastic materials, North - Holland Publ. Comp., 1976.
5. Mot E.: Das Formschulterproblem an Schlauchbeutel-Form-Füll und Verschiessmaschinen Verpackung - Rundsch, 5/1973.
6. Semmler M., Hohmann H., Heiss R.: Über das Rückfedern homogener, viskoelastischer Packstoffe nach dem Falten, Verpackungs-Rundsch. 6/1976.
7. Timoshenko S.: Theory of Plates and Shells, Mc Graw - Hill Book Comp., 1963.

Autor dziękuje Panu mgr. inż. Andrzejowi Zakrzewskiemu za pomoc w przygotowaniu rysunków i dyskusję wyników równań powierzchni formujących.

Тадеуш Матушек

АНАЛИЗ ПРОЧНОСТИ МНОГОСЛОИСТЫХ ФОЛЬГ
УЧИТЫВАЯ УСЛОВИЯ ФОРМИРОВАНИЯ ТАРЫ

Р е з ю м е

В работе сосредоточено внимание на некоторых проблемах прочности слоистых фольг. На основе принятой реологической модели определено допустимую силу тянущю фольгу во время формирования тары. В принятых условиях нагрузки, найдено уравнение формирующей поверхности при минимальных напряжениях в фольге.

Tadeusz Matuszek

ANALYSIS OF THE STRENGTH OF THE MULTILAYER FOIL CONSIDERING
REQUIREMENTS FOR FORMATION OF CONTAINERS

S u m m a r y

In this paper the selected problems concerning the strength of multilayer foil have been taken into consideration. On the basis of the accepted rheological model the permissible strength which pulls the foil during formation of the container has been defined. For assumed load conditions the equation of the forming surface at minimal foil stresses has been found.